УДК 519.2

Г. П. ЧИСТЯКОВ

К ВОПРОСУ О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КЛАССУ I_0

В 1957 г. Ю. В. Линник [1, 2] установил необходимые условия принадлежности классу I_0 законов распределения (з. р.) с гауссовой компонентой. Подробно определения и историю вопроса см. в работе [3]. Оказалось, что если з. р. F с гауссовой компонентой принадлежит классу I_0, то он принадлежит классу L Ю. В. Линника, т. е. его характеристическая функция (х. ф.) имеет вид

$$\varphi(t;\ F) = \exp\left\{i\beta t + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,\ x)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\,G(x)\right\}, \qquad (1)$$

где $\beta \in R^1$, $K(t,\ x) = e^{itx} - 1 - \dfrac{itx}{1+x^2}$, $G(x)$ — неубывающая ограниченная функция скачков со скачками во множестве вида $\{\mu_{n1}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{0\} \cup \{\mu_{n2}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\mu_{n1} > 0$, $\mu_{n2} < 0$, причем $\mu_{n+1,j}/\mu_{nj}$, $n = 0,\ \pm 1, \ldots,\ j = 1,\ 2$ — натуральные числа, отличные от единицы. Позднее А. Е. Фрынтов [4] показал, что результат Ю. В. Линника сохраняет силу для з. р. F с х. ф. вида (1), в котором произвольная неубывающая ограниченная функция $G(x)$ удовлетворяет условиям для $\forall \varepsilon > 0$

$$\varliminf_{r\to\infty} (\ln r)^{-1} \ln \int\limits_{1/r}^{(1+\varepsilon)/r} x^{-2}\,dG(x) > 1,$$

$$\varliminf_{r\to\infty} (\ln r)^{-1} \ln \int\limits_{-(1+\varepsilon)/r}^{-1/r} x^{-2}\,dG(x) > 1.$$

Чтобы сформулировать полученный в работе результат, заметим, что з. р. F, принадлежащий классу I_0, является в силу теоремы А. Я. Хинчина безгранично делимым, т. е. его х. ф. имеет вид (1) с произвольной неубывающей ограниченной функцией $G(x)$. Рассмотрим следующие х. ф. $\varphi_+(t)$, $\varphi_-(t)$, которые строятся по х. ф. $\varphi(t,\ F)$ з. р. F:

$$\varphi_+(t) = \exp\left\{\int\limits_{-0}^{+\infty} K(t,\ x)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\},$$

$$\varphi_-(t) = \exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{+0} K(t,\ x)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть з. р. $F \in \boldsymbol{I}_0$ и пусть х. ф. $\varphi_+(t)$, $\varphi_-(t)$ удовлетворяют условиям*

$$\varliminf_{t\to+\infty} (\ln(-\ln|\varphi_\pm(t)|))/\ln t > \alpha > 0. \tag{2}$$

Тогда з. р. $F \in \boldsymbol{L}$.

Из этой теоремы следует результат Ю. В. Линника и результат А. Е. Фрынтова. Все же наиболее существенным обстоятельством является тот факт, что, пользуясь основными идеями Ю. В. Линника, удалось сильно сократить доказательство, которое у Ю. В. Линника занимает главу в монографии [3].

Доказательство теоремы 1 опирается на вспомогательные результаты. Потребуем дополнительно от з. р. F, удовлетворяющего условиям теоремы 1, чтобы существовали числа $0 < \beta < 1$, $\mu, \zeta > 0$ $(\max(\mu, \zeta) < \beta/2)$ и $\tilde{c} > 0$ такие, что при всех достаточно малых $h' > 0$ выполняются неравенства

$$G(-\mu + h') - G(-\mu) > \tilde{c}h', \; G(\zeta + 0) - G(\zeta - h') > \tilde{c}h',$$
$$G(\beta + 0) - G(\beta - h') > \tilde{c}h', \; G(1 + 0) - G(1 - h') > \tilde{c}h'. \tag{3}$$

Пусть h, $0 < h < \frac{1}{2}\min(\mu, \zeta)$, такое, что для всех $h' \leqslant h$ выполняется условие (3). Потребуем также, что если точка β — рациональная, т. е. $\beta = m/n$, m, n — натуральные взаимно простые числа, то $m \neq 1$, а n — достаточно велико, $n \geqslant c$. Через c здесь и в дальнейшем обозначаем положительные постоянные не всегда одни и те же, зависящие лишь от функции $G(x)$, чисел β, μ, ζ, α, h и возникающей в теореме 3 функции $f_1(t)$.

Обозначим

$$f(t) = \int\limits_{\beta-h}^{\beta+0} (e^{itx} - 1)\, dG(x) + \int\limits_{1-h}^{1+0} (e^{itx} - 1)\, dG(x),$$

$$\varphi(t) = \exp\left\{\int\limits_{-a-0}^{b+0} K(t, x)\, x^{-2}\, dG(x)\right\},$$

где $a = b = 0$, если $\gamma = G(+0) - G(0) > 0$, и $a = \mu$, $b = \zeta$, если $\gamma = 0$, через $M\{\beta, 1\}$ обозначим минимальную группу, содержащую точки β и 1. Сформулируем и докажем первый вспомогательный результат.

Теорема 2. *Пусть з. р. F удовлетворяет условиям теоремы 1 и дополнительно соотношениям* (3). *Тогда для каждой точки $\nu \in M\{\beta, 1\}$, $0 < \nu < 10^{-2}\alpha\beta a_0^*$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция $\varphi(t) = \hat{\varphi}(t)\exp\{f(t) - \varepsilon(e^{i\nu t} - 1)\}$ является х. ф. некоторого з. р.*

Доказательство. Функция $\hat{\varphi}(t)$ является целой функцией и для $t = u + i\sigma$, u, $\sigma \in \boldsymbol{R}^1$, при достаточно больших по модулю σ, $|\sigma| \geqslant c$, и $|u| \geqslant 1$ имеет место оценка $|\varphi(u + i\sigma)| \leqslant \hat{\varphi}(i\sigma)\exp \times \times (-c_0|u|^\alpha)$ (4), где $c_0 = \gamma/2$, если $\gamma > 0$, и $c_0 = 1$, если $\gamma = 0$.

---

* $a_0 = a$, если $a > 0$, и $a_0 = 1$, если $a = 0$.

Докажем оценку (4), для определенности полагая $\sigma > 0$. При $\sigma < 0$ она доказывается аналогично. В силу соотношения (2), в котором можно считать $\alpha < 2$, имеет место оценка для $|u| \geqslant u_0 = u_0(\varphi, \alpha)$:

$$|\hat{\varphi}(u+i\sigma)| = \hat{\varphi}(i\sigma)\exp\left\{-2\int_{-a-0}^{b+0} e^{-\sigma x} x^{-2}\sin^2\frac{ux}{2}\, dG(x)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \hat{\varphi}(i\sigma)\exp\left\{-2\int_{-a-0}^{+0} x^{-2}\sin^2\frac{ux}{2}\, dG(x)\right\} \leqslant \hat{\varphi}(i\sigma)\, e^{-c_0|u|^\alpha},$$

доказывающая (4) при $|u| \geqslant u_0$. Если $\gamma > 0$, то оценка (4), очевидно, имеет место для всех u, $\sigma \in R^1$ с $\alpha = 2$. Пусть $\gamma = 0$. В этом случае в силу условия (2) существует число $u_1 = u_1(\hat{\varphi}, \alpha) \geqslant u_0 + 2/a$ такое, что $G(-1/u_1) - G(-2/u_1) > 0$. Учитывая это неравенство и неравенство $\sin u \geqslant 2u/\pi$, $0 \leqslant u \leqslant \pi/2$, заключаем для $|u| \leqslant u_0$ и достаточно больших $\sigma \geqslant \sigma_0(\hat{\varphi}, \alpha)$:

$$\int_{-a-0}^{+0} e^{-\sigma x} x^{-2}\sin^2\frac{ux}{2}\, dG(x) \geqslant e^{\sigma/u_1}\int_{-2/u_1}^{-1/u_1} x^{-2}\sin^2\frac{ux}{2}\, dG(x) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi^2} e^{\sigma/u_1}\{G(-1/u_1) - G(-2/u_1)\}\, u^2 \geqslant |u|^\alpha.$$

Последнее неравенство приводит к нужной оценке (4) для $1 \leqslant |u| \leqslant u_0$.

Обозначим через $p_\varepsilon(x)$ функцию

$$p_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\varphi(t)\, dt. \tag{5}$$

Из вида функции $\varphi(t)$ и оценки (4) непосредственно усматриваем, что по теореме Коши контур интегрирования в (5) можно переносить на любую горизонтальную прямую. Отсюда

$$p_\varepsilon(x) = \varphi(-i\sigma)\, e^{-\sigma x}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(u, x)\, du, \tag{6}$$

где

$$R(u, x) = e^{-iux}\varphi(u - i\sigma)/\varphi(-i\sigma),$$

а параметр $\sigma = \sigma_0$ для $|x| > c$ выбирается из условия $\frac{d}{d\sigma}\{\ln\varphi \times (-i\sigma) - \sigma x\} = 0$ (7). Очевидно, для достаточно больших $|x| > c$ уравнение (7) имеет единственное решение и это решение $\sigma_0 \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и $\sigma_0 \to -\infty$, $x \to -\infty$. Наша ближайшая задача — показать, что для $|x| > c$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ $p_\varepsilon(x) > 0$.

Рассмотрим на вещественной прямой множества $D_0 = \{u : |u| \leqslant \pi\}$, $D_k = \{u : |u - 2\pi qk| \leqslant \pi/4\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; $c \leqslant q \leqslant$

$\leqslant e^{6\nu|\sigma_0|/\alpha}$. Параметр q, как и σ_0, зависит, вообще говоря, от x и его выбор будет сделан ниже. Сразу отметим, что для $x > c$ q — натуральное число, а для $x < -c$ в случае $a > 0$ $q = 1/a$.

1. Оценки функции $R(u, x)$ на множестве D_0. Используя неравенство $|\sin u/u| \leqslant 1$, $u \in \boldsymbol{R}^1$, получаем для $u \in \boldsymbol{R}^1$:

$$-\ln|R(u, x)| = 2 \int\limits_{-a-0}^{b+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2} s^{-2}\, dG(s) - 2\varepsilon e^{\nu\sigma_0} \times$$

$$\times \sin^2 \frac{\nu u}{2} + 2 \int\limits_{\beta-h}^{\beta+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2}\, dG(s) + 2 \int\limits_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2}\, dG(s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left(\left(\int\limits_{-a-0}^{b+0} + \int\limits_{\beta-h}^{\beta+0} + \int\limits_{1-h}^{1+0} \right) e^{\sigma_0 s}\, dG(s) \right) u^2 = \frac{1}{2} \delta(\sigma_0) u^2. \qquad (8)$$

Для $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ $|\sin u| \geqslant \frac{2}{\pi}|u|$, поэтому для $u \in D_0$ имеем с учетом условия (3)

$$-\ln|R(u, x)| \geqslant \frac{2u^2}{\pi^2} \int\limits_{-a-0}^{b+0} e^{\sigma_0 s}\, dG(s) + \frac{\beta^2 u^2}{\pi^2} \int\limits_{\beta-h}^{\beta+0} e^{\sigma_0 s} \times$$

$$\times\, dG(s) + \frac{u^2}{\pi^2} \int\limits_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s}\, dG(s) \geqslant \beta^2 \delta(\sigma_0) u^2/\pi^2. \qquad (9)$$

Функция $\operatorname{Im}\ln R(u, x)$ — нечетная, поэтому ее значение и значение второй ее производной в нуле равно 0. Так как σ_0 удовлетворяет уравнению (7), то и значение первой производной $\operatorname{Im}\ln R(u, x)$ в точке нуль равно 0. Для $u \in \tilde{D}_0 = \{u : |u| \leqslant (\delta(\sigma_0))^{-5/12}\}$ получаем из формулы Тейлора представление

$$\operatorname{Im}\ln R(u, x) = \frac{1}{3!} (\operatorname{Im}\ln R(v, x))^{(3)}|_{v=\theta u} u^3, \ 0 < \theta < 1.$$

Из определения функции $\operatorname{Im}\ln R(u, x)$ легко следует такая ее оценка для $u \in \tilde{D}_0$:

$$|(\operatorname{Im}\ln R(v, x))^{(3)}|_{v=\theta u}| \leqslant \int\limits_{-a-0}^{b+0} |s| e^{\sigma_0 s}\, dG(s) + \varepsilon\nu^3 e^{\nu\sigma_0} +$$

$$+ |f^{(3)}(-i\sigma_0)| \leqslant 2\delta(\sigma_0).$$

Тогда из предыдущего представления следует неравенство для $u \in \tilde{D}_0$ $|\operatorname{Im}\ln R(u, x)| \leqslant \frac{1}{3}(\delta(\sigma_0))^{-1/4} \leqslant \pi/3$ **(10)**.

2. Оценки функции $R(u, x)$ на множествах D_k, $k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}$. Начиная с этого пункта, считаем $x > c$. Дальнейшие рассуждения

будем вести при условии, что параметр q подобран так, чтобы выполнялись для $u \in D_k$, $k \neq 0$, $|u| \leqslant \exp\{\nu\sigma_0/\alpha\}$, неравенства

$$\sin^2 \frac{\nu u}{2} \leqslant (u - 2\pi qk)^2 + e^{-2\nu\sigma_0}. \tag{11}$$

Обозначим $w = u - 2\pi qk$. Для $u \in D_k$ с учетом неравенств (4), (11) имеем

$$-\ln|R(u, x)| \geqslant c_0|u|^\alpha - 2\varepsilon\{w^2 + e^{-2\nu\sigma_0}\} e^{\nu\sigma_0} + 2\int\limits_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2}\, dG(s) \geqslant c_0|u|^\alpha - 1 - 2\varepsilon w^2 e^{\nu\sigma_0} + 2\int\limits_{1-(4|k|q)^{-1}}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2\left\{\pi qk(s-1) + \frac{ws}{2}\right\} dG(s). \tag{12}$$

Заметим теперь, что для $s \in [1-(4|k|q)^{-1}, 1]$ $|\pi qk(s-1) + ws/2| \leqslant \pi/2$, поэтому

$$\sin^2\{\pi qk(s-1) + ws/2\} \geqslant \frac{4}{\pi^2}\{\pi qk(s-1) + ws/2\}^2. \tag{13}$$

Поскольку с учетом (3) имеет место неравенство

$$\int\limits_{1-(4|k|q)^{-1}}^{1+0} e^{\sigma_0 s}\left\{\pi qk(s-1) + \frac{ws}{2}\right\}^2 dG(s) \geqslant e^{\sigma_0(1-(4|k|q)^{-1})} \times \int\limits_{1-|w|/(4|k|q\pi)}^{1+0} \frac{1}{16} w^2 s^2\, dG(s) \geqslant c e^{\sigma_0(1-(4|k|q)^{-1})} \frac{|w|^3}{|k|\, q}$$

и для $u \in D_k$, $|k| \geqslant 1$, $|u| \leqslant e^{\nu\sigma_0/\alpha}$ выполняется неравенство

$$c_0|u|^\alpha + c e^{\sigma_0(1-(4|k|q)^{-1})} \frac{|w|^3}{|k|\, q} \geqslant 4\varepsilon w^2 e^{\nu\sigma_0} + 2,$$

поэтому для функции $R(u, x)$ для рассматриваемых u из (12), (13) получаем оценку

$$-\ln|R(u, x)| \geqslant \frac{1}{2} c_0|u|^\alpha + \frac{4}{\pi^2} \int\limits_{1-(4|k|q)^{-1}}^{1+0} e^{\sigma_0 s}\left\{\pi qk(s-1) + \frac{ws}{2}\right\}^2 dG(s) = \frac{1}{2} c_0|u|^\alpha + Aw^2 + Bw + C, \tag{14}$$

где $Aw^2 + Bw + C$ — неотрицательный для всех $w \in \boldsymbol{R}^1$ полином, в котором коэффициент

$$A = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{1-(4|k|q)^{-1}}^{1+0} s^2 e^{\sigma_0 s}\, dG(s) \geqslant \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{1-(4|k|q)^{-1}}^{1+0} e^{\sigma_0 s}\, dG(s) = \hat{I}/(2\pi^2).$$

Для k, $1 \leqslant |k| \leqslant \sigma_0/(16q \ln \sigma_0)$ интеграл I запишем в виде

$$I = \int_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s}\, dG(s) - \int_{1-h}^{1-(4|k|q)^{-1}} e^{\sigma_0 s}\, dG(s) = I_1 - I_2.$$

В силу условия (3) первый интеграл этого равенства

$$I_1 \geqslant \int_{1-1/\sigma_0}^{1+0} e^{\sigma_0 s}\, dG(s) \geqslant c\sigma_0^{-1} e^{\sigma_0}.$$

Для второго интеграла выполняется

$$I_2 \leqslant \int_{1-h}^{1-4\ln\sigma_0/\sigma_0} e^{\sigma_0 s}\, dG(s) \leqslant c\,\sigma_0^{-4} e^{\sigma_0}.$$

Сравнивая последние два неравенства, для указанных выше k имеем оценку

$$\hat{I} \geqslant \frac{1}{4} f(-i\sigma_0). \tag{15}$$

Для k, $|k| \geqslant \sigma_0/(16q \ln \sigma_0)$ получаем с помощью условия (3)

$$\hat{I} \geqslant ce^{\sigma_0(1-(4|k|q)^{-1})}(|k|q)^{-1} \geqslant ce^{\sigma_0}(|k|q)^{-5} \geqslant f(-i\sigma_0)(|k|q)^{-6}. \tag{16}$$

В конце этого пункта отметим такую простую оценку, которой будем пользоваться для $|u| \geqslant \exp\{\nu\sigma_0/\alpha\}$:

$$-\ln|R(u, x)| \geqslant c_0|u|^\alpha - 2\varepsilon e^{\nu\sigma_0} \geqslant \frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha. \tag{17}$$

3. Выбор параметра q. Конкретизируем ситуацию, т. е. в случае, когда точка β — рациональная или иррациональная, укажем выбор множеств D_k, $|k| \geqslant 1$, с некоторым q, вообще говоря, зависящим от x так, чтобы выполнялось соотношение (11). После такой конкретизации продолжим оценку функции $R(u, x)$ вне множества $\Gamma^0 \cup C\Gamma_x$, где множества Γ^0 и Γ_x определяются следующим образом:

$$\Gamma_x = \{u : |u| \leqslant e^{\nu|\sigma_0|/\alpha}\},\ \Gamma^0 = \Gamma_x \cap \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} D_k.$$

Если точка β — рациональная, т. е. $\beta = m/n$, m, n — взаимно простые натуральные числа, то в качестве q при образовании множеств D_k берем $q = n$.

Если точка β — иррациональная, то, как хорошо известно из теории цепных дробей, для любого $\tau > 1$ можно указать рациональное число m/n (m, n — взаимно простые натуральные числа), что выполняется

$$\beta = mn^{-1} + \theta n^{-1}\tau^{-1},\ |\theta| \leqslant 1,\ n \leqslant \tau. \tag{18}$$

В нашем случае в качестве τ возьмем $\tau = \exp\{6\nu\sigma_0/\alpha\}$ и по нему укажем $m = m(x)$ и $n = n(x)$. При этом при образовании множеств D_k берем $q = n = n(x)$.

То, что при таком выборе q условие (11) выполняется, проверим чуть ниже. Пока выясним, в каком множестве содержатся точки $u \in \Gamma_x$, для которых

$$f(-i\sigma_0) - \mathrm{Re}\, f(u - i\sigma_0) = 2 \int\limits_{\beta-h}^{\beta+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2}\, dG(s) +$$

$$+ 2 \int\limits_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2}\, dG(s) \leqslant \exp(\nu\sigma_0). \tag{19}$$

Покажем, что те $u \in \Gamma_x$, для которых выполняется (19), удовлетворяют соотношениям

$$\left|\sin \frac{u}{2}\right| \leqslant \exp\left\{-\sigma_0\left(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{\alpha}\right)\right\} = \xi, \tag{20}$$

$$\left|\sin \frac{\beta u}{2}\right| \leqslant \exp\left\{-\sigma_0\left(\frac{1}{3}\beta - \frac{\nu}{\alpha}\right)\right\} = \eta. \tag{21}$$

Действительно, если бы не выполнялось (20), т. е. $\left|\sin \frac{1}{2} u\right| > \xi$, то при s, $0 \leqslant 1 - s \leqslant \xi \exp(-\nu\sigma_0/\alpha) = \xi_1$ и $u \in \Gamma_x$ получаем с помощью формулы Тейлора неравенство $|\sin\{u(1 + (s-1))/2\}| > \xi/2$. Из него с учетом (3) приходим к оценке

$$\int\limits_{1-h}^{1+0} e^{\sigma_0 s} \sin^2 \frac{us}{2}\, dG(s) \geqslant \int\limits_{1-\xi_1}^{1+0} \frac{1}{4}\, \xi^2 e^{\sigma_0 s} dG(s) \geqslant$$

$$\geqslant c\xi^3 e^{\sigma_0 - \nu\sigma_0/\alpha} \geqslant c e^{2\nu\sigma_0/\alpha},$$

которая при достаточно больших $x \geqslant c$ противоречит (19). Аналогично доказывается соотношение (21).

4. Оценка функции $f(u - i\sigma_0)$ на множестве $C\Gamma^0 \cap \Gamma_x$ для рационального β. В этом случае $\nu = m_1/n$, $m_1 \in N$, и условие (11), очевидно, выполнено. Из соотношений (20), (21) следует, что $u = 2\pi k_1 + B_1\xi$, $\frac{m}{n} u = 2\pi k_2 + B_2\eta$, $|B_j| \leqslant 2$ (22). Числа m, n — взаимно простые, поэтому найдутся взаимно простые целые числа $\tilde{m}$, $\tilde{n}$, $|\tilde{m}| < n$, $|\tilde{n}| < m$, что $m\tilde{m} + n\tilde{n} = 1$. Умножая первое из соотношений (22) на $\tilde{n}n$, а второе — на $\tilde{m}n$ и складывая их, получаем $u = 2\pi q(k_1\tilde{n} + k_2\tilde{m}) + (B_1\tilde{n}\xi + B_2\tilde{m}\eta)q$. Отсюда видно, что для $x \geqslant c$ множество тех $u \in \Gamma_x$, для которых выполнено неравенство (19), содержится во множестве Γ^0. Значит, для $u \in C\Gamma^0 \cap \Gamma_x$ выполняется $f(-i\sigma_0) - \mathrm{Re}\, f(u - i\sigma_0) > \exp(\nu\sigma_0)$ (23).

5. Оценка функции $f(u - i\sigma_0)$ на множестве $C\Gamma^0 \cap \Gamma_x$ для иррационального β. Проверим сначала выполнение условия (11). Так как $\nu \in M\{\beta, 1\}$, то $\nu = p_1\beta + p_2$, где p_1, p_2 — целые числа. Поэтому число ν представимо в виде

$$\nu = p_1(mn^{-1} + \theta n^{-1}\tau^{-1}) + p_2 = (p_2 n + p_1 m)q^{-1} + p_1\theta q^{-1}\tau^{-1}.$$

Пусть $u \in D_k \cap \Gamma_x$, т. е. $u = 2\pi qk + \omega$, $|\omega| \leqslant \pi/4$, $|k| \leqslant e^{\nu\sigma_0/\alpha}$, тогда имеем

$$\sin^2 \frac{\nu u}{2} = \sin^2\left(\pi p_1 \theta k \tau^{-1} + \frac{\omega\nu}{2}\right) \leqslant \omega^2 + e^{-2\nu\sigma_0},$$

что и требовалось показать.

Вернемся к соотношениям (20), (21) для $u \in \Gamma_x$. Для чисел $u \in \Gamma_x$ им удовлетворяющих с учетом представления (18) числа β получаем

$$u = 2\pi k_1 + B_1\xi,\ \frac{m}{n} u = 2\pi k_2 + B_2\eta + \frac{\theta u}{n\tau},\ |B_j| \leqslant 2. \tag{24}$$

Отсюда так же, как и в пункте 4, приходим к представлению

$$u = 2\pi q (k_1 \tilde{n} + k_2 \tilde{m}) + (B_1 \tilde{n}\xi + B_2 \tilde{m}\eta) q + \frac{\theta \tilde{m} u}{\tau}. \tag{25}$$

Пусть $q < \exp(4\nu\sigma_0/\alpha)$ и $u \in \Gamma_x$, тогда справедлива оценка

$$|B_1\tilde{n}\xi + B_2\tilde{m}\eta|\, q + \frac{\theta \tilde{m}|u|}{\tau} \leqslant c\left(q^2\eta + \frac{q|u|}{\tau}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\exp\left\{-\sigma_0\left(\frac{1}{3}\beta - \frac{9\nu}{\alpha}\right)\right\} + \exp\left(-\frac{\nu\sigma_0}{\alpha}\right)\right).$$

Эта оценка в применении к (25) показывает, что рассматриваемые u лежат во множестве Γ^0. Значит, вне Γ^0 для рассматриваемых u выполнено неравенство (23).

Пусть $q \geqslant \exp(4\nu\sigma_0/\alpha)$ и $u \in \Gamma_x$, т. е. $|u| \leqslant q^{1/4}$. Деля обе части равенства (25) на q, получаем $k_1\tilde{n} + k_2\tilde{m} = 0$. Поскольку $\tilde{m}$ и $\tilde{n}$ взаимно просты, имеем отсюда $k_1 = k_3\tilde{m}$, $k_2 = -k_3\tilde{n}$, $k_3 \in \boldsymbol{Z}$. Если $|\tilde{m}| \geqslant q^{2/3}$, то, деля обе части первого из равенств (24) на $\tilde{m}$, получаем $k_3 = 0$ и числа $u \in D_0$. Если $|\tilde{m}| < q^{2/3}$, то принадлежность $u \in D^0$ следует, как легко видеть, из соотношения (25). Значит, и в этом случае рассматриваемые u принадлежат множеству Γ^0 и вне $\Gamma^0 \cup C\Gamma_x$ выполнено неравенство (23).

6. Оценки интегралов от функции $R(u, x)$, $x > c$. Обозначим через $I(S, R)$ — интеграл от функции $R(u, x)$ по множеству S. Оценим сначала снизу $I(D_0, R)$. Для этого воспользуемся неравенствами (8) — (10). Получаем

$$I(D_0, R) \geqslant I(\tilde{D}_0, R) - |I(D_0 \setminus \tilde{D}_0, R)| \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\tilde{D}_0} |R(u, x)| \cos\{\operatorname{Im}\ln R(u, x)\}\, du - \int_{D_0 \setminus \tilde{D}_0} |R(u, x)|\, du \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int_{\tilde{D}_0} |R(u, x)|\, du - \int_{D_0 \setminus \tilde{D}_0} |R(u, x)|\, du \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{|u| < (\delta(\sigma_0))^{-5/12}} e^{-\frac{1}{2}\delta(\sigma_0) u^2}\, du -$$
$$- \int\limits_{|u| > (\delta(\sigma_0))^{-5/12}} e^{-\frac{\beta^2}{2\pi^2}\delta(\sigma_0) u^2}\, du \geqslant (\delta(\sigma_0))^{-1/2} -$$
$$- (\delta(\sigma_0))^{-1/2} e^{-(\delta(\sigma_0))^{1/12}} \geqslant \frac{1}{2}(\delta(\sigma_0))^{-1/2}. \tag{26}$$

Для оценки интегралов $I(D_k, R)$, $D_k \subset \Gamma_x$, воспользуемся неравенством (14). Из этого неравенства легко получаем

$$|I(D_k, R)| \leqslant e^{-c_0 q^\alpha k^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Aw^2 - Bw - C} dw \leqslant e^{-c_0 q^\alpha k^\alpha} \left(\frac{\pi}{A}\right)^{1/2}. \quad (27)$$

Отсюда с помощью оценки (15) и $\delta(\sigma_0) \leqslant 2f(-i\sigma_0)$ имеем

$$|I(\bigcup_{1<|k|<|\sigma_0|/(16q\ln|\sigma_0|)} D_k, R)| \leqslant 20(f(-i\sigma))^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-c_0 q^\alpha k^\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant 40\Gamma(1+1/\alpha) c_0^{-1/\alpha} q^{-1} (\delta(\sigma_0))^{-1/2}. \quad (28)$$

Из (27) и (16) получаем

$$|I(\Gamma_x \cap \bigcup_{|k|>|\sigma_0|/(16q\ln|\sigma_0|)} D_k, R)| \leqslant (f(-i\sigma_0))^{-1/2} \sum_{|k|>|\sigma_0|/(16q\ln|\sigma_0|)} |qk|^4 \times$$
$$\times e^{-c_0 q^\alpha |k|^\alpha} \leqslant ce^{-\sigma_0^{\alpha/2}} (f(-i\sigma_0))^{-1/2} \leqslant ce^{-|\sigma_0|^{\alpha/2}} (\delta(\sigma_0))^{-1/2}. \quad (29)$$

Из неравенства (17) вытекает оценка

$$|I(C\Gamma_x, R)| \leqslant \int_{C\Gamma_x} e^{-\frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha} du \leqslant e^{\frac{1}{4} c_0 e^{\nu\sigma_0}} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\sigma_0} (f(-i\sigma_0))^{-1/2} \leqslant 2e^{-|\sigma_0|} (\delta(\sigma_0))^{-1/2}. \quad (30)$$

Поскольку, как доказано в пп. 4, 5, на множестве $C\Gamma^0 \cap \Gamma_x$ справедливо соотношение (23), то приходим к неравенству

$$|I(C\Gamma^0 \cap \Gamma_x, R)| \leqslant \int_{C\Gamma^0 \cap \Gamma_x} e^{-\frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha - (1-\varepsilon) e^{\nu\sigma_0}} du \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\sigma_0} (f(-i\sigma_0))^{-1/2} \leqslant 2e^{-|\sigma_0|} (\delta(-i\sigma_0))^{-1/2}. \quad (31)$$

7. Оценки интегралов от функции $R(u, x)$, $x < -c$. Предположим сначала, что $\gamma = G(+0) - G(0) > 0$. Тогда $\hat{\varphi}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t^2\right)$ и для отрицательных $x < -c$ в формуле (6) положим $\sigma_0 = x/2\gamma$. Такой выбор σ_0 проводим только в случае $\gamma > 0$ и $a = b = 0$. Из вида функции $R(u, x)$ непосредственно усматриваем, что оценка (10) для $\operatorname{Im} \ln R(u, x)$ сохраняется для всех $u \in \boldsymbol{R}^1$. Кроме того, оценка (8) была получена для любых σ_0 и, значит, верна при нашем выборе $\sigma_0 = x/2\gamma$. Учитывая эти два обстоятельства, имеем для $x \leqslant -c$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$

$$I(\boldsymbol{R}^1, R) = \int_{-\infty}^{\infty} |R(u, x)| \cos\{\operatorname{Im} \ln R(u, x)\} du \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |R(u, x)| du \geqslant 0.$$

Пусть $\gamma = 0$ и $a = \mu > 0$. В этом случае справедливы оценки (8)—(10) п. 1, доказанные для $|x| \geqslant c$, и потому верны оценки (26) для $x \leqslant -c$. При образовании множеств D_k считаем $q = 1/a$. На каждом множестве D_k, $k \in \boldsymbol{Z} \diagdown \{0\}$, справедлива оценка

$$-\ln|R(u,\ x)| \geqslant \frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha + \left(\frac{2}{\pi a}\right)^2 \int\limits_{-a}^{-a(1-(4|k|)^{-1})} e^{\sigma_0 s} \times$$
$$\times \left\{\frac{\pi k}{a}(s+a) + \frac{ws}{2}\right\}^2 dG(s) - 1 \geqslant \frac{1}{2} c_0 |u|^\alpha - 1 + Aw^2 + Bw + C, \tag{32}$$

где $Aw^2 + Bw + C$ — неотрицательный для всех $w \in \boldsymbol{R}^1$ многочлен, у которого коэффициент A допускает оценки

$$A \geqslant -\frac{1}{4\pi^2} (\ln \hat{\varphi})^{(2)} (-i\sigma_0),\ |k| \leqslant |\sigma_0|/(16q \ln|\sigma_0|), \tag{33}$$

$$A \geqslant -\frac{1}{\pi^2 |qk|^6} (\ln \hat{\varphi})^{(2)} (-i\sigma_0),\ |k| > |\sigma_0|/(16q \ln|\sigma_0|. \tag{34}$$

Неравенство (32) является для $x \leqslant -c$ аналогом неравенства (14), а неравенства (33), (34) являются аналогами неравенств (15), (16) и доказываются они почти дословным повторением рассуждений, приведенных в п. 2. Поэтому для $x \leqslant -c$ справедливы оценки (28), (29). Для $u \overline{\in} \Gamma_x$, очевидно, справедлива оценка (17) при $x < -c$, что влечет за собой для таких x оценку (30). Почти дословно повторяя рассуждение п. 3, получаем для $u \in C\Gamma^0 \cap \Gamma_x$ и достаточно малых $x < -c$ $\ln \hat{\varphi}(-i\sigma_0) - \ln|\hat{\varphi}(u - i\sigma_0)| > \exp(\nu|\sigma_0|)$ (35), что влечет за собой оценку (31). Таким образом, полученные нами оценки интегралов от функции $R(u,\ x)$ для достаточно больших $x > c$ сохраняет силу и для достаточно малых $x < -c$.

8. Оценки функции $p_\varepsilon(x)$ для больших по модулю x. Покажем теперь, что для $|x| > c$ и малых $\varepsilon > 0$ $p_\varepsilon(x) > 0$. Для этого запишем неравенство:

$$I(\boldsymbol{R}^1,\ R) \geqslant I(D_0,\ R) - \Big|I\Big(\Gamma_x \cap \bigcup_{k \in \boldsymbol{Z} \diagdown \{0\}} D_k,\ R\Big)\Big| -$$
$$-|I(C\Gamma_x,\ R)| - |I(C\Gamma^0 \cap \Gamma_x,\ R)|.$$

Воспользуемся оценками (26)—(31). С их помощью получаем неравенство при $x < 0$, $a > 0$ и $x > 0$, $a \geqslant 0$:

$$I(\boldsymbol{R}^1,\ R) \geqslant \left\{\frac{1}{2} - \frac{40\Gamma(1 + 1/\alpha)}{qc_0^{1/\alpha}} - ce^{-|\sigma_0|^{\alpha/2}} - 4e^{-|\sigma_0|}\right\} (\delta(\sigma_0))^{-1/2},$$

верное для достаточно больших по модулю x. Поскольку параметр q предполагается достаточно большим, $q \geqslant 10^3 \Gamma(1 + 1/\alpha) c_0^{-1/\alpha}$, и для таких больших q справедливо предыдущее неравенство для $|x| \geqslant c$, то из него извлекаем нужную оценку при $x < -c$, $a > 0$ и $x > c$, $a \geqslant 0$:

$$I(\boldsymbol{R}^1,\ R) \geqslant \frac{1}{4} (\delta(\sigma_0))^{-1/2} > 0. \tag{36}$$

Из оценок (9), (27)—(31) аналогично получаем такое неравенство:

$$I(\boldsymbol{R}^1,\ R) \leqslant 2\pi(\delta(\sigma_0))^{-1/2}, \qquad (37)$$

которое нам понадобится ниже, верное при $x < -c$, $a > 0$ и $x > c$, $a \geqslant 0$.

Вернемся к формуле (6). Функция $\varphi(t)$ при $\varepsilon = 0$ является х. ф. безгранично делимого з. р. F_0. Так как выполнено условие (2), то или $\gamma > 0$, или в любой сколь угодно малой полуокрестности нуля имеются точки роста функции $G(x)$. В первом случае у з. р. F_0 существует $p_0(x)$ — непрерывная строго положительная для всех $x \in \boldsymbol{R}^1$ плотность. То же самое имеет место и во втором случае, что следует из такой леммы.

Лемма 1. *Пусть х. ф. $\varphi(t;\ F)$ безгранично делимого з. р. F принадлежит пространству $L(-\infty,\ \infty)$ и в любой сколь угодно малой полуокрестности нуля имеются точки роста функции $G(x)$. Тогда у з. р. F существует непрерывная строго положительная для всех $x \in \boldsymbol{R}^1$ плотность.*

Доказательство леммы в силу его простоты не приводим. Из определения функций $\varphi(t)$ видим, что на каждом конечном отрезке выполняется $p_\varepsilon(x) \rightrightarrows p_0(x)$, $\varepsilon \to 0$. Отсюда следует, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ $p_\varepsilon(x) > 0$ и для $|x| \leqslant c$. Тем самым теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть з. р. F удовлетворяет условиям теоремы 1, тогда функция $\varphi(t)$ из теоремы 2, где $\nu = 1/n$, а вместо $f(t)$ берется функция*

$$f_1(t) = d_1(e^{i\beta t} - 1) + d_2(e^{it} - 1),\ \beta = m/n,$$

$d_j > 0$, $j = 1,\ 2$, *— постоянные* $m,\ n \in \boldsymbol{N}$, $m \neq 1$, $m < n$ *— взаимно простые, является при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *х. ф. некоторого з. р.*

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \exp\{f_1(t) - \varepsilon(e^{it/n} - 1)\}.$$

Эта функция является $2\pi n$-периодической целой функцией и допускает представление

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ikt/n}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < +\infty.$$

Из формулы Эйлера для коэффициентов Фурье следует

$$b_k = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi n}^{\pi n} e^{-ikt/n} g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi n - i\sigma_0}^{\pi n - i\sigma_0} e^{-ikz/n} \times$$

$$\times\, g(z)\,dz = g(-i\sigma_0)\,e^{-\sigma_0 k/n}\,\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi n}^{\pi n} R_1(u,\ k/n)\,du,$$

где функция $R_1(u,\ k/n)$ строится по той же формуле, что функция $R(u,\ x)$, только с заменой функции $\varphi(t)$ на функцию $g(t)$, σ_0 является решением уравнения (7) для функции $g(t)$. Легко видеть, что для достаточно больших $k \geqslant c$ у уравнения (7) для $g(t)$ имеется единственное решение $\sigma_0 > c$. Определим, как и ранее, множество D_0. Легко видеть, что для функции $g(t)$ сохранятся рассуждения п. 1, а потому оценки (8) — (10), из которых следует оценка (26) для $I(D_0, R_1)$ с $\delta(\sigma_0) = f_1(-i\sigma_0)$. Для функции $f_1(t)$ сохраняются, очевидно, выводы пп. 3, 4 при выборе $q = n$. Значит, для $f_1(t)$ при $u \in CD_0 \cap [-\pi n, \pi n] = \tilde{\Gamma}$ справедлива оценка (23), которая влечет за собой оценку (31) для интеграла $I(\tilde{\Gamma}, R_1)$. Из аналогов оценок (26), (31) для функции $R_1(u, k/n)$ для достаточно больших $k \geqslant k_0 = k_0(f_1)$ и малых $\varepsilon > 0$ легко получаем

$$2\pi n \{ g(-i\sigma_0)\}^{-1} e^{\sigma_0 k/n} b_k \geqslant I(D_0, R_1) - |\tilde{I}(\Gamma, R_1)| \geqslant \geqslant \frac{1}{4} (\delta(\sigma_0))^{-1/2}. \quad (38)$$

Вернемся к функции $\varphi(t)$ и рассмотрим функцию $p_\varepsilon(x)$, определенную в (5). Эта функция, очевидно, записывается в виде

$$p_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \hat{p}(x - k/n),$$

где $\hat{p}(x)$ — плотность з. р. с х. ф. $\hat{\varphi}(t)$, непрерывная, строго положительная в силу леммы 1 функция. Эта плотность обладает еще одним нужным нам свойством, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма 2. *Для плотности* $\hat{p}(x)$ *з. р. с х. ф.* $\hat{\varphi}(t)$ *выполняется соотношение для любого фиксированного* $d > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \hat{p}(x+d)/\hat{p}(x) = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \hat{p}(x-d)/\hat{p}(x) = 0.$$

Доказательство леммы приведем ниже, а пока с ее помощью закончим доказательство теоремы 3. Для достаточно больших по модулю x, $|x| \geqslant c$, в силу леммы 2 справедливо неравенство

$$-\sum_{k=1}^{k_0} b_k \hat{p}(x - k/n) \leqslant \frac{1}{2} b_0 \hat{p}(x) + \frac{1}{2} b_{k_0+1} \hat{p}(x - (k_0+1)/n), \quad (39)$$

верное для малых $\varepsilon > 0$, поскольку в силу (38) $b_{k_0+1} > c$ и $b_0 > e^{-d_1-d_2}$ для всех малых $\varepsilon > 0$. Из этого неравенства видим, что $p_\varepsilon(x) > 0$ для $|x| \geqslant c$. Число отрицательных коэффициентов b_k не превосходит $k_0 \leqslant c$ и при $\varepsilon \to 0$ они стремятся к неотрицательным пределам. Поэтому для $|x| \leqslant c$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ неравенство (39) сохраняет свою силу, из чего заключаем, что $p_\varepsilon(x) > 0$ для $|x| \leqslant c$ и малых $\varepsilon > 0$. Теорема 3 доказана.

Доказательство леммы 2. Докажем ее для $x \to +\infty$. Для $x \to -\infty$ она доказывается аналогично. В случае, когда $\hat{p}(x)$ — плотность з. р. Гаусса, утверждение леммы 2 очевидно. Пусть $\gamma = 0$. В теореме 2 для интегралов $I(\boldsymbol{R}^1, R)$ были доказаны неравенства (36), (37), верные для больших по модулю x. Легко видеть, что эти неравенства остаются справедливыми для больших по модулю

x, если в определении функции $\varphi(t)$ потребовать, чтобы $f(t) \equiv 0$, $\varepsilon = 0$. Иными словами, имеет место оценка

$$\frac{1}{4}(\delta(\sigma_0))^{-1/2}\hat{\varphi}(-i\sigma_0)e^{-\sigma_0 x} \leqslant \hat{p}(x) \leqslant 2\pi(\delta_0(\sigma_0))^{-1/2} \times$$
$$\times \hat{\varphi}(-i\sigma_0)e^{-\sigma_0 x}, \ \delta(\sigma_0) = -(\ln\hat{\varphi})^{(2)}(-i\sigma_0), \ |x| \geqslant c. \tag{40}$$

Предварительно отметим, что параметр σ_0 зависит от x, т. е. $\sigma_0 = \sigma_0(x)$ и является дифференцируемой монотонно растущей к $+\infty$ функцией. Из определения параметра σ_0 видим, что для больших x $c_1 x \leqslant \delta(\sigma_0) \leqslant c_2 x$, $c_j > 0$, $j = 1, 2$, — постоянные. Поэтому с помощью соотношения (40) запишем

$$\frac{\hat{p}(y+d)}{\hat{p}(y)} \leqslant 10\pi\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\exp\left\{\int_y^{y+d}\frac{d}{dx}(\ln\hat{\varphi}(-i\sigma_0) - \sigma_0 x)\,dx\right\}. \tag{41}$$

Учитывая определение σ_0, получаем

$$\frac{d}{dx}(\ln\hat{\varphi}(-i\sigma_0) - \sigma_0 x) = -\sigma_0.$$

Поскольку $\sigma_0(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то из неравенства (41) получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Сейчас нам понадобится одна лемма Ю. В. Линника, доказанная, по существу, на с. 156—157 в [3].

Лемма 3. *Пусть $G(x)$ — непрерывная монотонная функция на отрезке $[\rho_1, \rho_2]$ и $|G(\rho_2) - G(\rho_1)| > 0$. Тогда найдутся числа ζ_1, ζ_2, $\rho_1 < \zeta_1 < \zeta_2 < \rho_2$, такие, что*

$$|G(\zeta_1) - G(\zeta_1 - h)| > ch, \ |G(\zeta_2) - G(\zeta_2 - h)| > ch,$$

для достаточно малых $h > 0$, а число ζ_1/ζ_2 или иррациональное, или рациональное со знаменателем, большим наперед заданного положительного числа.

Пусть з. р. F удовлетворяет условиям теоремы 1. Покажем, что на правой полуоси функция $G(x)$ — дискретная и ее точки роста, упорядоченные по возрастанию, таковы, что следующая делится нацело на предыдущую. Докажем сначала, что $G(x)$ на правой полуоси нельзя представить в виде $G(x) = G_1(x) + G_2(x)$, где $G_j \times (x)$, $j = 1, 2$, — неубывающие функции, причем $G_2(x)$ — непостоянна и непрерывна. Если бы это было так, то в силу леммы 3 нашлись бы точки $\zeta_1 < \zeta_2$, удовлетворяющие условиям леммы 3. Не уменьшая общности, считаем, что $\zeta_1 = \beta$, $0 < \beta < 1$, а $\zeta_2 = 1$. Поскольку из условия (2) теоремы следует, что или в точке 0 у функции $G(x)$ есть скачок, или в любой сколь угодно малой левой и правой полуокрестностях точки нуль есть точки роста функции $G(x)$, то с помощью леммы 3 заключаем, что во втором случае найдутся точки μ, $\zeta > 0$, удовлетворяющие условию (3). Таким образом, если $G_2(x)$ — непостоянна, то $\varphi(t; F) = \varphi(t)\varphi_1(t)$, где функция $\varphi(t)$ определена в теореме 2 и потому является для малых $\varepsilon > 0$ х. ф. некоторого з. р., а $\varphi_1(t)$, очевидно, х. ф. некоторого з. р.

Поскольку $\varphi(t)$ — х. ф. не безгранично делимого з. р., то у з. р. F в силу теоремы А. Я. Хинчина имеется неразложимая компонента, чего в силу условий теоремы 1 быть не может. Значит, на правой полуоси функция $G(x)$ дискретна. Выберем на этой полуоси любые ее две точки роста. Если отношение двух таких точек — иррациональное число, то, повторяя предыдущее рассуждение, снова с помощью теоремы 2 придем к наличию у з. р. F неразложимой компоненты, что невозможно. Таким образом, отношение ζ_1/ζ_2 любых двух положительных точек роста ζ_1, ζ_2, $\zeta_1 < \zeta_2$, функции $G(x)$ — рациональное число. Представим это отношение в виде m/n, $m, n \in \mathbf{N}$ — взаимно простые. Не уменьшая общности, считаем, что одна из точек роста $\zeta_1 = \beta = m/n$, а вторая $\zeta_2 = 1$. Если $m \neq 1$, то приведенное выше рассуждение проходит для функции $\varphi(t)$, определенной в теореме 3. Но это означает, что положительные точки роста функции $G(x)$ можно занумеровать в порядке возрастания и каждая следующая точка роста функции $G(x)$ делится на предыдущую.

Ясно, что рассуждение, приведенное для $x > 0$, сохраняет силу и для $x < 0$. Тем самым теорема 1 доказана.

Список литературы: 1. *Линник Ю. В.* Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. I // Теория вероятн. и ее примен. 1958. **3**, №1. С. 3—40. 2. *Линник Ю. В.* Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. II // Теория вероятн. и ее примен. 1959. **4**, № 1. С. 55—85. 3. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. М., 1972. 480 с. 4. *Фрынтов А. Е.* О факторизации безгранично делимых распределений // Теория вероятн. и ее примен. 1975. **20**, №3. С. 661—664.

Поступила в редколлегию 15. 05. 87