УДК 517.11

Т. С. КУДРИК

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСТАНДАРТНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

В этой статье исследуются задача Коши, краевая задача и задача на собственные значения для нестандартного разностного оператора конечного порядка на конечном промежутке. (Рассматриваются функции действительного переменного, последовательные значения которого отличаются на бесконечно малую величину.) Мы используем нестандартный анализ в форме Э. Нельсона (см. [1—4]).

1. Пусть $p,\ h \in \boldsymbol{R},\ h > 0,\ h \approx 0,\ \omega \in \boldsymbol{N},\ q := p + \omega h$ ($\approx$ — отношение бесконечной близости, $h \approx 0$ означает, что $|h| < \varepsilon$ для произвольного стандартного действительного числа $\varepsilon > 0$). Множество $\overline{pq} := \{p, p + h, \ldots, q - h, q\}$ называем дискретным промежутком с концами p, q. Через $H(\overline{pq})$ обозначаем (внешнее) множество всех

внутренних функций, заданных на $\overline{pq}$, со значениями в $\boldsymbol{C}$. $H(\overline{pq})$ трактуем как гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$\forall g, f \in H(\overline{pq})\ (f \mid g) := h \sum_{x \in \overline{pq}} f(x)\overline{g(x)}$$

размерности $(q-p)h^{-1}+1$. Считаем, что p и $q+h$ — стандартны, поэтому $^{\circ}p = p$, $^{\circ}q = q+h$ и дискретному промежутку $\overline{pq}$ отвечает стандартный промежуток $[p, q+h]$ (здесь $^{\circ}p$ — тень числа p; тень конечного нестандартного числа a — это такое единственное стандартное число $^{\circ}a$ (в $\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$), что $a \approx {}^{\circ}a$). Для произвольной функции $y \in H(\overline{pq})$ обозначаем $\Delta y(x) := \frac{y(x)-y(x-h)}{h}$, $\Delta^k y(x) := \Delta(\Delta^{k-1}y(x))$, считая, что $y(p-(n-1)h) = \cdots = y(p-h) = 0$. Пусть $ly(x) := \Delta^n y(x) + p_1(x)\Delta^{n-1}y(x) + \cdots + p_n(x)y(x)$, $x \in \overline{pq}$, где n — конечное натуральное число; p_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ — внутренние функции, заданные на $\overline{pq}$.

Приведем некоторые определения, необходимые для понимания дальнейшего изложения.

Функция $f \in H(\overline{pq})$ называется стандартно ограниченной, если существует такое стандартное число $C > 0$, что $\forall x \in \overline{pq}\ |f(x)| < C$.

Функция $f \in H(\overline{pq})$ называется стандартно непрерывной на $\overline{pq}$, если $\forall x, x' \in \overline{pq}\ \ x \approx x' \Rightarrow f(x) \approx f(x')$.

По определению, $H[p, q+h]$ — стандартное пространство $L_2(p, q+h)$.

Функция $f \in H(\overline{pq})$ называется околостандартной, если существует стандартная функция $f_0 \in H[p, q+h]$ такая, что $\| f - f_0 \| \approx 0$|, здесь под f подразумевается естественное продолжение функции f из дискретного промежутка $\overline{pq}$ до ступенчатой функции на сплошном промежутке $[p, q+h]$). При этом f_0 обозначается $^{\circ}f$ и называется тенью f.

Функция $f \in H(\overline{pq})$ называется слабо околостандартной, если существует стандартная функция $f_0 \in H[p, q+h]$ такая, что для каждой стандартной функции $g \in H[p, q+h]$ $(f - f_0 \mid g) \approx 0$. Функция f_0 называется слабой тенью f и обозначается ^{w0}f.

Пусть даны функция $g \in H(\overline{pq})$, точка $x_0 \in \overline{p+(n-1)h, q}$ и числа $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \boldsymbol{C}$. Линейной дискретной задачей Коши называем задачу определения функции $y \in H(\overline{pq})$ такой, что

$$\begin{cases} ly(x) = g(x), \ x \in \overline{pq} \\ \Delta^j y(x_0) = y_j, \ j \in n = \{0, 1, \ldots, n-1\}. \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, что функции p_i стандартно непрерывны и стандартно ограничены на $\overline{pq}$.

Теорема 1. *Пусть y — решение задачи (1), где g — функция с конечной нормой, а числа $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ — околостандартные. Тогда функция y околостандартна, а ее тень $^{\circ}y$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка $n-1$ на промежутке*

$[p, q+h]$ *и функция* $°y$ *является решением обычной задачи Коши:*

$$\begin{cases} \dfrac{d^n}{dt^n}\,°y(t) + °p_1(t)\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\,°y(t) + \cdots + °p_n(t)\,°y(t) = {}^{w0}g(t), \\ \dfrac{d^j}{dt^j}\,°y(°x_0) = °y_j, \ j \in n. \end{cases}$$

2. Перейдем к краевой задаче для разностного уравнения n-го порядка. Обозначим через $U_i y$ краевую форму вида:

$$\alpha_0^i y_{p_1} + \cdots + \alpha_{n-1}^i \Delta^{n-1} y_{p_1} + \beta_0^i y_q + \cdots + \beta_{n-1}^i \Delta^{n-1} y_q,$$

где $\alpha_r^i, \beta_r^i \in \boldsymbol{C}$ $(r \in n, \ i \in n)$, $p_1 := p + (n-1)h$.

Краевой задачей для разностного уравнения (или оператора) n-го порядка называем задачу определения функции $y \in H(\overline{pq})$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{cases} ly(x) = g(x), \ x \in \overline{p_1 q}, \\ U_i y = 0, \ i \in n \end{cases} \tag{2}$$

(эта задача — разностный аналог (при бесконечно малом шаге) краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора (см. [7])).

Обозначим через $e_0(x, x_0), e_1(x, x_0), \ldots, e_{n-1}(x, x_0)$ фундаментальную систему решений разностного уравнения $ly = 0$, удовлетворяющих условиям

$$\Delta^j e_i(x_0) = \begin{cases} 1 \text{ при } j = i, \\ 0 \text{ при } j \neq i, \end{cases} \quad (i, \ j \in n).$$

Отметим, что для разрешимости задачи (2) достаточно, чтобы

$$\det\Big[\alpha_i^j + \sum_{k \in n} \beta_k^j \Delta^k e_i(q, \ p_1)\Big] \neq 0.$$

Легко видеть, что решение y задачи (2) выражается формулой

$$y(x) = h \sum_{x' \in \overline{p_1 q}} G(x, \ x')\, g(x'), \tag{3}$$

где G — функция Грина задачи (2), которую можно выразить через фундаментальную систему решений следующим образом:

$$G(x, \ x') = \begin{cases} a_0(x')\, e_0(x, x') + \cdots + a_{n-1}(x')\, e_{n-1}(x, x'), \ \ p_1 \leqslant x \leqslant x', \\ b_0(x')\, e_0(x, x') + \cdots + b_{n-1}(x')\, e_{n-1}(x, x'), \ \ x \leqslant x \leqslant q. \end{cases}$$

Предположим опять, что функции p_i стандартно непрерывны и стандартно ограничены, а числа α_r^i, β_r^i — околостандартные, функция g имеет конечную норму. Пусть, кроме того,

$$\det\Big[°\alpha_i^j + \sum_{k \in n} °\beta_k^j \frac{d^k}{dt^k}\,°e_i(q+h, \ p)\Big] \neq 0.$$

Теорема 2. *Решение y задачи (2) околостандартно, его тень ${}^\circ y$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка $n-1$ на промежутке $[p, q+h]$ и является решением обычной краевой задачи:*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^n}{dt^n}{}^\circ y(t) + {}^\circ p_1(t)\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}{}^\circ y(t) + \cdots + {}^\circ p_n(t)\,{}^\circ y(t) = {}^{w0}g(t), \\ {}^\circ\alpha_0^i\,{}^\circ y(p) + \cdots + {}^\circ\alpha_{n-1}^i\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}{}^\circ y(p) + {}^\circ\beta_0^i\,{}^\circ y(q+h) + \\ + \cdots + {}^\circ\beta_{n-1}^i\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}{}^\circ y(q+h) = 0. \\ \qquad\qquad\qquad i\in n \end{array}\right. \tag{4}$$

Кроме того, околостандартной является функция Грина G задачи (2), а ее тень ${}^\circ G$ является функцией Грина задачи (4), т. е.

$$\forall t\in[p, q+h]\ {}^\circ y(t) = \int\limits_p^{g+h} {}^\circ G(t, s)\,{}^{w0}g(s)\,ds.$$

3. Теперь рассмотрим задачу на собственные значения для разностного уравнения n-го порядка: определить те $\lambda\in \boldsymbol{C}$, для которых существует функция $y\in H(\overline{pq})\diagdown\{0\}$ такая, что

$$\left\{\begin{array}{ll} ly(x) = \lambda y(x), & x\in\overline{p_1 q}; \\ U_i y = 0, & i\in n. \end{array}\right. \tag{5}$$

По формуле (3) имеем

$$y(x) = \lambda h \sum_{x'\in p_1 q} G(x, x')\,y(x').$$

Следовательно, собственные значения задачи (5) совпадают с собственными значениями оператора $\boldsymbol{T}$:

$$\forall f\in H(\overline{pq})\ \forall x\in\overline{p_1 q}\ Tf(x) = h\sum_{x'\in\overline{p_1 q}} G(x, x')\,f(x').$$

Определение. *Оператор $T: H(\overline{pq})\to H(\overline{pq})$ называется B_2-околостандартным, если околостандартно его ядро G,* т. е. если $\|G\| = (h^2\sum_{(x, y)\in\overline{pq^2}}|G(x, y)|^2)^{1/2} < \infty$.

Утверждение. Оператор T является B_2-околостандартным. Его тень — это интегральный оператор Фредгольма с ядром ${}^\circ G$:

$$\forall g\in H[p, q+h]\ \forall t\in[p, q+h]\ Sg(t) = \int\limits_p^{q+h} {}^\circ G(t, s)\,g(s)\,ds.$$

Используя результаты [5, 6], получаем следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть λ — ощутимое (т. е. не бесконечно малое) собственное значение задачи (5). Алгебраическая кратность m_λ этого собственного значения $\leqslant n$, а соответствующее ему* *корневое подпространство имеет базис из околостандартных функций. Тень* $°\lambda$ *является собственным значением задачи*

$$\begin{cases} °ly = °\lambda y, \\ °U_i y = 0, \ i \in n. \end{cases} \qquad (6)$$

Алгебраическая кратность собственного значения $°\lambda$ *задачи (6)* $\geqslant m_\lambda$, *а тень каждой околостандартной корневой функции задачи (5), отвечающей* λ, *является корневой функцией задачи (6), отвечающей* $°\lambda$.

Теорема 4. *Все конечные собственные значения задачи (6) стандартны.*

Теорема 5. *Пусть задача (6) имеет собственное значение* λ_0. *Тогда задача (5) имеет собственное значение* $\lambda \approx \lambda_0$. *Для кратностей* m_0 *и* m_λ *и спектральных проекторов* P_0 *и* P_λ, *отвечающих* λ_0 *и* λ, *выполняются соотношения (где* Λ — *множество всех собственных значений* $\lambda \approx \lambda_0$):

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda = m_0,$$

$$°\sum_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda H(\overline{pq}) = P_0 H[p, q + h],$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} °P_\lambda = P_0.$$

Список литературы: 1. *Nelson E.* Internal Set Theory: a New Approach to Nonstandard Analysis || Bull. Amer. Math. Soc. 1977. **83**, N 6. P. 1165—1198. 2. *Lutz R., Goze M.* Nonstandard Analysis. A Practical Guide || Lect. Notes in Math. 1981. **881**, № XIV. P. 1—261. 3. *Кутателадзе С. С.* Основы нестандартного математического анализа / Метод. указания. Новосибирск, 1986. 120 с. 4. *Лянце В. Э.* О нестандартном анализе / Мат. сегодня. Науч.-метод. сб. К., 1986. С. 26—44. 5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с. 6. *О функциях* дискретного переменного, II. Задача Коши и краевая задача / В. Э. Лянце, Т. С. Кудрик. К., 1978. 27 с. Деп. в УкрНИИНТИ 08.01.87, № 275 — Ук 87.

Поступила в редколлегию 18.09.87