УДК 517+519.46

В. Я. ГОЛОДЕЦ, А. М. СОХЕТ

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ И АППРОКСИМАТИВНАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ

В [1] Конн и Вудс изучали несингулярные локально-компактные группы преобразований пространства с мерой, обладающие свойством аппроксимативной транзитивности (АТ). Это свойство, весьма полезное в эргодической теории, представляет большой интерес в теории алгебр фон Неймана, где с каждым фактором ассоциируется так называемый поток весов, т. е. каноническое эргодическое действие группы $\boldsymbol{R}$. Оказывается, что если поток весов обладает АТ-свойством, то соответствующий фактор распадается в бесконечное прямое произведение конечных факторов типа I.

В [1] на основе работы дель Хунко [2] было установлено, что всякое эргодическое действие $\boldsymbol{R}$ с чисто дискретным спектром всегда аппроксимативно транзитивно (АТ). В настоящей статье подобный результат доказан для произвольной абелевой локально-компактной сепарабельной группы. На самом деле будет доказано, что такое действие всегда имеет странный ранг один (см. определение 2 ниже). Кроме того, мы докажем, что всякое транзитивное действие локально-компактной абелевой сепарабельной группы является АТ (имеет странный ранг один).

§ 0. Предварительные сведения

Пусть $(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$ — пространство Лебега с непрерывной мерой (определение и необходимые сведения см. в [3]). Под $\mathrm{Aut}(\Omega)$ будет пониматься группа всех автоморфизмов (биективных, взаимно измеримых и сохраняющих меру преобразований) данного пространства. С каждым автоморфизмом $T \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ ассоциирован унитарный оператор, действующий в пространстве $L^2(\Omega)$ по правилу: $(U_T f)(\omega) = f(T\omega)$, $\omega \in \Omega$, $f \in L^2(\Omega)$. Действие α группы G на пространстве $(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$ — это гомоморфизм $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(\Omega)$; если группа G наделена топологией, действие считают непрерывным в том смысле, что отображение $g \to U_{\alpha(g)}$ непрерывно в сильной операторной топологии. Будем говорить, что действие α имеет дискретный спектр, если в пространстве $L^2(\Omega)$ существует ортонормированный базис, состоящий из функций, собственных одновременно для всех операторов $U_{\alpha(g)}$, $g \in G$.

Пусть $T \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. Стеком для T (или T-стеком) называется семейство $\sigma = \{E_k\}_{k=0}^{n}$, состоящее из измеримых непересекающихся подмножеств Ω, причем $TE_k = E_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

E_0 называют базой стека, E_k — уровнями, n — длиной или высотой. Если $A \in \boldsymbol{B}$, то через $m(\sigma, A)$ обозначают такое объединение нескольких элементов стека σ, симметрическая разность которого с A имеет наименьшую меру. Автоморфизм T, для которого существует такая последовательность T-стеков $\{\sigma^{(j)}\}_j$, что для всякого $A \in \boldsymbol{B}$ верно: $\mu(A \Delta m(\sigma^{(j)}, A)) \to 0$ при $j \to \infty$, называют стековым или ранга один. В этом случае пишут также $\sigma^{(j)} \to \varepsilon$. В [2] доказано, что всякий эргодический автоморфизм с дискретным спектром имеет ранг один.

Ослабляя условия, накладываемые для ранга один, заменим в определении стека требование «E_0, TE_0, $\ldots$, $T^n E_0$ не пересекаются между собой» требованием «E_0, $T^{l_1}E_0$, $\ldots$, $T^{l_n}E_0$ не пересекаются между собой», где l_k — произвольная возрастающая последовательность индексов». Это приведет нас к понятию «автоморфизм T имеет странный ранг один». Определение это естественным образом распространяется с отдельных автоморфизмов (или, что то же самое, действий группы $\boldsymbol{Z}$) на действия произвольных групп. В дальнейшем будет использована нижеследующая эквивалентная переформулировка этого определения.

Определение 1. *Действие α группы G на пространстве Лебега* $(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$ *имеет странный ранг один, если для любых двух множеств $A_1, A_2 \in \boldsymbol{B}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $E_0 \in \boldsymbol{B}$ (база стека) и такие $g_{ik} \in G$, $i = 1, \ldots, n_k$, $k = 1, 2$, что множества $\alpha(g_{ik}) E_0$ либо не пересекаются, либо совпадают, и*

$\mu(A_k \Delta \bigcup_{i=1}^{n_k} \alpha(g_{ik}) E_0) < \varepsilon$ при $k = 1, 2$.

Следующее понятие ввели А. Конн и Э. Вудс [1].

Определение 2. *Действие α группы G на пространстве Лебега* $(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$ *назовем, следуя* [1], *аппроксимативно транзитивным (АТ), если для любого набора неотрицательных суммируемых функций $f_1, \ldots, f_n \in L^1_+(\Omega)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся функция $f \in L^1_+(\Omega)$, элементы группы $g_1, \ldots, g_m$ и коэффициенты $\lambda_{jk} \geqslant 0$ такие, что* $\left\| f_j - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} U_{\alpha(g_k)} f \right\| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, n$.

Отметим некоторые переформулировки этого последнего определения. Не обязательно ограничивать индекс k конечным множеством: можно брать $k \in \boldsymbol{Z}$ и рассматривать λ_{jk} как функцию $\lambda_j \in l^1_+(\boldsymbol{Z})$. Затем можно требовать $\|f\|_1 = 1$ и $\|\lambda_j\|_1 = \|f_j\|_1$. Вместо этого, беря $\|f\|_1$ столь малой, сколь требуется, можно добиться того, чтобы все λ_{jk} были целыми. Затем для непрерывного действия локально-компактной группы G с мерой Хаара ν, λ_{jk} можно заменить на функции $\lambda_j \in L^1_+(G)$ такие, что $\left\| f_j - \int_G \lambda_j(g) U_{\alpha(g)} f \times \nu(dg) \right\|_1 < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, n$ (подробности см. в [1]).

В [1] доказано, что АТ влечет эргодичность и что странный ранг один влечет АТ (последнее — лишь для одного автоморфизма, но для действий общих групп доказательство без труда можно провести аналогично). Из этого и результата [2] следует, что эргодические автоморфизмы с дискретным спектром (а затем и потоки) являются АТ.

Ниже приведены два результата, доказанных Макки в [4].

Лемма 0. *Если эргодическое действие α компактной группы G имеет дискретный спектр, то из Ω можно удалить такое α-инвариантное и имеющее меру ноль множество, что все оставшиеся точки будут принадлежать одной траектории.*

Теорема 0. *Пусть локально-компактная сепарабельная группа G эргодически действует на пространстве Лебега, и действие это имеет дискретный спектр. Тогда существует непрерывный гомоморфизм φ из G на плотную подгруппу D некоторой компактной группы K и замкнутая нормальная подгруппа $H \subset K$ такие, что исходное действие* $\operatorname{mod} 0$ *эквивалентно такому действию группы G на K/H: $\alpha(g)(\operatorname{cls} k) = \operatorname{cls}(k\varphi(g))$.*

Всюду, где не оговорено противное, элементы множеств: G, K и т. п. будут обозначаться соответствующими строчными буквами: g, k, $\ldots$. Естественный гомоморфизм факторизации группы по ее нормальной подгруппе обозначается cls.

§ 1. Действия компактной группы сдвигами на пространстве своих смежных классов

Лемма 1. *Действие тора $\boldsymbol{T}^m$, $m \in \boldsymbol{N}$, сдвигами на себе имеет странный ранг один (и, следовательно, является АТ).*

Доказательство. Для окружности $\boldsymbol{T}^1$ это утверждение очевидно, поскольку можно считать с точностью до любого $\varepsilon > 0$, что множества A_1 и A_2 из определения 2 имеют вид объединения конечного числа интервалов из $\boldsymbol{T}^1 \cong \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ с рациональными концами. Но такие A_1 и A_2 можно совершенно точно накрыть одновременно объединением непересекающихся рациональных сдвижек подходящего интервала E_0 с рациональными концами. Так как в общем случае множества $A_1, A_2 \subset \boldsymbol{T}^m$, упомянутые в определении 1, можно с любой точностью приблизить объединениями непересекающихся множеств вида $B \times C$, $B \subset \boldsymbol{T}^{m-1}$, $C \subset \boldsymbol{T}^1$, то утверждение очевидно и в общем случае.

Теорема 1. *Пусть G — компактная сепарабельная абелева группа и G_0 — ее замкнутая подгруппа. Действие α группы G на пространстве G/G_0 (в качестве меры взята мера Хаара ν), определенное как $\alpha(g_1)(\operatorname{cls} g_2) = \operatorname{cls}(g_1 g_2)$, имеет странный ранг один и, следовательно, является АТ.*

Доказательство. Вначале будет рассмотрен частный случай, когда G_0 — единичная подгруппа, и G действует сама на себе.

Известная из [5] теорема утверждает, что в любой локально-компактной сепарабельной группе G можно найти такую открытую подгруппу H, что какова бы ни была окрестность единицы $U \subset G$, в ней всегда найдется нормальная компактная подгруппа $K \subset U \cap H$, такая, что H/K есть группа Ли. В данном случае, во-первых, H/K есть тор, а, во-вторых, так как $\{gH : g \in G\}$ — открытое покрытие компактной группы G, то H есть подгруппа конечного индекса. Мысленно рассмотрим разбиение пространства Лебега (G, ν) на эргодические относительно ограничения действия α на H компоненты; на фактор-пространстве по нему конечная группа G/H должна действовать эргодически, откуда следует, что это фактор-пространство состоит из конечного числа атомов, несущих равную меру. Из этого наблюдения с очевидностью выводим, что теорему достаточно доказать для действий группы H.

Из теоремы 1 § 61 в [6] вытекает такое утверждение. Пусть G — локально-компактная сепарабельная абелева группа с мерой Хаара ν, а U — открытое подмножество G. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность единицы $V \subset G$, что $|\nu(U \cdot V) - \nu(U)| < \varepsilon$. Воспользуемся им.

Итак, пусть $\varepsilon > 0$ и A_1, $A_2 \subset H$; возьмем такую окрестность единицы $U_\varepsilon \subset H$, что $|\nu(A_i U_\varepsilon) - \nu(A_i)| < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Пусть K_ε — компактная подгруппа, упоминавшаяся в ссылке на [5]; очевидно, что $A_i \subset A_i K_\varepsilon \subset A_i U_\varepsilon$ и что множество $A_i K_\varepsilon$ является инвариантным относительно K_ε. Так как $H/K_\varepsilon \cong \boldsymbol{T}^m$, то $\mathrm{cls}_{K_\varepsilon} A_i K_\varepsilon \subset \boldsymbol{T}^m$. Согласно лемме 1, можно взять подходящее множество E_0 в $\boldsymbol{T}^m$ в качестве базы стека и сдвигами этого множества одновременно аппроксимировать оба $\mathrm{cls}_{K_\varepsilon} A_i K_\varepsilon$, $i = 1, 2$ с точностью до ε. Теперь $\mathrm{cls}_{K_\varepsilon}^{-1} E_0$ будет своими сдвигами аппроксимировать оба множества $A_i K_\varepsilon$ с точностью до $\varepsilon\nu(K_\varepsilon)$, которая столь мала, сколь требуется. Так как $A_i K_\varepsilon$ разве лишь на ε отличается от A_i (в смысле меры симметрической разности), то этим доказательство теоремы для действий компактных групп на себе сдвигами полностью завершено.

В общем случае для действия G на G/G_0 заметим, что эквивалентные по модулю G_0 элементы G действуют одинаково. Поэтому можно мысленно заменить этот случай действием G/G_0 на G/G_0, для которого теорема уже доказана. Уже известно, что два данных множества A_1, $A_2 \subset G/G_0$ удается аппроксимировать с произвольной точностью объединением непересекающихся ($\mathrm{cls}\, g$)-сдвижек некоторого множества $E_0 \subset G/G_0$, где $\mathrm{cls}\, g \in G/G_0$. Остается у смежных классов $\mathrm{cls}\, g$ выбрать по представителю.

Следствие 1. *Так как транзитивное действие всегда эквивалентно действию сдвигами на пространстве смежных классов по подходящей подгруппе, заключаем, что всякое транзитивное действие абелевой сепарабельной компактной группы на пространстве Лебега имеет странный ранг один и, следовательно, является АТ.*

Следствие 2. *Отсюда и из леммы 0 немедленно вытекает, что эргодическое действие компактной сепарабельной абелевой группы, имеющее дискретный спектр, обладает странным рангом один и, следовательно, является АТ.*

В дальнейшем нам понадобится несколько более общий случай, чем рассмотренный в этой теореме.

Следствие 3. *Пусть K — компактная абелева сепарабельная группа и D — ее плотная подгруппа, а H — замкнутая* *подгруппа; рассмотрим действие D на K/H сдвигами. Такое действие тоже является АТ и, более того, имеет странный ранг один.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно, как и выше, свести все к действиям D на K. Пусть теперь A_1, $A_2 \subset K$; как уже доказано, существует множество $E_0 \subset K$ (его можно считать замкнутым) и такие $k_1, \ldots, k_p \in K$, что $k_j E_0$ не пересекаются между собой, и объединениями их можно с точностью до $\varepsilon > 0$ аппроксимировать A_1 и A_2. Пусть V — такая окрестность единицы, что Vk_jE_0 по-прежнему не пересекаются; возьмем $d_j \in D \cap Vk_j$, $j = 1, \ldots, p$ и найдем, что, объединяя непересекающиеся множества d_jE_0, можно аппроксимировать A_1 и A_2 с точностью до $\varepsilon + p\nu(V)$, а эта величина может быть сделана столь малой, сколь требуется. Здесь ν — мера Хаара группы K.

§ 2. Дискретный спектр

Лемма 2. *Эргодическое действие счетной абелевой группы, имеющее дискретный спектр, обладает рангом один.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 0. Так как возникшая в этой теореме плотная подгруппа D будет счетной, то компактная группа K окажется в данном случае сепарабельной, а поскольку любые два элемента из D коммутируют, то K и абелева. Тогда фактически все сводится к доказательству того, что действие D на K/H сдвигами имеет странный ранг один; но это уже доказано в следствии 3 теоремы 1.

Теорема 2. *Странный ранг имеющего дискретный спектр эргодического действия α на пространстве Лебега* $(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$ *локально-компактной сепарабельной абелевой группы G равен единице. (Следовательно, такое действие аппроксимативно транзитивно).*

Доказательство. Для дискретных и компактных групп это уже доказано выше. В общем случае выделим у группы G счетную плотную подгруппу D. Очевидно, что ограничение действия α на D эргодично и в силу леммы 2 теорема доказана полностью.

§ 3. Транзитивность

Теорема 3. *Всякое транзитивное действие локально-компактной сепарабельной абелевой группы G на пространстве Лебега является АТ и, более того, имеет странный ранг один.*

Доказательство. Известно, что всякое транзитивное действие эквивалентно действию группы сдвигами на пространстве смежных классов по подходящей замкнутой подгруппе; так как эквивалентные по модулю ее элементы действуют одинаково, то все сводится к действиям произвольной группы G сдвигами на себе, как и в § 1. Известная из [5] и уже использованная в § 1 теорема позволяет выделить в G открытую подгруппу H, допускающую аппроксимацию с помощью групп Ли; но группы Ли в данном случае — это $\boldsymbol{T}^p \times \boldsymbol{R}^q$. Для действий группы G/H на G/H сдвигами странный ранг один очевиден, потому что G/H дискретна и поэтому состоит из счетного числа атомов, несущих равную меру. Ниже будет доказан странный ранг один для действий H на себе сдвигами. Так как, очевидно, всякое измеримое подмножество из G с произвольной точностью приближается объединением непересекающихся подмножеств $A \subset G$ таких, что существует подходящее измеримое $C \subset H$, удовлетворяющее условию: $A \cap gH = gC$, если $\mathrm{cls}\, g \in B$, и $A \cap gH = \varnothing$, если $\mathrm{cls}\, g \notin B$, где $B = \mathrm{cls}\, A$, то из того, что теорема справедлива для H и G/H, воспоследует справедливость ее для всей группы G.

Утверждение теоремы очевидно для случая $G = \boldsymbol{R}$, а следовательно, и для случая $G = \boldsymbol{R}^n$ или $G = \boldsymbol{T}^p \times \boldsymbol{R}^q$ (имеются в виду действия этих групп на себе сдвигами). Поэтому доказательство этой теоремы для действий H на H будет дословно воспроизводить один из абзацев доказательства теоремы 1 — с заменой лишь торов на $\boldsymbol{T}^p \times \boldsymbol{R}^q$. Подробно его приводить нет никакой необходимости.

Список литературы: 1. *Connes A., Woods E. J.* Approximately transitive flows and ITPFI factors // Ergod. Th. and Dyn. Syst. 1958. **5**, N 2. P. 203—236. 2. *del Junco A.* Transformations with discrete spectrum are stacking transformations // Can. J. Math. 1976. **28**, N 4. P. 836—839. 3. Эргодическая теория / И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. М., 1980. 384 с. 4. *Mackey G. W.* Ergodic transformation groups with a pure point spectrum // I. I. I. J. Math. 1964. **8**, N 2. P. 217—228. 5. *Montgomery D., Zippin L.* Topological transformation groups. N. Y., L., 1955. 511 p. 6. *Халмош П. Р.* Теория меры. М., 1953. 292 с.

Поступила в редколлегию 18.09.87