УДК 513. 33

Б. Я. ЛЕВИН

МАЖОРАНТЫ В КЛАССАХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При исследовании экстремальных задач в классах голоморфных функций мы часто сталкиваемся со следующим явлением: в рассматриваемом классе нет экстремальной функции, а в несколько более широком классе субгармонических функций экстремум достигается на некоторой функции класса. Такие задачи естественно ставить и решать в классах субгармонических функций. Исследованию этих классов посвящаются три статьи автора.

В первой статье выделяются классы субгармонических функций и проводится общее изучение мажорант таких классов*.

Во второй** — изучается связь мажорант со специальными конформными отображениями, дающая метод для решения некоторых экстремальных задач.

В третьей мы изучаем специальные отображения полуплоскости $\boldsymbol{C}$, которые называем E-правильными. Они дают возможность ввести классификацию замкнутых множеств на вещественной оси. Кроме того, мы устанавливаем некоторые признаки конечности мажоранты.

В 1974 г. значительная часть этих результатов была систематически изложена в цикле лекций, прочитанных автором в Ростовском государственном университете. Некоторые результаты были доложены на конференциях по теории функций, в частности в Харькове (1971) и Черноголовке (1981). Часть результатов опубликована ранее [1—3].

Основные свойства мажорант и их представление. Ч. 1

В этой статье определяются мажоранты для некоторых классов субгармонических функций и проводится общее изучение таких мажорант. В конце статьи дается интегральное представление мажоранты.

1.1. Определение классов K_φ и основные свойства их мажорант. Для того чтобы дать общее определение рассматриваемых ниже классов субгармонических функций, остановимся сначала на специальной операции, которую будем называть операцией «выглаживания» субгармонической функции.

---

* В работе П. Кусиса [4] развита теория мажорант как аппарат для получения теоремы А. Берлинга и П. Малявена о мультипликаторе.

** Вторая и третья статьи автора будут помещены в сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 52.

Пусть g — субгармоническая функция во всей плоскости C* и c — произвольный круг в этой плоскости. Выглаженной в c функцией g_c назовем субгармоническую в C функцию, совпадающую с g в дополнении к c и с ее гармонической мажорантой в c**.

Пусть $\varphi(x) \geqslant 0$ — произвольная функция, заданная на вещественной оси R, причем значения $\varphi(x) = +\infty$ не исключаются.

Назовем классом K_φ любой класс субгармонических в C функций g, который удовлетворяет следующим условиям:

1) все функции g этого класса удовлетворяют на R неравенству

$$g(x) \leqslant \varphi(x) \tag{1.2}$$

2) если $g \in K_\varphi$ и при некотором круге c выглаженная функция g_c удовлетворяет условию (1), то $g_c \in K_\varphi$;

3) если $g_1 \in K_\varphi$ и $g_2 \in K_\varphi$, то и $\max\{g_1(z), g_2(z)\} \in K_\varphi$;

4) $0 \in K_\varphi$;

5) существует функция $g \in K_\varphi$, отличная от постоянной.

Приведем несколько примеров классов K_φ.

Субгармоническую функцию $g(z)$ при $z \in C$ назовем функцией конечной степени, если она растет при $|z| \to \infty$ не быстрее, чем некоторая линейная функция от $|z|$, т. е.

$$\sigma = \overline{\lim_{|z| \to \infty}} \frac{g(z)}{|z|} < \infty. \tag{1.3}$$

Число σ называется степенью функции $g(z)$.

1) Обозначим через K_φ^σ класс всех субгармонических функций в C, степень которых не превосходит данного числа $\sigma \geqslant 0$ и которые удовлетворяют неравенству (1.2) на вещественной оси.

2) Через $K_{\varphi, l}^\lambda$ будет обозначен класс всех субгармонических функций в C, удовлетворяющих неравенству (1.2) и ограничению на рост

$$\overline{\lim_{|z| \to \infty}} \frac{g(z)}{\ln|z|} \leqslant \lambda < \infty. \tag{1.4}$$

3) Символом $K_{\varphi, l}$ обозначим класс всех субгармонических функций в C, удовлетворяющих неравенству (1.2) и ограничению на рост

$$\overline{\lim_{|z| \to \infty}} \frac{g(z)}{\ln|z|} < \infty. \tag{1.5}$$

4) Будем обозначать $K_{\varphi, \psi}^\gamma$ — класс функций из K_φ^0, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim_{y \to +\infty}} \frac{g(\pm iy)}{\psi(|y|)} \leqslant \gamma < \infty, \tag{1.6}$$

где $\psi(|y|)$ — некоторая монотонно растущая функция.

---

* Обозначим таким образом плоскость x, y, в которой рассматриваются вещественные субгармонические функции, так как в дальнейшем будет использована ее комплексная структура.

** Эта операция совпадает с операцией выметания масс из круга c.

Легко проверить, что все перечисленные классы относятся к классам K_φ.

Перейдем к определению понятия мажоранты класса K_φ. Для этого введем в рассмотрение функцию

$$\hat{g}(z, K_\varphi) = \sup_{g \in K_\varphi} \{g(z)\}, \tag{1.7}$$

которая мажорирует в плоскости $\boldsymbol{C}$ все функции класса. Таким же свойством обладает субгармоническая функция $v(z, K_\varphi)$, полученная из $\hat{g}(z, K_\varphi)$ путем «регуляризации»,

$$v(z, K_\varphi) = \lim_{\delta \downarrow 0} (\sup_{|\zeta - z| < \delta} \hat{g}(\zeta, K_\varphi)), \tag{1.8}$$

которая и называется мажорантой данного класса K_φ.

В дальнейшем вместо $v(z, K_\varphi)$ часто будем писать $v(z)$, а вместо $\hat{g}(z, K_\varphi)$ — просто $\hat{g}(z)$.

Теорема 1.1. *Мажоранта $\hat{g}(z)$ класса K_φ либо равна $+\infty$ всюду в полуплоскости $\boldsymbol{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, либо всюду конечна в этой полуплоскости. В последнем случае эта мажоранта есть гармоническая функция в $\boldsymbol{C}_+$. Аналогичные утверждения верны относительно полуплоскости $\boldsymbol{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.*

Доказательство. Пусть для определенности $z_0 \in \boldsymbol{C}_+$ и $\{g_n(z)\}_1^\infty$ такая последовательность $g_n \in K_\varphi$, что $g_n(z_0) \to \hat{g}(z_0) \leqslant \infty$. По этой последовательности можно построить монотонную в $\boldsymbol{C}_+$ последовательность $\tilde{g}_n(z) = \max_{j < n} \{g_j(z)\}$, и затем — последовательность $g_c^n \in K_\varphi$, полученную из $\{\tilde{g}_n(z)\}$ выглаживанием этих функций в круге $c(z_0) = \{z : |z - z_0| < \operatorname{Im} z_0\}$. Эта монотонная последовательность гармонических в $c(z_0)$ функций $\{g_c^n(z)\}_1^\infty$ равномерно сходится по теореме Гарнака в каждом круге $c_\rho = \{z : |z - z_0| \leqslant \rho < \operatorname{Im} z_0\}$ к бесконечности, если $\hat{g}(z_0) = \infty$, и к некоторой гармонической функции $g_0(z)$, если $\hat{g}(z_0) < \infty$. Тогда $g_0(z_0) = \hat{g}(z_0)$. Если $\hat{g}(z_0) = \infty$, то получается, что $\hat{g}(z) = \infty$ во всем круге $c(z_0)$. Соединив точку z_0 с произвольной точкой $z_1 \in \boldsymbol{C}_+$ прямолинейным отрезком и применив алгоритм, аналогичный алгоритму аналитического продолжения, мы получим, что $\hat{g}(z_1) = \infty$. Итак, если функция $\hat{g}(z)$ равна $+\infty$ в какой-нибудь точке $\boldsymbol{C}_+$, то она равна $+\infty$ во всей полуплоскости $\boldsymbol{C}_+$. Пусть теперь $\hat{g}(z_0) < \infty$. Мы докажем, что в этом случае $\hat{g}(z) = g_0(z)$ в круге c_ρ, т. е. гармоническая в окрестности точки z_0. В силу произвольности $z_0 \in \boldsymbol{C}_+$ отсюда будет следовать, что $\hat{g}(z)$ — гармоническая функция в $\boldsymbol{C}_+$. Чтобы это доказать, мы выберем произвольную точку $z_1 \in c_\rho$ и построим также, как прежде, монотонную последовательность $\{{}_1g_n(z)\}_{n=1}^\infty$ функций из K_φ, такую, что ${}_1g_n(z_1) \to \hat{g}(z_1)$. Затем построим последовательность $\tilde{g}_n(z) = \max\{g_n(z), {}_1g_n(z)\}$ и, наконец, $\{\tilde{g}_c^n(z)\}_1^\infty$, которая получается выглаживанием функций $\tilde{g}_n$ в $c(z_0)$. Очевидно, что $\tilde{g}_c^n(z) \geqslant g_c^n(z)$ при $z \in c_\rho$. Последовательность $\{\tilde{g}_c^n(z)\}_1^\infty$ сходится к гармонической функции $g_1(z) \geqslant$

$\geqslant g_0(z)$. Но $g_1(z_0) = g_0(z_0) = \hat{g}(z_0)$, и поэтому $g_1(z) \equiv g_0(z)$. По построению последовательности g_c^n имеем $g_c^n(z_1) \uparrow \hat{g}(z_1)$ и, следовательно, $\hat{g}(z_1) = g_1(z_1) = g_0(z_1)$. В силу произвольности $z_1 \in c_\rho$ получаем, что $\hat{g}(z) = g_0(z)$ при $z \in c_\rho$. Итак, функция $\hat{g}(z)$ гармоническая всюду, где она конечна ■

Замечание 1. Из теоремы 1.1 следует, что $v(z) = \hat{g}(z)$ на множестве $\boldsymbol{C}_+ \cup \boldsymbol{C}_-$ ▲

Замечание 2. Если существует такой круг c с центром в точке x_0 вещественной оси, что выглаживание произвольной функции $g(z) \in K_\varphi$ в этом круге не выводит ее из класса, то, несущественно изменяя доказательство, можно установить, что функция $v(z)$ — гармоническая в точке x_0. В частности, это будет иметь место, если $\varphi(x) = +\infty$ в некоторой окрестности точки x_0 ▲

Среди классов K_φ естественно выделить такие, в которые вместе с каждой функцией $g(z)$ входит функция $g(\bar{z})$. Такие классы будем называть симметричными. Все классы K_φ, приведенные раньше, симметричные. Нетрудно построить примеры несимметричных классов K_φ.

Теорема 1.2. *Если класс K_φ симметричен и его мажоранта $v(z)$ конечна в некоторой точке плоскости, то она конечна всюду в плоскости $\boldsymbol{C}$ и является положительной гармонической функцией в $\boldsymbol{C}_+$ и $\boldsymbol{C}_-$* ▲

Доказательство. Заметим прежде всего, что если функция $v(z)$ конечна в некоторой точке вещественной оси, то в силу полунепрерывности функции $v(z)$ сверху она ограничена в некоторой окрестности этой точки. Поэтому нужно рассмотреть лишь тот случай, когда $v(z)$ конечна в некоторой точке $z_0 \in \boldsymbol{C}_+$. По симметрии она конечна также в точке $z_0 \in \boldsymbol{C}_-$. По теореме 1.1 она конечна при $\operatorname{Im} z \neq 0$ и гармоническая в каждой из полуплоскостей $\boldsymbol{C}_+$ и $\boldsymbol{C}_-$. Из свойств 4) и 5) класса K_φ следует, что каждая из этих гармонических функций положительна в соответствующей полуплоскости.

Для доказательства теоремы нужно лишь установить, что мажоранта $v(z)$ конечна в каждой точке вещественной оси. Для этого воспользуемся представлением положительной в $\boldsymbol{C}_+$ гармонической функции. Чтобы получить это представление, отобразим $\boldsymbol{C}_+$ на единичный круг с помощью функции $\zeta = \frac{z-i}{z+i}$. Тогда $v(z) = t(\zeta)$ — положительная гармоническая функция в единичном круге $|\zeta| < 1$ и потому (по известной теореме Рисса—Герглотца) имеет представление

$$t(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{+0}^{2\pi+0} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\theta)+\gamma^2}\, d\mu(\psi), \ \ \zeta = re^{i\theta},$$

где $\mu(\psi)$ — неубывающая функция и $\mu(2\pi+0) - \mu(+0) = 2\pi t(0)$. Возвращаясь к прежним переменным, получаем

$$v(z) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_1(t)}{(t-x)^2+y^2} + \sigma_1 y, \tag{1.10}$$

где $\sigma_1 = \frac{1}{2\pi}\Big[\mu_1(2\pi+0) - \mu_1(2\pi-0)\Big] \geqslant 0$; $\mu_1(t)$ — неубывающая функция и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_1(t)}{1+t^2} + \sigma_1 = v(i) < \infty. \tag{1.11}$$

Интегрируя (1.10), под знаком интеграла получим

$$\int_a^b V(x+iy)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(t, y)}{\pi}\,d\mu_1(t), \tag{1.12}$$

где $\alpha(t, y)$ — угол, под которым виден из точки t на вещественной оси прямолинейный отрезок $[a+iy, b+iy]$. Разобьем последний интеграл в (1.12) на интегралы по сегменту $t \in [a, b]$ и по внешности сегмента $t \notin [a, b]$. На интервале (a, b) функция $\alpha(t, y) \uparrow \pi$, на концах сегмента $\alpha(t, y) \uparrow \frac{\pi}{2}$, а вне сегмента $\alpha(t, y) \downarrow 0$. Переходя в (1.12) к пределу при $y \downarrow 0$, получаем

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_a^b v(x+iy)\,dx = \mu_1(b) - \mu_1(a), \tag{1.13}$$

где $\mu_1(x) = \frac{1}{2}\Big\{\mu_1(x+0) + \mu_1(x-0)\Big\}$.

По симметрии аналогичное равенство имеет место и при $y \uparrow 0$. Поэтому при любом вещественном x_0 и достаточно малом $\delta > 0$ имеем неравенство

$$\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} v(x_0+t+iy)\,dt\,dy < 2\delta\,[\mu_1(x_0+\delta) - \mu_1(x_0-\delta) + 1] \overset{\text{def}}{=} M(x_0, \delta),$$

из которого следует

$$v(x_0) \leqslant \frac{1}{\pi\delta^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} v(x_0+\rho e^{i\psi})\,\rho\,d\rho\,d\psi < \frac{M(x_0, \delta)}{\pi\delta^2}.$$

Таким образом, функция $v(x)$ — конечна во всех точках вещественной оси*.

Замечание 1. Формула (1.10), очевидно, верна не только для мажоранты, но для любой положительной гармонической функции в полуплоскости $y > 0$. Если при этом гармоническая функция

* Если класс K_φ не симметричен, то, как видно из приведенных рассуждений, конечность мажоранты получается, если потребовать, чтобы она была конечна в двух точках: $z_1 \in C_+$ и $z_2 \in C_-$.

непрерывно продолжается на вещественную ось, то в силу (1.13) формула (1.10) принимает вид

$$v(z)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt+\sigma_+ y. \qquad (1.14)$$

Если же, кроме того, функция $v(z)$ непрерывно продолжается в C_- и является в нижней полуплоскости положительной гармонической функцией, то при $z\in C_-$

$$v(z)=-\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt-\sigma_- y \ \blacktriangle \qquad (1.14')$$

Замечание 2. Если мажоранта класса K_φ^σ конечна при каком-нибудь $\sigma_1>0$, то она конечна при любом $\sigma\geqslant 0$.

Действительно, при $\sigma<\sigma_1$ класс K_φ^σ у́же, чем класс $K_\varphi^{\sigma_1}$, и, следовательно, мажоранта этого класса не больше, чем мажоранта класса $K_\varphi^{\sigma_1}$. Если же $\sigma>\sigma_1$, то, умножая все функции класса $K_\varphi^{\sigma_1}$ на число $\lambda=\sigma/\sigma_1>1$, получим весь класс функций $K_{\lambda\varphi}^\sigma$. Мажоранта этого класса, очевидно, получается умножением на λ мажоранты $v(z)$ класса $K_\varphi^{\sigma_1}$. Но всякая функция класса K_φ^σ входит в класс $K_{\lambda\varphi}^\sigma$. Поэтому мажоранта этого класса $v(z,\ K_\varphi^\sigma)\leqslant\lambda v(z,\ K_\varphi^{\sigma_1})$ и, следовательно, конечна ■

1.2. Представление мажоранты и условия ее конечности. Для дальнейшего исследования свойств мажорант нам понадобится несколько обобщить теорему М. Г. Крейна [5].

Пусть $f(z)$ — целая функция и $g(z)=\ln|f(z)|$ имеет положительные гармонические мажоранты в C_+ и C_-. Тогда $f(z)$ является функцией конечной степени и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_+(x)}{1+x^2}\,dx<\infty. \qquad (1.14'')$$

Здесь, как обычно, $g_+(z)=\max(g(z),\ 0)$. Обобщение состоит в том, что вместо специальной субгармонической функции $\ln|f(z)|$ мы рассмотрим произвольные субгармонические функции $g(z)$. Для получения этого обобщения воспользуемся следующим хорошо известным представлением функции $g(z)$, субгармонической в полуплоскости C_+ и допускающей в этой полуплоскости положительную гармоническую мажоранту:

$$g(z)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu(t)}{|t-z|^2}+\iint_{C_+}\ln\left|\frac{\zeta-z}{\bar\zeta-z}\right|d\nu(\zeta)+\sigma y, \qquad (1.15)$$

где $d\mu(t)$ и $d\nu(\zeta)$ — меры, удовлетворяющие условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty, \quad \iint_{C_+} \frac{\eta d\nu(\zeta)}{1+|\zeta|^2} < \infty, \quad (\zeta = \xi + i\eta)^*,$$

а σ — некоторая вещественная постоянная. Кроме того, будет использована следующая теорема У. Хеймана.

Теорема 1.3. *Если функция $g(z)$ допускает в полуплоскости C_+ представление* (1.15) *при $\sigma = 0$, то всюду в полуплоскости C_+ (кроме, быть может, некоторых исключительных кружков $\{c_j\}$) имеет место асимптотическое равенство*

$$|g(z)| = o(|z|). \tag{1.16}$$

*Множество исключительных кружков $\{c_j\}$ таково, что ряд, составленный из углов $\{\varphi_j\}$, под которыми эти кружки видны из начала координат, сходится*** ▲

Такое множество кружков назовем «множеством конечного обзора».

Теорема 1.4. *Если функция $g(z)$ — субгармоническая во всей плоскости и имеет положительные гармонические мажоранты в C_+ и C_-, то она конечной степени и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{1+t^2} dt < \infty. \tag{1.17}$$

Кроме того, вне некоторого множества кружков $\{c_j\}$ конечного обзора имеют место асимптотические оценки

$$\begin{gathered} g(z) = \sigma_+ y + o(|z|), \ y > 0; \\ g(z) = -\sigma_- y + o(|z|), \ y < 0, \end{gathered} \tag{1.18}$$

где σ_+ и σ_- соответственно степени $g(z)$ в C_+ и C_-, а $\max(\sigma_+, \sigma_-)$ — степень функции $g(z)$ в C ▲

Доказательство. Из теоремы У. Хеймана и В. С. Азарина непосредственно следует, что выполняется (1.18) при некоторых постоянных σ_+ и σ_- вне множества кружков конечного обзора. Применяя принцип максимума к функции $g(z)$ в областях, покрытых этими кружками, легко убедиться в том, что $g(z)$ конечной степени, причем степень ее в C_+ равна σ_+, а в C_- равна σ_-. Для доказательства сходимости интеграла (1.17) заметим, что функция $g_+(z)$ имеет те же положительные гармонические мажоранты в C_+ и C_-, что и функция $g(z)$. Пусть $\tilde{g}(z)$ — положительная гармоническая мажоранта функции $g(z)$ в C_+ и в C_-. Очевидно, что при

---

* Это представление можно получить с помощью отображения полуплоскости C на единичный круг и теоремы о представлении в единичном круге субгармонической функции, имеющей положительную гармоническую мажоранту.

** В статье [6] доказано несколько меньше, а именно, что асимптотическое равенство (1.16) выполняется при всех $z \in C_+$, но $|z| \notin E$, где E — множество конечной логарифмической длины, т. е. $\int_E x^{-1}\, dx < \infty$. Приведенный здесь более совершенный вариант теоремы установлен в [7].

$z \in C_+$, функция $\tilde{g}(z+\tau)$ положительная гармоническая от τ, непрерывно продолжающаяся на вещественную ось, и, следовательно, по замечанию 1 к теореме 1.2

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{g}(z+\tau)}{1+\tau^2}d\tau = \tilde{g}(z+i)-\sigma_+.$$

Отсюда при любом $z \in C_+$ и $R>0$ имеет место неравенство

$$g_+^R(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{g_+(z+\tau)}{1+\tau^2}d\tau < \tilde{g}(z+i)-\sigma_+. \tag{1.19}$$

Аналогичное неравенство имеет место при $z \in C_-$. Введя обозначение

$$g_{+h}(z) = \frac{1}{\pi h^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{h} g_+(z+\rho e^{i\theta})\rho d\rho d\theta \tag{1.20}$$

и применив эту операцию усреднения к предыдущему неравенству, получим

$$g_{+h}^R(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{g_{+h}(\tau)}{1+\tau^2}d\tau < \tilde{g}_h(i)+\tilde{g}_h(-i). \tag{1.21}$$

Из субгармоничности $g_+(z)$ следует, что $g_{+h}(z)\downarrow g_+(z)$ при $h\downarrow 0$, и поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{g_+(\tau)}{1+\tau^2}d\tau \leqslant \tilde{g}(i)+\tilde{g}(-i).$$

Для получения (1.17) достаточно перейти к пределу при $R\to\infty$ ■

Из теоремы 1.2 и 1.4 непосредственно следует факт, который ввиду его важности выделим как теорему.

Теорема 1.5. *Если класс субгармонических функций K_φ имеет конечную мажоранту, то он входит в некоторый класс K_φ^σ* ▲

Действительно, если мажоранта $v(z, K_\varphi)$ конечна, то она является субгармонической функцией, удовлетворяющей условиям теоремы 1.4. Поэтому $v(z, K_\varphi)$ конечной степени, а, следовательно, и мажорируемые ею функции тоже конечной степени, не превосходящей степени σ функции $v(z, K_\varphi)$ ■

В дальнейшем будут указаны некоторые необходимые и достаточные условия конечности мажоранты. Предварительно сделаем следующее

Замечание. Из (1.21) следует, что при выполнении условий теоремы 1.4 непрерывная во всей плоскости субгармоническая функция $g_{+h}(z)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_{+h}(t)}{1+t^2}dt < \infty. \tag{1.22}$$

Кроме того, очевидно, что $g_{+h}(z)$ конечной степени σ ▲

Это замечание будет использовано для того, чтобы получить представление наилучшей гармонической мажоранты в C_+ (и C_-) функции $g(z)$.

Теорема 1.6. *Наилучшая положительная гармоническая мажоранта в C_+ и C_- функции $g(z)$, удовлетворяющей предположениям теоремы 1.4, имеет вид*

$$\tilde{g}(z) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{|t-z|^2}\, dt + \sigma |y|, \tag{1.23}$$

*где σ — степень функции $g(z)$** ▲

Доказательство. По функции $g_{+h}^{(z)}$ построим гармоническую в C_+ функцию

$$\tilde{g}_h(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{+h}(t)}{|t-z|^2}\, dt + \sigma y,$$

которая существует в силу условия (1.22). По теореме У. Хеймана для нее верна асимптотическая формула $\tilde{g}_h(z) = \sigma|y| + o(|z|)$ всюду вне множества кружков «конечного обзора». Кроме того, на вещественной оси функции $\tilde{g}_h(z)$ имеет предельные значения и $\tilde{g}_h(z) = g_{+h}(z)$. Рассмотрим разность $w_\varepsilon(z) = g_{+h}(z) - \tilde{g}_h(z) - \varepsilon y$, которая является субгармонической функцией в C_+, принимающей всюду на вещественной оси значение нуль. Она ограничена сверху на оси OY. Применяя теорему Фрагмена — Линделефа в каждом из квадрантов $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, получим, что $w_\varepsilon(z) \leqslant M \leqslant \infty$ при $z \in C_+$. Еще раз применяя теорему Фрагмена — Линделефа в полуплоскости $y \geqslant 0$, получаем, что $w_\varepsilon(z) \leqslant 0$, $z \in C_+$, т. е. $g_{+h}(z) \leqslant \tilde{g}_h(z) + \varepsilon y$ и, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $g_{+h}(z) \leqslant \tilde{g}_h(z)$. Очевидно, что $\tilde{g}_h(z)$ есть наилучшая гармоническая мажоранта функции $g_{+h}(z)$. При $h \downarrow 0$ обе функции в этом неравенстве монотонно убывают и, переходя к пределу, получаем с помощью теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$g_+(z) \leqslant \tilde{g}(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{|t-z|^2}\, dt + \sigma y.$$

Аналогичная формула в нижней полуплоскости получается точно так же ■

При доказательстве теоремы 1.6 было использовано собственно не существование в C_+ положительной гармонической мажоранты у функции $g(z)$, а лишь вытекающие из этого предположения факты

---

* Предполагаем $\sigma_+ = \sigma_- = \sigma$, что не нарушает общности. Можно получить это равенство, прибавив к $g(z)$ функцию $\frac{1}{2}(\sigma_- - \sigma_+)\, y$. Из (1.18) следует, что $\sigma \geqslant 0$.

существования интеграла (1.14) и принадлежности функции $\tilde{g}(z)$ к функциям конечной степени. Поэтому справедливо замечание.

Замечание. Если субгармоническая функция $g(z)$ имеет конечную степень σ и выполнено условие (1.14″), то

$$g(z) \leqslant \frac{|y|}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{|t-z|^2}\, dt + \sigma |y|, \tag{1.24}$$

причем правая часть совпадает в C_+ и в C_- с наилучшей неотрицательной гармонической мажорантой функции $g(z)$ ▲

Теорема 1.7. *Если мажоранта $v(z)$ симметричного класса* K_φ конечна, то она имеет представление*

$$v(z) = \frac{|y|}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{|t-z|^2}\, dt + \varkappa |y|, \tag{1.25}$$

где $\varkappa = \operatorname{Inf}\sigma$, *при которых* $K_\varphi \subset K_\varphi^\sigma$ ▲

Доказательство. Функция $v(z)$ — неотрицательная, субгармоническая во всей плоскости и сама является своей гармонической мажорантой в C_+ и C_-. По теореме 1.6 она представляется в форме

$$v(z) = \frac{|y|}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{|t-z|^2}\, dt + \sigma_v |y|, \tag{1.26}$$

где σ_v — степень функции $v(z)$.

Отсюда следует, что все функции класса K_φ имеют степень, не превосходящую σ_v, т. е. $K_\varphi \subseteq K_\varphi^{\sigma_v}$ и, следовательно, $\varkappa \leqslant \sigma_v$. Пусть теперь $K_\varphi \subseteq K_\varphi^\sigma$ при некотором $\sigma \geqslant 0$. Тогда все функции этого класса удовлетворяют неравенству $g(z) \leqslant v(z, K_\varphi^\sigma)$.

Беря supremum в левой части и регуляризируя, получаем

$$v(z, K_\varphi) \leqslant v(z, K_\varphi^\sigma) = \frac{|y|}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t, K_\varphi^\sigma)}{|t-z|^2}\, dt + \sigma |y|$$

и, следовательно, $\sigma_v \leqslant \varkappa$. Итак, $\sigma_v = \varkappa$ ■

Замечание. Если симметричная мажоранта $v(z)$ класса K_φ конечна, то всюду в плоскости верно асимптотическое при $|z| \to \infty$ равенство

$$v(z) = \varkappa |y| + o(|z|) \ ▲ \tag{1.28}$$

---

* Если класс K_φ не симметричен, то в представлении (1.25) будут, вообще говоря, различные постоянные $\varkappa_\pm$ в C_+ и C_-. В этом случае функция $v_1(z) = v(z) - \frac{1}{2}(\varkappa_+ - \varkappa_-)\, y$ симметрична, т. е. $v_1(z) = v_1(\bar{z})$, и является мажорантой для симметричного класса, состоящего из функций $\frac{1}{2}[g_1(z) + g_1(\bar{z})]$, где $g_1(z) = g(z) - \frac{1}{2}(\varkappa_+ - \varkappa_-)\, y$ при $g(z) \in K_\varphi$.

Доказательство. Из представления (1.25) и теоремы 1.3 следует, что асимптотическое равенство (1.28) имеет место во всей плоскости, за исключением, быть может, множества кружков «конечного обзора». По принципу максимума и минимума для гармонической функции отсюда следует, что равенство (1.28) имеет место вне исключительных кружков, пересекающих вещественную ось. Применяя в этих оставшихся кружках принцип максимума к субгармонической функции $v(z)$, получим, что в них имеет место неравенство $v(z) \leqslant o(|z|)$.

Так как, с другой стороны, $v(z) \geqslant 0$, то на этом множестве кружков имеем равенство $v(z) = o(|z|)$, которое совпадает с (1.28) ■

Перейдем теперь к критериям конечности мажоранты.

Теорема 1.8*. *Для того чтобы мажоранта $v(z)$ класса K_φ субгармонических функций была конечна, необходимо и достаточно, чтобы степени функций класса были ограничены в совокупности и выполнялось условие*

$$M = \sup_{g \in K_\varphi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{1+t^2} dt \right\} < \infty \ \blacktriangle \tag{1.30}$$

Доказательство. Необходимость первого условия следует из теоремы 1.5. Кроме того, если мажоранта $v(z)$ — конечна, то каждая из функций класса K_φ имеет положительную гармоническую в C_+ (и C_-) мажоранту $\tilde{g}(z) \leqslant v(z)$. Но по теореме 1.6

$$\tilde{g}(i) - \sigma \geqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{1+t^2} dt \geqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{1+t^2} dt,$$

и поэтому для всех функций класса K_φ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{1+t^2} dt \leqslant v(i) - \sigma_v,$$

где σ_v — степень функции $v(z)$.

Достаточность непосредственно следует из замечания к теореме 1.6. Действительно, в силу (1.24) получаем при $0 < \delta < 1$ и $|z - i| < \delta$ оценку

$$g(z) \leqslant C_\delta \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_+(t)}{1+t^2} dt + \sigma \right) \leqslant C_\delta (M + \sigma),$$

в которой C_δ — постоянная. Таким образом, в δ-окрестности точки i имеется оценка $\hat{g}(z) \leqslant C_\delta (M + \sigma)$, из которой следует $v(i) \leqslant C_\delta (M + \sigma)$ ■

* Этот критерий аналогичен критерию Н. И. Ахиезера и С. Н. Бернштейна, относящемуся к вопросу о полноте множества полиномов в пространстве непрерывных функций с весом $\varphi(x)$ [8].

Замечание. Если функция $\varphi(t)$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}\, dt < \infty, \tag{1.31}$$

то выполняется условие (1.30). Таким образом, при ограниченности множества степеней функций класса K_φ, условие (1.31) является достаточным условием конечности мажоранты $v(z)$ ▲

Приведем еще один критерий конечности мажоранты.

Теорема 1.9*. *Для того чтобы мажоранта $v(z)$ класса K_φ была конечна, необходимо и достаточно, чтобы степени всех функций класса K_φ были ограничены в совокупности и выполнялось условие*

$$M_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(t)}{1+t^2}\, dt < \infty, \tag{1.32}$$

где $\hat{g}(z) = \sup\limits_{g \in K_\varphi} g(z)$ ▲

Доказательство. Заметим, прежде всего, что по теореме А. Картана всюду в плоскости, за исключением, быть может, множества нулевой емкости, $\hat{g}(z) = v(z)$. Поэтому в (1.32) M_φ не изменится, если заменить $\hat{g}(t)$ на $v(t)$.

Необходимость условия (1.32) следует из представления (1.26) мажоранты и получается подстановкой $z = i$. Ограниченность всех степеней функций класса K_φ следует из теоремы 1.5.

Достаточность получается, если заметить, что из (1.32) следует (1.30) ■

Кривую $y = \hat{g}(x)$ будем называть оболочкой кривой $y = \varphi(x)$ для класса K_φ.

Замечание 1. Если $\varphi(x)$ — выпуклая функция от $\ln|x|$, а класс K_φ содержит все линейные функции от $\ln|z|$, подчиненные условию (1.2), то оболочка кривой $y = \varphi(x)$ совпадает с $\varphi(x)$**.

Для доказательства проведем в произвольной точке с абсциссой x_0 кривой $y = \varphi(x)$ опорную прямую $y = k\ln|x| + l$. Функция $g(z) = k\ln|z| + l$ принадлежит K_φ, и в точке x_0 имеем $g(x_0) = \varphi(x_0)$. Поэтому $\hat{g}(x) = \varphi(x)$ всюду на $\mathbf{R}$.

Из этого замечания и теоремы 1.9 непосредственно следует

Замечание 2. Если функция $\varphi(x)$ и класс K_φ удовлетворяют условиям замечания *1* и $K_\varphi \subseteq K_\varphi^\sigma$ при некотором $\sigma \geqslant 0$, то условие (1.31) является необходимым и достаточным для конечности мажоранты $v(z, K_\varphi)$ ▲

Из определения функции $\hat{g}(z)$, конечно, следует, что $\hat{g}(x) \leqslant \varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$. Однако после регуляризации неравенство $v(x) \leqslant \varphi(x)$ выполняется не обязательно даже в случае конечности мажоранты $v(z)$. Поэтому представляет интерес следующая теорема.

---

* Эта теорема аналогична теореме С. Н. Мергеляна о мажоранте Холла [9].

** Очевидно, в этом случае $\varphi(x)$ — четная функция от x.

Теорема 1.10. *Если мажоранта $v(z)$ класса K_φ конечна и функция $\varphi(x)$ — полунепрерывная сверху в некоторой точке x_0, то $v(x_0) \leqslant \varphi(x_0)$* ▲

Доказательство. Из полунепрерывности сверху функции $\varphi(x)$ следует, что при любом $\varepsilon > 0$ в некотором интервале $|x - x_0| < \delta$, $(\delta = \delta(\varepsilon))$ выполняется неравенство $\varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon$. Из равенства (1.25) легко получается, что все функции $g(z) \in K_\varphi^\sigma$ удовлетворяют следующей оценке:

$$g(z) \leqslant \frac{|y|}{\pi} \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\varphi(x_0) + \varepsilon}{|t - z|^2} dt + \frac{|y|}{\pi} \int\limits_{|t-x_0|>\delta} \frac{v(t)}{|t - z|^2} dt + \sigma |y|.$$

В круге $|z - x_0| < \gamma$ при γ достаточно малом сумма всех слагаемых, кроме первого, меньше ε, и, следовательно, в этой окрестности $g(z) < \varphi(x_0) + 2\varepsilon$. Поэтому $\hat{g}(z) \leqslant \varphi(x_0) + 2\varepsilon$ и $v(x_0) = \lim\limits_{\gamma \to 0} \sup\limits_{|z-x_0|<\gamma} \times$ $\times\, g(z) \leqslant \varphi(x_0) + 2\varepsilon$. Отсюда, конечно, следует $v(x_0) \leqslant \varphi(x_0)$ ■

Обратим внимание на важное следствие из этой теоремы.

Следствие. *Если функция $\varphi(x)$ полунепрерывна сверху всюду, где она конечна, и если мажоранта $v(z)$ класса K_φ^σ конечна, то $v(z) \in K_\varphi^\sigma$* ▲

Заметим, что требование полунепрерывности сверху функции $\varphi(x)$ существенно. Действительно, если выбрать $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = 1$ при $0 < |x| < 1$ и $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$ при $|x| > 1$, то условие (1.31) будет выполнено, и функция $v(z)$ конечна. Кроме того, субгармонические функции $g(z) = |z|^\alpha$, $\left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$, очевидно, принадлежат K_φ^σ при любом $\sigma \geqslant 0$. Устремляя α к нулю, получаем, что в области $0 < |z| \leqslant 1$ выполняется равенство $g(z) = 1$ и, следовательно, $v(0) = 1$, в то время как $\hat{g}(0) = 0$.

В дальнейшем нам понадобится теорема более сильная, чем теорема 1.10. Для того чтобы ее сформулировать, введем понятие о регулярной точке множества.

Пусть E — некоторое замкнутое множество на вещественной оси. Точка $x_0 \in E$ называется регулярной точкой этого множества, если существует такой круг $K_\delta(x_0) = \{z : |z - x_0| < \delta\}$, что на множестве $K_\delta(x_0) \setminus E$ имеется гармоническая функция $\gamma(z)$, принимающая предельное значение, равное единице на окружности $C_\delta(x_0) = \{z : |z - x_0| = \delta\}$, и предельное значение, равное нулю в точке x_0, притом такая, что $0 < \gamma(z) < 1$*.

Теорема 1.11. *Пусть функция $\varphi(x)$ конечна на некотором замкнутом множестве E, пусть все лебеговы множества $E_\varepsilon(x_0) = \{x : \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon\}$, $(\varepsilon > 0)$ замкнуты и точка x_0 является*

---

* Это определение эквивалентно тому, которое обычно принимается в теории потенциала.

регулярной точкой каждого такого множества. Если при этом мажоранта $v(z)$ класса K_φ конечна, то $v(x_0) \leqslant \varphi(x_0)$ ▲

Доказательство. Из полунепрерывности функции $v(z)$ сверху следует, что она ограничена сверху на любом компакте. Поэтому $\sup\limits_{z \in C_\delta(x_0)} v(z) = M_\delta < \infty$. Так как x_0 является регулярной точкой множества $E_\varepsilon(x_0)$, то существует гармоническая в $\Omega_{\delta,\varepsilon} = K_\delta(x_0) \setminus E_\varepsilon(x_0)$ функция $\gamma_{\varepsilon,M}(z)$, принимающая в точке x_0 значение $\varphi(x_0) + \varepsilon$, на окружности $C_\delta(x_0)$ значение M_δ и всюду в области $\Omega_{\delta,\varepsilon}$ $\varphi(x_0) + \varepsilon < \gamma_{\varepsilon,M}(z) < M_\delta$. Эта функция мажорирует на $E_\varepsilon(x_0)$ и на $C_\delta(x_0)$ любую функцию класса K_φ, и поэтому всюду в $\Omega_{\delta,\varepsilon}$ имеем $g(z) \leqslant \gamma_\varepsilon(z)$. Отсюда получается, что $\hat{g}(z) \leqslant \gamma_\varepsilon(z)$ и, следовательно, $v(x_0) \leqslant \gamma_\varepsilon(x_0) = \varphi(x_0) + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем нужное неравенство ■

Следствие 1. *Если функция $\varphi(x)$ конечна на замкнутом множестве E и полунепрерывна сверху на этом множестве в некоторой регулярной точке x_0 этого множества, а мажоранта $v(z)$ конечна, то $v(x_0) \leqslant \varphi(x_0)$* ▲

Действительно, из полунепрерывности функции $\varphi(x)$ сверху в точке x_0 следует, что на некотором отрезке $I_\delta = \{x : |x - x_0| \leqslant \delta\}$ множества $E_\varepsilon(x_0)$ и E совпадают, т. е. выполняются условия теоремы 1.11.

Следствие 2. *Если функция $\varphi(x)$ конечна и полунепрерывна снизу в каждой точке замкнутого множества E и некоторая точка x_0 является регулярной для всех лебеговых множеств $E_\varepsilon(x_0)$, то в этой точке $v(x_0) \leqslant \varphi(x_0)$* ▲

Для доказательства достаточно заметить, что лебеговы множества $E_\varepsilon(x_0)$ полунепрерывной снизу функции замкнуты, и сослаться на теорему 1.11 ■

В заключение этого раздела заметим, что вместо мажорант классов K_φ можно рассматривать мажоранты каких-нибудь подклассов K_φ^σ, например, подкласс функций вида $g(z) = \ln|E(z)|$, где $E(z)$ — целая функция конечной степени $\leqslant \sigma$. Назовем этот класс $K_\varphi^\sigma(E)$.

Следующий пример указывает на различие между мажорантами класса K_φ^σ и класса $K_\varphi^\sigma(E)$. Пусть $\{x_n\}_0^\infty$ — последовательность вещественных чисел и $x_n \to \infty$. Пусть $\varphi(x_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\varphi(x) = +\infty$ при $x \neq x_n$. Можно считать, что числа x_n перенумерованы в порядке возрастания их модулей. Тогда ряд

$$g(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{2^n} \ln\left|1 - \frac{z}{x_n}\right|$$

сходится при всех $z \neq x_n$, представляет субгармоническую функцию и $g(z) \leqslant 0$ $(\ln|z|)$. При $N > 0$ функция $g_N(z) = N g_+(z) \in K_\varphi^\sigma$ при любом $N > 0$. Очевидно, что $g_N(i) > 0$ и, в силу произвольности $N > 0$, можно утверждать, что $v(z) \equiv \infty$.

Если же рассматривать класс $K_{\varphi}^{\sigma}(E)$ при $x_{2n}=n$, $x_{2n+1}=-n$ $(n=0, 1, \ldots)$ и $\sigma<\pi$, то по известной теореме М. Картрайт* из неравенств $|E(x_n)|\leqslant 1$ следует $|E(x)|\leqslant c(\sigma)<\infty$ при $-\infty<x<<\infty$ и, как легко видеть, из неравенства $v_{\varphi,\varepsilon}^{\sigma}(z)\leqslant \ln c(\sigma)+\sigma|y|$ следует конечность мажоранты $v_{\varphi,\varepsilon}^{\sigma}(z)$ для класса $K_{\varphi}^{\sigma}(E)$.

Интересно еще сравнить мажоранту $v_{\varphi,\varepsilon}^{\sigma}(E)$ с мажорантой Холла [9] $M_{\varphi}(z)=v_{\varphi,\rho}(z)$, где за подкласс $K_{\varphi,p}$ выбраны функции вида $\ln|P(z)|$ ($P(z)$ — полином).

Выберем для этого сравнения функцию $\varphi(x)$ так: $\varphi(2^n)=0$ и $\varphi(x)=+\infty$ при $x\neq 2^n$, $n=0, 1, \ldots$. Тогда весь класс $K_{\varphi,p}$ состоит из одной функции $P(x)\equiv 0$ и $M_{\varphi}(z)=0$. С другой стороны, выбрав целую функцию

$$E(z)=\prod_{0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2^n}\right)$$

нулевой степени ($\sigma=0$), убедимся в том, что при любом натуральном N функция $N\ln^{+}|E(z)|\in K_{\varphi}^{0}(E)$. Из произвольности натурального N следует, что $v_{\varphi,E}^{0}(z)\equiv\infty$. Более тонкий пример принадлежит И. О. Хачатряну [10], который показал, что при $\varphi(x)=x^{\rho_1}$ $(x\geqslant 0)$, $\varphi(x)=x^{\rho_2}$ $(x<0)$ и $0<\rho_1<\frac{1}{2}<\rho_2<1$ обе мажоранты $v_{\varphi,E}^{0}(z)$ и $v_{\varphi,p}(z)$ конечны, но не совпадают.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И., Левин Б. Я.* Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М., 1960. С. 125—183. 2. *Левин Б. Я.* Субгармонические мажоранты и их приложения // Тез. докл. на Всесоюз. конф. по теории функций. ФТИНТ АН УССР. 1971. С. 117—120. 3. *Левин Б. Я.* Мажоранты в классах субгармонических функций и их приложения. Х., 1984. С. 1—52. (Препринт ФТИНТ 18—84 и 19—84). 4. *Кусис П.* La plus petite magorante Surharmonique // Annales de l'Institute Fourier de Grenoble. 1983. **33**. S. 110—118. 5. *Крейн М. Г.* Основные положения теории представления операторов с индексом дефекта (m, m) // Укр. мат. журн. 1949. **2**, № 1. С. 3—65. 6. Хейман У. Questions of regularity connected with the phragmen — Lindelöf prinziple // J. Math. Pures et appl. 1956. **35**, № 2. P. 1—123. 7. *Азарин В. С.* Обобщение одной теоремы Хеймана на субгармонические функции в n-мерном конусе // Мат. сб. 1965. **66 (108)**, № 2. С. 248—264. 8. *Ахиезер Н. И.* О взвешенном приближении непрерывных функций на всей числовой оси // Успехи мат. наук. 1956. № 4. С. 3—43. 9. *Мергелян С. Н.* Весовые приближения многочленами // Успехи мат. наук. 1956. **11**, № 5. С. 107—152. 10. *Хачатрян И. О.* О взвешенном приближении целых функций нулевой степени полиномами на действительной оси // Уч. зап. Харьк. ун-та, мех.-мат. ф-т. 1963. Сер. 4. 135. Вып. 29. С. 129—142. 11. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с.

Поступила в редколлегию 27.01.88

* См., например, [11]. С. 269—271.