УДК 517.547

И. В. КОВАЛИШИНА

КРАТНАЯ ГРАНИЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЖИМАЮЩИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

В настоящей статье рассматривается интерполяционная задача, которую можно трактовать как аналог степенной проблемы моментов для сжимающих матриц-функций в единичном круге.

Метод решения интерполяционных задач анализа, предложенный В. П. Потаповым [1, 2], в основу которого положена адекватность интерполяционной задачи заданию определенных объектов j-теории аналитических матриц-функций, позволяет и эту задачу связать с такими объектами j-теории, как кратная j-элементарная матрица-функция с полюсом ζ_0 на границе единичного круга ($|\zeta_0| = 1$) и произведение Бляшке — Потапова двучленных j-элементарных множителей.

Отметим, что такой подход к решению предлагаемой задачи целесообразен, так как дает возможность выразить общее решение через интерполяционные данные, в то время как использование для этой цели результатов исследования проблемы моментов и преобразования Кэли привело бы к значительному искажению исходных данных в записи общего решения задачи.

§ 1. Кратная граничная интерполяционная задача (SK)

1.1°. Формулируется задача следующим образом: пусть дана последовательность квадратных матриц m-го порядка $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ ($s_0 s_0^* = I$).

Требуется найти сжимающую в единичном круге ($|\zeta| < 1$) матрицу-функцию $S(\zeta)$ $I - S(\zeta) S^*(\zeta) \geqslant 0$ такую, для которой справедливы в граничной точке ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$) асимптотические соотношения:

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^k} [S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0) - \cdots - s_{k-1}(\zeta - \zeta_0)^{k-1}] = s_k$$

для $\forall\ k = 0, 1, 2, \ldots$*; установить критерии разрешимости; выяснить, когда проблема имеет единственное решение; в том случае, когда решений несколько, дать описание их совокупности.

1.2°. Рассмотрим сначала усеченную задачу. Усеченная задача представляет самостоятельный интерес. Она, в частности, возникает в связи с синтезом цепей с потерями методом Дарлингтона [3]. В работе [4] обсуждается и более общая задача, однако в ней отсутствуют алгебраические формулы, позволяющие находить резольвентную матрицу задачи непосредственно по исходным данным.

---

* Здесь и в дальнейшем ζ стремится к ζ_0 по любому некасательному пути.

Заметим еще, что задача для случая $n=1$ (не кратного) для интерполяционных условий в нескольких граничных точках в классе сжимающих матриц-функций решена в работе автора [2], а в классе j-нерастягивающих матриц-функций — в работе Е. Я. Меламуд [5].

Кратная усеченная задача (SK) формулируется так: пусть дана конечная последовательность квадратных матриц m-го порядка s_0, $s_1, \ldots, s_{2n-2}, s_{2n-1}$ $(s_0 s_0^* = I)$. Требуется найти сжимающую в единичном круге $(|\zeta| < 1)$ матрицу-функцию $S(\zeta)$ такую, для которой справедливы в граничной точке $\zeta_0 (|\zeta_0| = 1)$ асимптотические соотношения:

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^k} [S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0) - \cdots - s_{k-1}(\zeta - \zeta_0)^{k-1}] = \tilde{s}_k, \tag{1}$$

причем

$$\tilde{s}_k = s_k \text{ для } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-2 \tag{2}$$

и

$$(-1)^{n-1} \zeta_0^{2n-1} \tilde{s}_{2n-1} s_0^* \leqslant (-1)^{n-1} \zeta_0^{2n-1} s_{2n-1} s_0^*.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.1. *Для того чтобы матрица-функция $S(\zeta)$ была решением усеченной задачи (SK), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла основному матричному неравенству (ОМН)*

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S} & b(\zeta) S(\zeta) - c(\zeta) \\ \hline \mathbf{S}^*(\zeta) b^*(\zeta) - c^*(\zeta) & \dfrac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{array}\right] \geqslant 0, \ (SK),$$

где $\mathbf{S} = \hat{S} \cdot S_0 \cdot \hat{\hat{S}}$:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+1} \\ \sim & \sim & \sim & \sim \ \sim \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} \end{bmatrix} \quad (2);$$

$$S_0 = \begin{bmatrix} \zeta_0 I & -\zeta_0^2 I & \cdots & (-1)^{n-1}\zeta_0^n I \\ 0 & -\zeta_0^3 I & \cdots & (-1)^{n-1} C'_{n-1} \zeta_0^{n+1} I \\ \sim & \sim \ \sim & \sim \ \sim & \sim \ \sim \ \sim \ \sim \\ 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1}\zeta_0^{2n-1} I \end{bmatrix} \quad (3);$$

$$\hat{\hat{S}} = \begin{bmatrix} s_0^* & s_1^* & \cdots & s_{n-1}^* \\ 0 & s_0^* & \cdots & s_{n-2}^* \\ \sim & \sim \ \sim & \sim & \sim \ \sim \\ 0 & 0 & \cdots & s_0^* \end{bmatrix} \quad (4); \qquad b(\zeta) = \begin{bmatrix} \dfrac{I}{\zeta - \zeta_0} \\ \sim \ \sim \ \sim \\ \dfrac{I}{(\zeta - \zeta_0)^n} \end{bmatrix} \quad (5);$$

$$c(\zeta) = \hat{\hat{S}}^* b(\zeta) \quad (6).$$

Доказательство. *Необходимость.* Составим для сжимающей в $|\zeta| < 1$ матрицы-функции $S(\zeta)$ неравенство Шварца — Пика в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n, \zeta$:

$$H = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{I - S(z_k)S^*(z_e)}{1 - z_k\bar{z}_e} & \dfrac{S(z_k) - S(\zeta)}{z_k - \zeta} \\ \hline \dfrac{S^*(z_e) - S^*(\zeta)}{\bar{z}_e - \bar{\zeta}} & \dfrac{I - S^*(\zeta)S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{array}\right] \geqslant 0 \ (k,\ l = 1, \ldots, n)$$

и преобразуем его с помощью матрицы T: $THT^* \geqslant 0$, где

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \dfrac{I}{\varphi_1'(z_1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dfrac{I}{\varphi_2'(z_1)} & \dfrac{I}{\varphi_2'(z_2)} & \cdots & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \dfrac{I}{\varphi_n'(z_1)} & \dfrac{I}{\varphi_n'(z_2)} & \cdots & \dfrac{I}{\varphi_n'(z_n)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] = T, \qquad (7)$$

$$\varphi_k(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_k),$$

и перейдем к пределу при $z_k \to \zeta_0$. Элементы A_{kl} $(k,\ l = 1, 2, \ldots, n)$ информационного блока $\boldsymbol{S}$ предельной матрицы определяются по формулам

$$A_{kl} = \lim_{z_p,\ z_q \to \zeta_0} \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} \frac{1}{\varphi_k'(z_p)} \frac{I - S(z_p)S^*(z_q)}{1 - z_p\bar{z}_q} \frac{1}{\overline{\varphi_e'(z_q)}} =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!\,(l-1)!} \frac{\partial^{k+l-2}}{\partial\lambda^{k-1}\partial\mu^{l-1}} \left\{\frac{I - S(\lambda)S^*(\bar{\mu})}{1 - \lambda\mu}\right\} \begin{matrix} \lambda = \zeta_0 \\ \mu = \bar{\zeta}_0 \end{matrix}.$$

Отметим, что существенным моментом вычислений является преобразование частных производных $\partial^{k-1}\Phi/\partial\lambda^{k-1}$, $\partial^{l-1}\Phi/\partial\mu^{l-1}$ с помощью соотношений, вытекающих из тождества $S(\zeta)S^{-1}(\zeta) \equiv I$*, которые удобно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} s_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \zeta_0 s_1 & s_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \zeta_0^2 s_2 & \zeta_0 s_1 & s_0 & \cdots & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \zeta_0^n s_n & \zeta_0^{n-1} s_{n-1} & \zeta_0^{n-2} s_{n-2} & \cdots & s_0 \end{bmatrix} \times$$

---

* Не предполагая унитарности $S(\zeta)$ на дуге окружности в окрестности ζ_0, мы, однако, предполагаем, как обычно в J-теории, что $S(\zeta)$ подчиняется закону зеркальной симметрии, т. е. что для нее справедливо равенство $S^{-1}(\zeta) = S^*(\tilde{\zeta})$, $\tilde{\zeta} = \bar{\zeta}^{-1}$, $\forall\, |\zeta| < 1$.

$$
\begin{bmatrix}
s_0^* \\
-\bar{\zeta}_0 s_1^* \\
\bar{\zeta}_0 (s_1^* + \bar{\zeta}_0 s_2^*) \\
-\bar{\zeta}_0 (s_1^* + 2\bar{\zeta}_0 s_2^* + \bar{\zeta}_0^2 s_3^*) \\
\sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \\
(-1)^n \bar{\zeta}_0 (s_1^* + C'_{n-1}\bar{\zeta}_0 s_2^* + \cdots + \bar{\zeta}_0^{n-1} s_n^*)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sim \sim \\ 0
\end{bmatrix}. \tag{8}
$$

Заметим, что в матрице $\hat{S}$ правый нижний угловой элемент при вычислении получается равным $\tilde{s}_{2n-1}$. Заменяя его на s_{2n-1}, мы только усиливаем неравенство.

Для вычисления элементов $A_{k,n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ пользуемся формулой

$$
A_{k,\,n+1} = \lim_{z_p \to \zeta_0} \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{\varphi_k'(z_p)} \frac{S(\zeta) - S(z_p)}{\zeta - z_p} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \lambda^{k-1}} \left\{ \frac{S(\zeta) - S(\lambda)}{\zeta - \lambda} \right\}_{\lambda = \zeta_0}.
$$

Достаточность. Пусть теперь матрица-функция $S(\zeta)$ удовлетворяет ОМН (SK). Тогда, в силу неотрицательности блока

$$
\frac{I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \geqslant 0,
$$

$S(\zeta)$ является сжимающей в $|\zeta| < 1$. Более того, существование конечного углового предела $\lim\limits_{\zeta \to \zeta_0} \dfrac{I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} < +\infty$ [2] свидетельствует о том, что $S(\zeta)$ обладает в точке $\zeta_0\,(|\zeta_0| = 1)$ асимптотикой

$$
\lim_{\zeta \to \zeta_0} \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^k} [S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0) - \cdots - s_{k-1}(\zeta - \zeta_0)^{k-1}] = s_k
$$

для $\forall k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Для того чтобы убедиться в том, что ОМН (SK) содержит всю информацию об асимптотическом поведении $S(\zeta)$ в точке $\zeta_0\,(|\zeta_0| = 1)$, осуществим операцию «растяжения» ОМН.

С этой целью, умножая неравенство (SK) справа на Z_1, слева — на Z_1^*, где

$$
Z_1 = \begin{bmatrix} I & \hat{\hat{S}}^{-1} S_0^{-1} X_1 \\ 0 & \dfrac{1}{\zeta - \zeta_0} I \end{bmatrix}; \quad X_1 = \begin{bmatrix} -(\zeta - \zeta_0)^{-1} I \\ 0 \\ \sim \sim \sim \sim \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{9}
$$

приходим к новому неравенству:

$$
Z_1^* \begin{bmatrix} S & B \\ B^* & C \end{bmatrix} Z_1 =
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c}
S & \begin{matrix} (\zeta - \zeta_0)^{-2} [S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0)] \\ \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \\ (\zeta - \zeta_0)^{-(n+1)} [S(\zeta) - s_0 - \cdots - s_n(\zeta - \zeta_0)^n] \end{matrix} \\
\hline
\ast & C_1
\end{array}\right] \geqslant 0, \tag{10}
$$

эквивалентному ОМН, в котором предел нижнего углового элемента при $\zeta \to \zeta_0$ существует и равен

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} C_1 = -\bar{\zeta}_0^2 s_2^* s_0 + \bar{\zeta}_0^2 s_2^* s_1 - \bar{\zeta}_0^3 s_3^* s_0,$$

и поэтому справедливо равенство

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} (\zeta - \zeta_0)^{-n} [S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0) - \cdots - s_{n-1}(\zeta - \zeta_0)^{n-1}] = s_n.$$

Умножая неравенство (10) шаг за шагом справа на матрицы

$$Z_k = \begin{bmatrix} I & \hat{\hat{S}}^{-1} S_0^{-1} X_k \\ 0 & (\zeta - \zeta_0)^{-1} I \end{bmatrix}, \quad X_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \sim \sim \sim \sim \\ -(\zeta - \zeta_0)^{-1} I \\ \sim \sim \sim \sim \\ 0 \end{bmatrix} k,$$

$$k = 2, 3, \ldots, n-1,$$

слева — на Z_k^*, мы получим неравенства

$$Z_k^* \ldots Z_2^* Z_1^* \begin{bmatrix} S & B \\ B^* & C \end{bmatrix} Z_1 \cdot Z_2 \cdots Z_k \geqslant 0, \ k = 2, 3, \ldots, n-1, \quad (11)$$

доставляющие последовательно соотношения

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} (\zeta - \zeta_0)^{-l} [S(\zeta) - s_0 - \cdots - s_{l-1}(\zeta - \zeta_0)^{l-1}] = s_l,$$
$$l = n+1, \ldots, 2n-2.$$

Покажем, наконец, что $(-1)^{n-1} \zeta_0^{2n-1} \tilde{s}_{2n-1} s_0^* \leqslant (-1)^{n-1} \zeta_0^{2n-1} \times \times s_{2n-1} s_0^*$.

С этой целью перейдем в неравенстве (11) к пределу при $\zeta \to \zeta_0$ и получим неравенство

$$H = \left[\begin{array}{c|c} \hat{S} \cdot S_0 \cdot \hat{\hat{S}} & \begin{matrix} s_n \\ s_{n+1} \\ \sim \sim \sim \sim \\ \tilde{s}_{2n-1} \end{matrix} \\ \hline s_n^* \ s_{n+1}^* \ \ldots \ \tilde{s}_{2n-1}^* & [s_n^*, s_{n+1}^*, \ldots, \tilde{s}_{2n-1}^*] \, \overline{S_0} \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim \sim \sim \\ s_0 \end{bmatrix} \end{array}\right] \geqslant 0. \quad (12)$$

Преобразуем его с помощью неособенной матрицы

$$Z = \begin{bmatrix} I & & & & & & \\ 0 & \zeta_0 & I & & & & \\ 0 & 0 & \zeta_0^2 & I & & & \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & \zeta_0^{n-1} I & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{\zeta}_0^n s_0 \end{bmatrix},$$

где $[b_1^*, b_2^*, \ldots, b_{n-1}^*, (-1)^{n-1}\zeta_0^n I] = [s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots, s_1, s_0] S_0^* \times \times \zeta_0^{n-1} s_0^* I$, и рассмотрим нижний главный блок-минор второго порядка, который имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \ldots, s_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim\ \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* \times \\ s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \ldots, \tilde{s}_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim\ \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* \times \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \times s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \ldots, \tilde{s}_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim\ \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* \\ \times s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \ldots, \tilde{s}_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim\ \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* \end{array}\right] \geqslant 0. \qquad (13)$$

Третье условие леммы о неотрицательной блок-матрице для него имеет вид

$$s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \ldots, s_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim\ \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* \geqslant$$

$$\geqslant s_0 [s_n^*, s_{n+1}^*, \ldots, \tilde{s}_{2n-1}^*] \bar{S}_0 \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \sim\ \sim \\ s_0 \end{bmatrix} s_0^* \geqslant 0. \qquad (14)$$

Из (14) уже вытекает, что

$$(-1)^{n-1}\zeta_0^{2n-1} s_{2n-1} s_0^* \geqslant (-1)^{n-1}\zeta_0^{2n-1} \tilde{s}_{2n-1} s_0^*, \qquad (15)$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Сопутствующее тождество для блока $S = \hat{S} \cdot S_0 \cdot \hat{\hat{S}}$ ОМН (SK) может быть получено из неравенства $\left(\dfrac{I - S(z_k) S^*(z_e)}{1 - z_k \bar{z}_e}\right) \geqslant \geqslant 0$ путем преобразования последнего с помощью матрицы T_1 (7) и последующего перехода к пределу при $z_k \to \zeta_0$. Оно имеет вид

$$-[b(\xi), -c(\xi)]\, j \begin{bmatrix} b^*(\eta) \\ -c^*(\eta) \end{bmatrix} = \xi R_\xi S + S_{\bar{\eta}} R_\eta^* - S, \qquad (16)$$

где

$$R_{\xi}=\begin{bmatrix} \frac{I}{\xi-\zeta_0} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{I}{(\xi-\zeta_0)^2} & \frac{I}{\xi-\zeta_0} & \cdots & 0 \\ \sim\sim\sim & \sim\sim\sim & \sim\sim & \sim\sim \\ \frac{I}{(\xi-\zeta_0)^n} & \frac{I}{(\xi-\zeta_0)^{n-1}} & \cdots & \frac{I}{\xi-\zeta_0} \end{bmatrix}=$$

$$=\left(I\xi-\begin{bmatrix} \zeta_0 I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & \zeta_0 I & \cdots & 0 & 0 \\ \sim & \sim\sim & \sim\sim & \sim\sim & \sim \\ 0 & 0 & \cdots & I & \zeta_0 I \end{bmatrix}\right)^{-1}.$$

§ 2. Решение ОМН *(SK)*

2.1°. Наметим схему решения ОМН (SK)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & b(\zeta)S(\zeta)-c(\zeta) \\ S^*(\zeta)b^*(\zeta)-c^*(\zeta) & \frac{I-S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta} \end{bmatrix}\geqslant 0 \quad (SK)$$

в предположении **невырожденности** информационного блока $\boldsymbol{S}>0$.

1. Вводим в рассмотрение матрицу-функцию

$$H(\xi,\ \eta)=\left(\frac{\eta}{\xi}-1\right)\begin{bmatrix} b^*(\tilde{\xi}) \\ c^*(\tilde{\xi}) \end{bmatrix}\boldsymbol{S}^{-1}[b(\eta),\ c(\eta)],\ \tilde{\xi}=\bar{\xi}^{-1}, \qquad (17)$$

с помощью которой неравенство

$$\frac{I-S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}-[S^*(\zeta),\ I]\begin{bmatrix} b^*(\zeta) \\ -c^*(\zeta) \end{bmatrix}\boldsymbol{S}^{-1}[b(\zeta),\ -c(\zeta)]\begin{bmatrix} S(\zeta) \\ I \end{bmatrix}\geqslant 0,$$

эквивалентное ОМН (SK), переписывается в виде

$$[S^*(\zeta),\ I]\frac{j+jH(\tilde{\zeta},\ \zeta)j}{1-\bar{\zeta}\zeta}\begin{bmatrix} S(\zeta) \\ I \end{bmatrix}\geqslant 0,\ j=\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

2. Строим матрицу-функцию

$$T(\xi,\ \eta)=I+H(\xi,\ \eta)j \qquad (19)$$

и проверяем, что имеет место цепное тождество

$$T(\xi,\ \eta)T(\eta,\ \zeta)\equiv T(\xi,\ \zeta). \qquad (20)$$

Доказательство (20) опирается на вспомогательные равенства, в которых и проявляется индивидуальность задачи:

1. $\zeta R_{\zeta}\boldsymbol{S}+\zeta^{-1}\boldsymbol{S}R^*_{\tilde{\zeta}}-\boldsymbol{S}=-[b(\zeta),\ -c(\zeta)]\,j\begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ -c^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix}$,

2. $R_{\zeta}b(\eta)=-\frac{b(\zeta)-b(\eta)}{\zeta-\eta},\ R_{\zeta}c(\eta)=-\frac{c(\zeta)-c(\eta)}{\zeta-\eta}$.

Отметим свойства матрицы-функции $T(\xi, \eta)$, вытекающие из свойств матрицы $H(\xi, \eta)$ и цепного тождества:

1°. $T(\xi, \eta)$ голоморфна всюду, кроме $\xi, \eta = \zeta_0$;

2°. $T(\xi, \xi) = I$;

3°. $T^{-1}(\xi, \eta) = T(\eta, \xi)$;

4°. $jT^{*-1}(\xi, \eta)j = T(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$.

3. С их помощью устанавливается связь между значениями матрицы-функции

$$W_\zeta = j + jH(\tilde{\zeta}, \zeta)j = jT(\tilde{\zeta}, \zeta) \tag{21}$$

в двух произвольных точках $\xi \neq \zeta_0$, $\eta \neq \zeta_0$:

$$W_\xi = T^{*-1}(\zeta, \eta)\ W_\eta T^{-1}(\zeta, \eta). \tag{22}$$

Полагая в (22) $\xi = \zeta$, $\eta = 1$, $T(\zeta, 1) = A_n(\zeta)$, приходим к факторизации матрицы-функции

$$W_\zeta = A_n^{*-1}(\zeta)\, jA_n^{-1}(\zeta), \tag{23}$$

т. е. к факторизации ОМН (SK):

$$[S^*(\zeta),\ I]\frac{A_n^{*-1}(\zeta)\, jA_n^{-1}(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}\begin{bmatrix} S(\zeta) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{24}$$

Матрица-функция

$$A_n(\zeta) = T(\zeta, 1) = I + H(\zeta, 1)j =$$

$$= I + \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)\begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ c^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} S^{-1}[b(1),\ c(1)]\, j \tag{25}$$

является параметризованной [6] j-элементарной матрицей-функцией полного ранга с полюсом кратности n в граничной точке ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$).

4. Для завершения построений проведем следующие рассуждения: пусть голоморфная в $|\zeta| < 1$ матрица-функция $S(\zeta)$ удовлетворяет неравенству (24). Тогда из j-растягиваемости $A_n(\zeta)$ в $|\zeta| < 1$ следует, что $S(\zeta)$ — сжимающая в $|\zeta| < 1$. Далее, положив

$$\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\zeta)\begin{bmatrix} S(\zeta) \\ I \end{bmatrix}, \tag{26}$$

замечаем, что $p(\zeta)$, $q(\zeta)$ образуют неособенную сжимающую пару голоморфных в $|\zeta| < 1$ матриц-функций.

Если теперь записать $A_n(\zeta)$ в блочной форме:

$$A_n(\zeta) = \begin{vmatrix} \alpha(\zeta) & \beta(\zeta) \\ \gamma(\zeta) & \delta(\zeta) \end{vmatrix},$$

то из (26) видно, что

$$\begin{bmatrix} S(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = A_n(\zeta)\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\zeta)p(\zeta) + \beta(\zeta)q(\zeta) \\ \gamma(\zeta)p(\zeta) + \delta(\zeta)q(\zeta) \end{bmatrix},$$

откуда и определится $S(\zeta)$:

$$S(\zeta) = [\alpha(\zeta) p(\zeta) + \beta(\zeta) q(\zeta)] [\gamma(\zeta) p(\zeta) + \delta(\zeta) q(\zeta)]^{-1}. \tag{27}$$

Итак, каждое решение $S(\zeta)$ ОМН (SK) представляется в виде дробно-линейного преобразования некоторой неособенной сжимающей пары $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}$ голоморфных в $|\zeta| < 1$ матриц-функций с матрицей коэффициентов $A_n(\zeta)$.

5. Обратное утверждение проверяется проще: дробно-линейное преобразование (27) *произвольной* неособенной сжимающей пары $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}$ голоморфных в $|\zeta| < 1$ матриц-функций является решением ОМН (SK).

Действительно, пусть

$$\begin{bmatrix} u(\zeta) \\ v(\zeta) \end{bmatrix} = A_n(\zeta) \begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Тогда

$$[u^*,\ v^*]\, j \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [p^*,\ q^*]\, A_n^* j A_n \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geqslant [p^*,\ q^*]\, j \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

следовательно, пара $\begin{bmatrix} u(\zeta) \\ v(\zeta) \end{bmatrix}$ — сжимающая, а значит, ее компонента $v(\zeta)$ обратима. Но тогда имеет смысл функция $S(\zeta) = u(\zeta) v^{-1} \times$ $\times (\zeta) = [\alpha p + \beta q] [\gamma p + \delta q]^{-1}$ **(29)**, причем в силу неравенства

$$0 \leqslant [p^*,\ q^*]\, j \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = [u^*(\zeta),\ v^*(\zeta)]\, A_n^{*-1}(\zeta)\, j A_n^{-1}(\zeta) \begin{bmatrix} u(\zeta) \\ v(\zeta) \end{bmatrix}$$

$S(\zeta)$ удовлетворяет в $|\zeta| < 1$ неравенству (24), а значит, и ОМН (SK).

Таким образом, доказана основная теорема о решении ОМН (SK):

Теорема 2.1. *Если информационный блок* $\boldsymbol{S}$ *обратим, то общее решение* $S(\zeta)$ *ОМН* (SK) *представляется в виде дробно-линейного преобразования произвольной голоморфной неособенной сжимающей пары* $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}$:

$$S(\zeta) = [\alpha(\zeta) p(\zeta) + \beta(\zeta) q(\zeta)] [\gamma(\zeta) p(\zeta) + \delta(\zeta) q(\zeta)]^{-1},$$

матрица коэффициентов (резольвентная матрица) которого строится по матрице $\boldsymbol{S} > 0$:

$$\begin{bmatrix} \alpha(\zeta) & \beta(\zeta) \\ \gamma(\zeta) & \delta(\zeta) \end{bmatrix} = A_n(\zeta) = I + \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right) \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ c^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} [b(1),\ c(1)]\, j \tag{30}$$

и является кратной j*-элементарной матрицей-функцией полного ранга с полюсом кратности* n *в точке* ζ_0 $(|\zeta_0| = 1)$.

2.2°. Доказанная теорема 2.1 свидетельствует об **адекватности** усеченной задачи (SK) с невырожденным информационным блоком

$S > 0$ заданию кратной j-элементарной матрицы-функции $A_n(\zeta)$ полного ранга.

В самом деле, решение такой задачи приводит к построению кратной матрицы-функции $A_n(\zeta)$ вида (30).

Наоборот, имея произвольную кратную j-элементарную матрицу-функцию $\omega(\zeta)$ полного ранга, параметризуем ее:

$$\omega(\zeta) = I + \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right) j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ -c^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} S^{-1} [b(1), \ -c(1)],$$

а затем, рассматривая параметры $s_0 (s_0 s_0^* = I)$, $s_1, \ldots, s_{2n-1}$ этого представления как интерполяционные условия, формулируем кратную граничную задачу.

§ 3. Пошаговый процесс Шура

Метод, позволяющий до конца исследовать бесконечную интерполяционную задачу (типа Неванлинны — Пика, проблемы моментов), впервые использован И. Шуром. Сущность его заключается в том, что на первом шаге задача решается лишь для одного — первого, из счетного множества поставленных условий. Далее, из совокупности решений выделяется подмножество реализующих и второе условие. Этот отбор диктуется пересчетом исходных данных и приводит к тому, что решение задачи с новым первым условием дает общий вид функций, удовлетворяющих уже двум первым первоначально заданным условиям и т. д. Процесс Шура реализуется в виде суперпозиции элементарных дробно-линейных преобразований.

С позиций j-теории методика Шура адекватна разложению матриц $A_n(\zeta) = A(\zeta)$ на двучленные j-элементарные параметризованные множители.

Настоящий параграф состоит из двух частей. Первая посвящена разложению $A_n(\zeta)$ на параметризованные множители; вторая — интерпретации Шуровского процесса.

3.1°. Пусть

$$A_n(\zeta) = \sum_{k-0}^{n} \frac{B_k}{(\zeta - \zeta_0)^k} = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} b_n^*(\tilde{\zeta}) \\ -c_n^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} S_n^{-1} [b_n(1), \ -c_n(1)] \qquad (31)$$

параметризованная j-элементарная матрица-функция. Отщепляемый от $A_n(\zeta)$ слева двучленный множитель $\hat{b}_1(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{(1-\bar{\zeta}_0)(\zeta-\zeta_0)} \mathrm{E}_1$ определяется по формулам [2]: $B_n^* j B_{n-1} x = -B_n^*$, $\mathrm{E}_1 = B_n x j$ и имеет полный ранг. По теореме о параметризации [6] (для $n = 1$) он представим в виде

$$b_1(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{(1-\bar{\zeta}_0)(\zeta-\zeta_0)} j \begin{bmatrix} I \\ -s_0^* \end{bmatrix} (\zeta_0 s_1 s_0^*)^{-1} [I, \ -s_0], \qquad (32)$$

где параметры $s_0\,(s_0 s_0^* = I)$, $s_1\,(\zeta_0 s_1 s_0^* > 0)$ в (32) необходимо совпадают с s_0, s_1 в выражении (31).

Выполняя деление $A_n(\zeta)$ на $\hat{b}_1(\zeta)$, получим частное

$$\hat{b}_1^{-1}(\zeta)\,A_n(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta}\,j\begin{bmatrix} b_{n-1}^*(\tilde{\zeta}) \\ -c_{n-1}^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} \boldsymbol{S}_{n-1}^{(2)-1}\,[b_{n-1},\ -c_{n-1}] \qquad (33)$$

уже с полюсом кратности $n-1$ в точке $\zeta_0\,(|\zeta_0| = 1)$.

Новые параметры $s_0^{(2)}$, $s_1^{(2)}$, ..., $s_{2n-3}^{(2)}$ связаны с s_0, s_1, ..., s_{2n-1} соотношением

$$Y\boldsymbol{S}_{n-1}^{(2)}Y^* = C - B^* a_{11}^{-1} B > 0, \qquad (34)$$

где

$$\boldsymbol{S}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & B \\ B^* & C \end{bmatrix} > 0,$$

$$Y = \begin{bmatrix} \left(\frac{s_1}{1-\zeta_0} - s_2\right) s_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \left(\frac{s_2}{1-\zeta_0} - s_3\right) s_1^{-1} & \left(\frac{s_1}{1-\zeta_0} - s_2\right) s_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \sim\sim\sim & \sim\sim\sim & \sim\sim\sim & \sim\sim\sim \\ \left(\frac{s_{n-1}}{1-\zeta_0} - s_n\right) s_1^{-1} & \left(\frac{s_{n-2}}{1-\zeta_0} - s_{n-1}\right) s_1^{-1} & \cdots & \left(\frac{s_1}{1-\zeta_0} - s_2\right) s_1^{-1} \end{bmatrix}. \qquad (35)$$

Вид частного подсказывает, что описанный процесс можно повторить.

Второй множитель $\hat{b}_2(\zeta)$, отщепляемый слева от $\hat{b}_1^{-1}(\zeta)\,A_n(\zeta)$, по аналогии с (32), имеет вид

$$b_2(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta}\,j\begin{bmatrix} I \\ -s_0^{(2)*} \end{bmatrix} (\zeta_0 s_1^{(2)} s_0^{(2)*})^{-1}\,[I,\ -s_0^{(2)}] \qquad (36)$$

и в его построении участвуют лишь $s_0^{(2)}\,(s_0^{(2)} s_0^{(2)*} = I)$ и $s_1^{(2)}\,(\zeta_0 s_1^{(2)} \times \times s_0^{(2)*} > 0)$, т. е. структура $\hat{b}_2(\zeta)$ зависит только от величин двух первых условий задачи: s_0, s_1, s_2, s_3.

Вовлекая с каждым новым актом отщепления следующую пару интерполяционных условий, мы после $n-1$ шагов получим равенство $A_n(\zeta) = \hat{b}_1(\zeta)\ \hat{b}_2(\zeta)\ \ldots\ \hat{b}_n(\zeta)$ **(37)**, где

$$\hat{b}_k(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{(1-\bar{\zeta}_0)(\zeta-\zeta_0)}\,\mathrm{E}_k;$$

$$\mathrm{E}_k = j\begin{bmatrix} I \\ -s_0^{(k)*} \end{bmatrix} (\zeta_0 s_1^{(k)} s_0^{(k)*})^{-1}\,[I,\ -s_0^{(k)}];$$

$$\mathrm{E}_k^2 = 0, \quad \mathrm{E}_k j \geqslant 0, \quad \operatorname{rang} \mathrm{E}_k = m.$$

Величины s_0, s_1, $s_0^{(2)}$, $s_1^{(2)}$, ..., $s_0^{(n)}$, $s_1^{(n)}$ называют параметрами Шура. Условия $s_0^{(k)} s_0^{(k)*} = I$, $\zeta_0 s_1^{(k)} s_0^{(k)*} > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ обеспечиваются положительностью информационного блока $\boldsymbol{S}_n > 0$.

Еще раз подчеркнем, что для построения $s_0^{(k)}$, $s_1^{(k)}$ используются лишь первые $2k$ данных задачи (SK): $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2k-2}, s_{2k-1}$.

Независимость $\hat{b}_k(\zeta)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ от условий задачи с номерами, большими k, позволяет утверждать, что разложение параметризованной матрицы-функции, порожденной k-й усеченной задачей $(k=1, 2, \ldots, n)$, на параметризованные двучленные множители состоит из первых k множителей разложения (37): $\hat{b}_1(\zeta) \cdot \hat{b}_2 \times \times (\zeta) \ldots \hat{b}_k(\zeta)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

3.2°. Полученное разложение $A_n(\zeta)$ в произведение двучленных множителей полного ранга важно тем, что оно имеет место при любом $n=1, 2, \ldots$ без какой-либо перестройки сомножителей. Это позволяет нам поставить в соответствие с полной (неусеченной) задачей (SK) бесконечную цепочку двучленных множителей $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots \ldots, \hat{b}_n, \ldots$. Интерпретируя произведения $\hat{b}_1, \hat{b}_1\hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_1\hat{b}_2 \ldots \ldots \hat{b}_k \ldots$ как матрицы коэффициентов дробно-линейных преобразований, мы получим решение усеченных задач с одним, двумя и т. д. k заданными условиями.

В самом деле, так как первый множитель разложения (37)

$$\hat{b}_1(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{(1-\bar{\zeta}_0)(\zeta-\zeta_0)} j \begin{bmatrix} I \\ -s_0^* \end{bmatrix} (\zeta_0 s_1 s_0^*)^{-1} [I, \; -s_0] = \begin{bmatrix} \alpha_1(\zeta) & \beta_1(\zeta) \\ \gamma_1(\zeta) & \delta_1(\zeta) \end{bmatrix}$$

равен $A_1(\zeta)$, то дробно-линейное преобразование произвольной неособенной сжимающей пары $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}$*

$$S(\zeta) = [\alpha_1(\zeta) p(\zeta) + \beta_1(\zeta) q(\zeta)] [\gamma_1(\zeta) p(\zeta) + \delta_1(\zeta) q(\zeta)]^{-1} = \\ = \hat{b}_1(\zeta) \left\{ \begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix} \right\} \qquad (38)$$

с матрицей коэффициентов $\hat{b}_1(\zeta) = A_1(\zeta)$ по теореме 1.1 является решением ОМН

$$\left[\begin{array}{c:c} \zeta_0 s_1 s_0^* & \dfrac{S(\zeta) - s_0}{\zeta - \zeta_0} \\ \hdashline \dfrac{S^*(\zeta) - s_0^*}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} & \dfrac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{array} \right] \geqslant 0,$$

а значит, и решением усеченной задачи, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} S(\zeta) = s_0, \quad \lim_{\zeta \to \zeta_0} \frac{s_0^* [S(\zeta) - s_0]}{\bar{\zeta}_0 (\zeta - \zeta_0)} \leqslant s_0^* s_1 \zeta_0.$$

---

* В силу того что компонента $q(\zeta)$ неособенной сжимающей пары $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}$ всегда обратима, пара $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}$ эквивалентна паре $\begin{bmatrix} S_2(\zeta) \\ \sim I \end{bmatrix}$, где $S_2(\zeta) = pq^{-1}$ — произвольная сжимающая в $|\zeta| < 1$ матрица-функция.

Замечание 1. Если в качестве параметра в (38) рассматривать пару $\begin{bmatrix} S_2(\zeta) \\ I \end{bmatrix}$, где $S_2(\zeta)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\operatorname{rang}\{\lim_{\zeta \to \zeta_0}[S_2(\zeta) - s_0]\} = m, \tag{39}$$

то $S(\zeta)$ (38) будет решением задачи (SK), удовлетворяющей первой паре интерполяционных условий:

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} S(\zeta) = s_0, \quad \lim_{\zeta \to \zeta_0} \frac{S(\zeta) - s_0}{\zeta - \zeta_0} = s_1.$$

Далее, дробно-линейное преобразование

$$S(\zeta) = [\alpha_2(\zeta) S_3(\zeta) + \beta_2(\zeta)]\,[\gamma_2(\zeta) S_3(\zeta) + \delta_2(\zeta)]^{-1} = \\ = \hat{b}_1(\zeta)\{\hat{b}_2(\zeta)\{S_3\}\},$$

матрицей коэффициентов которого является произведение

$$A_2(\zeta) = \hat{b}_1(\zeta) \cdot \hat{b}_2(\zeta) = \begin{bmatrix} \alpha_2(\zeta) & \beta_2(\zeta) \\ \gamma_2(\zeta) & \delta_2(\zeta) \end{bmatrix},$$

суть решение неравенства

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{S}_2 & \begin{array}{c} \dfrac{S(\zeta) - s_0}{\zeta - \zeta_0} \\ \dfrac{S(\zeta) - s_0 - s_1(\zeta - \zeta_0)}{(\zeta - \zeta_0)^2} \end{array} \\ \hline * & \dfrac{I - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{array}\right] \geqslant 0,$$

а значит, с учетом аналогичного замечания 1 относительно параметра $S_3(\zeta)$, и решение задачи (SK) с двумя парами интерполяционных условий s_0, s_1, s_2, s_3 и т. д.

Итак, постановке любой задачи (SK), удовлетворяющей условию $\boldsymbol{S}_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), соответствует бесконечное произведение двучленных множителей полного ранга $\hat{b}_1(\zeta) \cdot \hat{b}_2(\zeta) \ldots \hat{b}_n(\zeta) \ldots$ **(40)** так, что частичные произведения $\hat{b}_1\hat{b}_2 \ldots \hat{b}_k$ являются матрицей коэффициентов дробно-линейного преобразования, дающего общее решение усеченной проблемы, определяемой первыми k парами условий.

Имеет место и обратное утверждение: каждому бесконечному произведению двучленных j-элементарных множителей полного ранга

$$\overset{\curvearrowright}{\prod_{i=1}^{\infty}} b_i(\zeta)$$

(единственное ограничение состоит в том, что $s_0^{(k)} - s_0^{(k+1)}$ — невырожденная матрица для $\forall k = 1, 2, \ldots$) соответствует сжимающая матрица-функция $S(\zeta)$, обладающая асимптотикой

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} (\zeta - \zeta_0)^{-k} [S(\zeta) - s_0 - \cdots - s_{k-1}(\zeta - \zeta_0)^{k-1}] = s_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем для $\forall k$ $\boldsymbol{S}_k > 0$.

Тем самым задача (SK) со строго положительными информационными блоками $\mathrm{S}_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ адекватна заданию бесконечного произведения Бляшке — Потапова двучленных j-элементарных множителей полного ранга с полюсом в точке ζ_0 на границе единичного круга

$$\overset{\infty}{\widehat{\prod_{k=1}}} b_k(\zeta), \quad b_k(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{(1-\overline{\zeta}_0)(\zeta-\zeta_0)} \mathrm{E}_k, \tag{41}$$

$$\mathrm{E}_k = j \begin{bmatrix} I \\ -s_0^{(k)*} \end{bmatrix} (\zeta_0 s_1^{(k)} s_0^{(k)*})^{-1} [I, \ -s_0^{(k)}], \ \mathrm{E}_k j \geqslant 0, \ \mathrm{E}_k^2 = 0.$$

Исследовать задачу (SK) означает изучить вопросы, связанные со сходимостью или расходимостью этого бесконечного произведения.

Замечание. В рассмотренном выше бесконечном произведении (41) отдельные множители $\hat{b}_k(\zeta)$ нормированы к I в точке $\zeta = 1$. Однако более целесообразной является нормировка каждого множителя в бесконечном произведении к модулю [7] в некоторой внутренней точке области, например, в точке $\zeta = 0$. Такая нормировка позволяет использовать тонкие теоремы В. П. Потапова [7] о модуле при исследовании сходимости бесконечного произведения.

Перенормировка множителей произведения (41) осуществляется следующим образом:

1) Легко проверяется, что

$$\hat{b}_k(\zeta) = \left(I - \frac{1}{2}\frac{\zeta+\zeta_0}{\zeta-\zeta_0}\mathrm{E}_k\right)\left(I + \frac{1}{2}\frac{1+\zeta_0}{1-\zeta_0}\mathrm{E}_k\right) = B_k(\zeta)\cdot U_k, \tag{42}$$

где $B_k(\zeta)$ — j-элементарная матрица-функция полного ранга, нормированная в точке $\zeta = 0$ к модулю

$$B_k(0) = I + \frac{1}{2}\mathrm{E}_k = e^{1/2\mathrm{E}_k},$$

$$U_k = I + \frac{1}{2}\frac{1+\zeta_0}{1-\zeta_0}\mathrm{E}_k,$$

j-унитарная матрица: $U_k^* j U_k = j$;

2) произведение (41) переписывается в виде

$$\overset{\infty}{\widehat{\prod_{k=1}}} \hat{b}_k(\zeta) = \overset{\infty}{\widehat{\prod_{k=1}}} B_k(\zeta)\, U_k = B_1(\zeta)\cdot U_1 B_2(\zeta)\, U_1^{-1} \ldots$$
$$\ldots (U_1 U_2 \ldots U_{n-1})\, B_n(\zeta)\, (U_1 U_2 \ldots U_{n-1})^{-1} \ldots$$

или

$$\overset{\infty}{\widehat{\prod_{k=1}}} \hat{b}_k(\zeta) = \overset{\infty}{\widehat{\prod_{k=1}}} \widetilde{B}_k(\zeta), \tag{43}$$

где $\widetilde{B}_1(\zeta) = B_1(\zeta)$,

$$\widetilde{B}_k(\zeta) = (U_1 U_2 \ldots U_{k-1})\, B_k(\zeta)\, (U_1 U_2 \ldots U_{k-1})^{-1}, \tag{44}$$
$$(k = 2, 3, \ldots).$$

3) Очевидно,

$$\tilde{B}_k(\zeta) = I - \frac{1}{2}\frac{\zeta+\zeta_0}{\zeta-\zeta_0}\tilde{\mathrm{E}}_k,\ \tilde{\mathrm{E}}_k = (U_1\ \ldots\ U_{k-1})\,\mathrm{E}_k\,(U_1\ \ldots\ U_{k-1})^{-1}$$

и, следовательно, множители произведения (43) нормированы к модулю в точке $\zeta = 0$:

$$\tilde{B}_k(0) = I + \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{E}}_k = e^{1/2\tilde{\mathrm{E}}_k}.$$

Таким образом, задача (SK) $(S_n > 0,\ \forall n)$ **адекватна** заданию бесконечного произведения Бляшке — Потапова двучленных j-элементарных матриц-функций полного ранга с полюсами в точке $\zeta_0\,(|\zeta_0| = 1)$, нормированных к модулю в точке $\zeta = 0$.

§ 4. Общая теория кругов Вейля

4.1°. Основы общей теории кругов Вейля, изложенные в [2], остаются неизменными и для задачи (SK). Поэтому сформулируем только выводы:

Каждой матрице Вейля

$$W = A_n^{*-1} j A_n^{-1} = \begin{bmatrix} -R & S \\ S^* & -T \end{bmatrix},\ R > I$$

в фиксированной точке $\lambda_0\,(|\lambda_0| < 1)$ отвечает круг K_n:

$$S(\lambda_0) = C + \rho_g^{1/2}\cdot u\cdot\rho_d^{1/2},\ u^*u \leqslant I,$$

$$C = R^{-1}S;\ \ \rho_g = R^{-1};\ \ \rho_d = S^*R^{-1}S - T.$$

а) С возрастанием параметра n эти круги вкладываются друг в друга;

в) Центры $C = R^{-1}S$ стремятся к конечному пределу;

с) Левый и правый радиусы ρ_g и ρ_d, монотонно убывая, стремятся к пределам $\rho_{g\infty}$ и $\rho_{d\infty}$.

Совокупность матриц $S = (R^{-1}S)_\infty + \rho_{g\infty}^{1/2}\cdot u\cdot\rho_{d\infty}^{1/2},\ \forall u^*u \leqslant I$ называют **предельным кругом Вейля.** Он, очевидно, содержится во всех кругах K_n. Отметим, что в общем случае $\rho_{g\infty}$, $\rho_{d\infty}$ являются особенными матрицами.

По теореме С. А. Орлова [8], ранги левого и правого предельных радиусов не зависят от выбора точки λ_0; это обстоятельство дает возможность классифицировать задачи (SK) по значениям рангов предельных радиусов.

Более полную информацию получим, рассматривая мультипликативное представление матрицы коэффициентов $\tilde{A}_n(\zeta) = \tilde{B}_1(\zeta)\ldots\tilde{B}_n(\zeta)$ и вытекающие из него структурные формулы для радиусов круга

$$\rho_g^{(n)} = u_1\hat{r}_1^{-1/2}u_2\hat{r}_2^{-1/2}\ \ldots\ u_n\hat{r}_n^{-1}u_n^*\ \ldots\ \hat{r}_2^{-1/2}u_2^*\hat{r}_1^{-1/2}\cdot u_1^*, \tag{45}$$

$$\rho_d^{(n)} = v_1\hat{r}_1^{-1/2}v_2\hat{r}_2^{-1/2}\ \ldots\ v_n\hat{r}_n^{-1}v_n^*\ \ldots\ \hat{r}_2^{-1/2}v_2^*\hat{r}_1^{-1/2}v_1. \tag{46}$$

Здесь положительные эрмитовы матрицы $\hat{r}_1 > I, \ldots, \hat{r}_n > I$ и унитарные матрицы $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $v_1, v_2, \ldots, v_n$ однозначно определяются заданным произведением двучленных множителей.

Вывод этих формул ничем принципиально не отличается от вывода аналогичных формул в задаче Неванлинны — Пика [9]; специфика граничного случая проявляется лишь в том, что у $\rho_d^{(n)}$ отсутствует множитель — скалярное произведение Бляшке.

Из структурных формул (45), (46), в частности, вытекает, что либо оба радиуса предельного круга K_∞ имеют полный ранг, либо оба радиуса — вырожденные матрицы. В этом последнем случае не существует какой-либо связи между рангами $\rho_{g\infty}$ и $\rho_{d\infty}$.

Имеющее место обратное утверждение: по любым наперед заданным эрмитовым матрицам $\hat{r}_1 > I, \ldots, \hat{r}_n > I$ и унитарным матрицам $u_1, \ldots, u_n$; $v_1, \ldots, v_n$ можно построить произведение $A(\zeta) = \tilde{B}_1(\zeta)\tilde{B}_2(\zeta) \ldots \tilde{B}_n(\zeta)$, для которого левый и правый радиусы круга Вейля K_n в заданной точке $|\lambda_0| < 1$ определяются формулами (45), (46), позволяет для любой пары чисел $0 \leqslant \nu_g < m$, $0 \leqslant \nu_d < m$ построить задачу (SK) с заданными ν_g и ν_d рангами предельных радиусов круга Вейля $K_\infty : \operatorname{rang} \rho_{g\infty} \nu_d$, $\operatorname{rang} \rho_{d\infty} = \nu_d$.

4.2⁰. Особый интерес представляет случай, когда левый и правый радиусы предельного круга K_∞ являются неособенными матрицами. Такую задачу называют вполне неопределенной (в скалярном случае полная неопределенность или единственность исчерпывает все возможные исходы).

Обобщением классического результата Данжуа может служить следующий критерий полной неопределенности задачи (SK):

Теорема 4.1. *Для того чтобы задача (SK) была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_{kj}. \tag{47}$$

Итак, полная неопределенность задачи (SK) эквивалентна сходимости ряда (47). Последняя же обеспечивает сходимость бесконечного произведения $A(\zeta) = \overset{\curvearrowright}{\prod_{k=1}^{\infty}} \tilde{B}_k(\zeta)$.

Общее решение задачи представляется в форме дробно-линейного преобразования с матрицей коэффициентов $A(\zeta)$. Таким образом, в случае полной неопределенности получаем исчерпывающее описание всех решений задачи (SK):

Теорема 4.2. *Общее решение $S(\zeta)$ задачи (SK) представляется в форме дробно-линейного преобразования произвольной неособенной голоморфной сжимающей в $|\zeta| < 1$ пары матриц-функций* $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}$

$$S(\zeta) = [\alpha(\zeta)\, p(\zeta) + \beta(\zeta)\, q(\zeta)]\, [\gamma(\zeta)\, p(\zeta) + \delta(\zeta)\, q(\zeta)]^{-1},$$

матрица коэффициентов которого является бесконечным произ-

ведением Бляшке—Потапова двучленных j-элементарных множителей полного ранга

$$\begin{bmatrix} \alpha(\zeta) & \beta(\zeta) \\ \gamma(\zeta) & \delta(\zeta) \end{bmatrix} = \overset{\curvearrowright}{\prod_{k=1}^{\infty}} \tilde{B}_k(\zeta),$$

нормированных к модулю в точке $\zeta = 0$.

Замечание. Отметим, что в настоящей статье полностью исследован случай полной неопределенности задачи, т. е. $\operatorname{rang} \rho_{g\infty} = \operatorname{rang} \rho_{d\infty} = m$. Случаи вырождения информационного блока $\boldsymbol{S}_n$ при каком-нибудь n ($\det \boldsymbol{S}_n = 0$) или вырождения предельных радиусов

$$0 \leqslant \operatorname{rang} \rho_{g\infty} < m, \ \ 0 \leqslant \operatorname{rang} \rho_{d\infty} < m \ (\boldsymbol{S}_n > 0, \ \forall n)$$

здесь не рассматриваются.

4.3°. В заключение рассмотрим еще одну форму записи допредельных радиусов:

$$\rho_g^{(n)}(\lambda_0) = \left\{ I + (1 - \lambda_0\bar{\lambda}_0) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda_0\bar{\lambda}_0)^i}{|\lambda_0 - \zeta_0|^{2i+2}} P_i(\bar{\lambda}_0)\, h_i^{-1} P_i^*(\tilde{\lambda}_0) \right\}^{-1}, \quad (48)$$

$$\rho_d^{(n)}(\lambda_0) = \left\{ I + (1 - \lambda_0\bar{\lambda}_0) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{|1 - \lambda_0\bar{\zeta}_0|^{2i+2}} Q_i(\lambda_0)\, h_i^{-1} Q_i^*(\lambda_0) \right\}^{-1}, \quad (49)$$

$$P_i(\zeta) = \frac{(1 - \zeta\bar{\zeta}_0)^{i+1}}{\zeta}\, b_{i+1}^*(\tilde{\zeta}) \begin{bmatrix} -\boldsymbol{S}_{i-1}^{-1} B_i \\ I \end{bmatrix}, \ \ P_0(\zeta) = I,$$

$$Q_i(\zeta) = \frac{(1 - \zeta)\, \bar{\zeta}_0^{i+1}}{\zeta}\, c_{i+1}^*(\tilde{\zeta}) \begin{bmatrix} -\boldsymbol{S}_{i-1}^{-1} B_i \\ T \end{bmatrix}, \ \ Q_0(\zeta) = s_0,$$

$$\boldsymbol{S}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{i-1} & B_i \\ B_i^* & C_i \end{bmatrix}, \ \ h_i = C_i - B_i^* \boldsymbol{S}_{i-1}^{-1} B_i.$$

В скалярном случае соотношения (48), (49) подсказывают критерий полной неопределенности (и однозначности) задачи (SK), аналогичный критерию Гамбургера полной неопределенности проблемы моментов.

Теорема 4.3. *Скалярная задача* (SK) *будет вполне неопределенной в том и только в том случае, когда сходятся ряды*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\lambda_0|^{2i}}{|\lambda_0 - \zeta_0|^{2i+2}} \frac{\left| P_i\left(\frac{1}{\bar{\lambda}_0}\right) \right|^2}{h_i}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{|1 - \lambda_0\bar{\zeta}_0|^{2i+2}} \frac{|Q_i(\lambda_0)|^2}{h_i}.$$

Здесь

$$h_i = \frac{\det S_i}{\det S_{i-1}},$$

$$P_i(\zeta) = \frac{1}{\det S_{i-1}} \begin{vmatrix} & S_{i-1} & & B_i \\ (1 - \zeta\bar{\zeta})^i I & \ldots & \zeta^{i-1}(1 - \bar{\zeta}_0\zeta) I & \zeta^i I \end{vmatrix},$$

$$Q_i(\zeta) = \overline{\det \boldsymbol{S}_{i-1}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{S}_{i-1} & Bi \\ \frac{1}{\zeta}(1 - \zeta\bar{\zeta}_0)^{i+1} C_i^*(\tilde{\zeta}) & \varkappa_i^*(\bar{\zeta}) \end{vmatrix},$$

$\varkappa_i(\bar{\zeta}) = s_i(1 - \bar{\zeta}\zeta_0)^i + s_{i-1}(1 - \bar{\zeta}\zeta_0)^{i-1} \cdot \ \ldots + s_1(1 - \bar{\zeta}\zeta_0\, \bar{\zeta}^{i-1} + s_0(\bar{\zeta})^i$ можно рассматривать как аналоги ортогональных полиномов.

Список литературы: 1. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны—Пика//Докл. АН АрмССР. 1974. **59**, № 1, С. 17—22. 2. *Ковалишина И. В.* О «граничной» производной аналитической сжимающей в круге матрицы-функции. М., 1983. 69 с. Деп. в ВИНИТИ 20.05.83. № 2709. 3. *Helton W.*//J. of funct. Anal. 1980. **38**. № 2. С. 290—292. 4. *Ball J., Helton W.* Interpolation problems of Pick — Nevanlinna and Loewner types for meromorfhic matrix functions: parametrization of the set of all solutions//Integral Equations and Oper. Theory. 1986. **9**. С. 154—203. 5. *Меламуд Е. Я.* Теорема Каратеодори и граничная интерполяционная задача Неванлинны для аналитической J-нерастягивающей матрицы-функции//Докл. АН АрмССР. 1985. **80**, № 1. С. 12—16. 6. *Ковалишина И. В.* Теория кратной j-элементарной матрицы-функции с полюсом на границе единичного круга// Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 10—12. 7. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций//Тр. Моск. мат. о-ва. 1955. **4**. С. 125—236. 8. *Орлов С. А.* Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы об инвариантности рангов предельных матричных кругов//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976, **40**, № 3. С. 593—644. 9. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны—Пика//Теория операторов в функцион. пространствах и ее прил. К., 1981. С. 25—49.

Поступила в редколлегию 29.05.85