УДК 517.544

Б. П. БУЗИНОВСКИЙ, В. Н. МАЦКУЛ, А. П. СВЕТНОЙ

К РЕШЕНИЮ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть L — единичная окружность с центром в начале координат, разбивающая комплексную плоскость на две области: D^+ и D^-, содержащую точку $z=\infty$.

Найти интегрируемые на L и аналитические соответственно в областях $D^\pm$ функции $\varphi^\pm(z)$ по краевому условию:

$$\varphi^+(t) = a(t)\,\varphi^-(t) + b(t)\,\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \quad t\in L, \ \varphi^-(\infty) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi^\pm(t)$ — граничные значения функций $\varphi^\pm(z)$ из областей $D^\pm$ соответственно, а функции $a(t)\neq 0$, $b(t)$, $f(t)$ определены на L и в точках t_j ($j=\overline{1,k}$) контура L имеют разрывы первого рода, а на концах дуг $\overline{t_jt_{j+1}}$ ($j=\overline{1,k}$; $t_{k+1}\equiv t_1$) существуют односторонние пределы слева и справа у производных от функций $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ до порядка $r\geqslant 0$ включительно, но

$$\begin{gathered} a^{(\nu)}(t_j+0)\neq a^{(\nu)}(t_j-0), \ b^{(\nu)}(t_j+0)\neq b^{(\nu)}(t_j-0), \\ f^{(\nu)}(t_j+0)\neq f^{(\nu)}(t_j-0), \ j=\overline{1,k}; \ \nu=\overline{0,r}, \end{gathered} \tag{2}$$

а на дугах $\overset{\frown}{t_jt_{j+1}}$: $a(t)$, $b(t)$, $f(t)\in H_\lambda^{(r)}$ $(0<\lambda<1)$.

Отметим, что в (2) при некоторых значениях j и ν могут встречаться и равенства, т. е. точки разрывов функций $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$

могут как совпадать, так и не совпадать. Ясно, что краевое условие (1) имеет место всюду на L, за исключением, может быть, точек t_j.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1) разрешима. Теория разрешимости задачи (1) при различных предположениях относительно контура L и коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ рассмотрена в [1]. В настоящее время наиболее полные результаты в этом направлении получены в работах [2], когда $a(t)$. $b(t)$, $f(t) \in H_\lambda$, а также [3], когда $a(t) \in M$ (введенный в [4] класс множителей, не влияющих на факторизацию), $b(t) \in L_\infty$, $f(t) \in L_2$. В [2,3] контур L — единичная окружность либо действительная прямая.

В связи с тем что в приложениях (см., напр. [4]) часто встречается случай разрывных коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$, представляет интерес исследование свойств решений задачи (1) вблизи точек разрыва коэффициентов. В настоящей работе разрабатывается метод выделения особенностей решений задачи (1) в точках разрыва ее коэффициентов, основанный на сведении задачи (1) к матричной задаче Римана с разрывными коэффициентами. Полученное решение содержит не только главные части этих особенностей, но и более гладкие их слагаемые.

1^0. Сведение обобщенной задачи Римана к матричной задаче Римана

Следуя [1], введем новые неизвестные функции $\Phi_1^\pm(z)$, $\Phi_2^\pm(z)$, аналитические соответственно в $D^\pm$, формулами

$$\begin{aligned} &\Phi_1^+(z) = \varphi^+(z),\ \Phi_2^+(z) = \frac{1}{z}\overline{\varphi^-\left(\frac{1}{\bar z}\right)},\ z \in D^+,\\ &\Phi_1^-(z) = -\varphi^-(z),\ \Phi_2^-(z) = \frac{1}{z}\overline{\varphi^+\left(\frac{1}{\bar z}\right)},\ z \in D^-. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда условие (1) приводится к краевой задаче Римана для системы двух кусочно-аналитических функций:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),\ t \in L,\ \Phi^-(\infty) = 0, \tag{4}$$

где $\Phi^\pm(z) = (\Phi_1^\pm(z),\ \Phi_2^\pm(z))$,

$$G(t) = \frac{1}{\overline{a(t)}}\begin{pmatrix} |b(t)|^2 - |a(t)|^2 & tb(t) \\ \overline{tb(t)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(t) = \frac{1}{\overline{a(t)}}\begin{pmatrix} \overline{a(t)}\, f(t) - b(t)\, \overline{f(t)} \\ -\overline{tf(t)} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\det G(t) = -a(t) \neq 0$, $t \in L$, а краевое условие (4) имеет смысл всюду на L, за исключением, быть может, точек $t_j\ (j = \overline{1, k})$, в которых, вообще говоря,

$$G^{(\nu)}(t_j - 0) \neq G^{(\nu)}(t_j + 0),\ g^{(\nu)}(t_j - 0) \neq g^{(\nu)}(t_j + 0),\ j = \overline{1, k};\ \nu = \overline{0, r}. \tag{5}$$

Эквивалентность задач (1) и (4) понимаем в том смысле, что каждому исчезающему на бесконечности решению задачи (1) соответствует по формулам (3) решение задачи (4) и наоборот, т. е. можно осуществить переход к решению задачи (1) по формулам

$$\begin{aligned} \varphi^+(z) &= \frac{1}{2}\left(\Phi_1^+(z) + \frac{1}{z}\overline{\Phi_2^-}\left(\frac{1}{z}\right)\right), \ z \in D^+, \\ \varphi^-(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\overline{\Phi_2^+}\left(\frac{1}{z}\right) - \Phi_1^-(z)\right), \ z \in D^-. \end{aligned} \tag{6}$$

2⁰. Решение матричной задачи Римана с разрывными коэффициентами

Введем вспомогательные разрывные функции. Пусть t_0 — одна из точек разрыва, а z_0 — произвольная точка из D^+. Обозначим через l простую линию, соединяющую точки z_0, t_0, ∞ и имеющую с L общую точку t_0. Рассмотрим функцию $u_1(z) = \ln(z - t_0)$ **(7)**, определенную на всей плоскости, разрезанной вдоль l', где l' — часть l, соединяющая точки t_0 и ∞. Очевидно, что $u_1(z)$ — аналитическая в D^+.

Введем в рассмотрение функцию $u_2(z) = \ln(z - z_0)$, определенную на всей плоскости, разрезанной вдоль линии l. Очевидно, что $u_2(t_0 - 0) = u_2(t_0 + 0) - 2\pi i$. И, наконец, рассмотрим функцию

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z) = \ln\frac{z - t_0}{z - z_0}, \tag{8}$$

причем ветвь одной из двух функций $u_1(z)$ и $u_2(z)$ берется произвольно, а ветвь другой функции подбирается по условию, чтобы $\lim\limits_{z\to\infty} u(z) = 0$.

Легко видеть, что функция $u(z)$ является аналитической в D^-.

Лемма 1. *Пусть* $\omega = \operatorname{diag}(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 \neq \omega_2$ — *диагональная матрица, а* $W = (w_{ik})$ $(i, k = \overline{1, 2})$ — *заданная матрица. Тогда матрица* $\omega P - P\omega + W$ *является диагональной тогда и только тогда, когда внедиагональные элементы матрицы* $P = (p_{ik})$ $(i, k = \overline{1, 2})$ *имеют вид* $p_{ik} = \dfrac{w_{ik}}{\omega_k - \omega_i}$, $i \neq k$, *а* p_{ii} — *произвольные числа. При этом* $\omega P - P\omega + W = \operatorname{diag}(w_{11}, w_{22})$. Доказательство леммы содержится в [5].

Лемма 2. *Пусть* $\omega = \begin{pmatrix} 1 & \omega_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\omega_0 \neq 0$, *а* $W = (w_{ik})$ $(i, k = \overline{1, 2})$ — *заданная матрица. Тогда матрица* $\omega^{-1}P\omega - P + W$ *является диагональной с равными элементами на главной диагонали тогда и только тогда, когда*

$$w_{21} = 0, \ p_{21} = \frac{1}{2\omega_0}(w_{11} - w_{22}), \ p_{22} - p_{11} = \frac{1}{2}(w_{11} - w_{22}) + \frac{1}{\omega_0}w_{12},$$

а p_{12} — *произвольное число. При этом* $\omega^{-1}P\omega - P + w = \frac{1}{2}(w_{11} + w_{22})E$, *где* E — *единичная матрица.*

Рассмотрим решение однородной задачи Римана ($g(t) \equiv 0$):

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t),\ \ t \in L,\ \ \Phi^-(\infty) = 0. \tag{9}$$

Согласно [6] в точке t_0 определим число

$$\alpha = c^2 - 4\,|\,a(t_0 - 0) \cdot a(t_0 + 0)\,|^4, \tag{10}$$

где

$$c = |\,a(t_0 - 0)\,|^2 + |\,a(t_0 + 0)\,|^2 - |\,b(t_0 + 0) - b(t_0 - 0)\,|^2. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда решение задачи (9) имеет вид*

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= X^+(z)\,A(z)\,\Phi_0^+(z), \\ \Phi^-(z) &= X^-(z)\,B(z)\,\Phi_0^-(z), \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} A(z) &= A_0 \prod_{k=1}^{r} \exp\left[A_k (z - t_0)^k\right], \\ B(z) &= B_0 \prod_{k=1}^{r} \exp\left[B_k \left(\frac{z - t_0}{z - z_0}\right)^k\right], \end{aligned} \tag{13}$$

а $A_0 = G(t_0 + 0)\,B_0$; B_0 *— решение матричного уравнения:*

$$B_0^{-1}\Gamma B_0 = \omega_0; \tag{14}$$

$$\Gamma = G^{-1}(t_0 + 0)\,G(t_0 - 0);$$

$$\omega_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2);\ \ \lambda_m = \frac{1}{2}\left(c + (-1)^{m+1}\sqrt{\alpha}\right),\ \ m = \overline{1, 2};$$

$$\begin{gathered} A_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k M_k N_{n-k},\ \ n \geqslant 1;\ \ N_n = -N_0 \sum_{l=0}^{n-1} C_n^l M_{n-l} N_l; \\ N_0 = A_0;\ \ M_n = -\sum_{m=0}^{n-1} C_n^m M_m L_{n-m} M_0,\ \ M_0 = A_0^{-1}; \\ L_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_0 G^{(k)}(t_0 + 0)\,P_{n-k},\ \ B_1 = (t_0 - z_0)\,P_1; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} B_n = \frac{(t_0 - z_0)^n}{n!}\Bigg[P_n &- \frac{(-1)^n (n-1)!}{(t_0 - z_0)^n}\sum_{m=1}^{n-1} C_n^m B_m (-1)^m \cdot m - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k P_k \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{(t_0 - z_0)^{n-k}} \sum_{m=1}^{k} C_{n-k}^m B_m (-1)^m \cdot m\Bigg],\ \ n \geqslant 2; \end{aligned} \tag{16}$$

$P_0 = E$; $P_\nu\ (\nu \geqslant 1)$ *— решение уравнения* $\omega_\nu = \Omega_\nu + \omega_0 P_\nu - P_\nu \omega_0$, *в котором* P_ν *выбирается из условия, чтобы матрица* ω_ν *была диагональной;**

* Согласно лемме 1, матрица P_ν определяется с точностью до диагональных элементов, которые для определенности в дальнейшем будем полагать равными нулю.

$$\Omega_\nu = A_0^{-1} \sum_{s=0}^{\nu-1} C_\nu^s [G^{(\nu-s)}(t_0-0)\, B^{(s)}(t_0) - G^{(\nu-s)}(t_0+0)\, B^{(s)}(t_0)\, \omega_0] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\nu-1} C_\nu^k [A^{-1}(t_0)]^{(\nu-k)} \sum_{s=0}^{k} C_k^s [G^{(k-s)}(t_0-0)\, B^{(s)}(t_0) -$$
$$- G^{(k-s)}(t_0+0)\, B^{(s)}(t_0)\, \omega_0],$$

а C_k^s *здесь и ниже — биномиальные коэффициенты:*

$$\begin{aligned} X^+(z) &= \operatorname{diag}\{(z-t_0)^{\alpha_1(z)},\ (z-t_1)^{\alpha_2(z)}\}, \\ X^-(z) &= \operatorname{diag}\left\{\left(\frac{z-t_0}{z-z_0}\right)^{\beta_1(z)},\ \left(\frac{z-t_0}{z-z_0}\right)^{\beta_2(z)}\right\}, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_m(z) &= \sum_{\nu=6}^{r} B_{m\nu}\left[\left(\frac{z-t_0}{z-z_0}\right)^\nu - \frac{1}{u_1(z)} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{R_k^{(\nu)}}{(z-z_0)^k}\right]; \\ \beta_m(z) &= \sum_{\nu=0}^{r} B_{m\nu}\left[\left(\frac{z-t_0}{z-z_0}\right)^\nu - \frac{1}{u(z)} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{R_k^{(\nu)}}{(z-z_0)^k}\right]; \end{aligned} \tag{18}$$

$$B_{m0} = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_m = \frac{\theta_m}{2\pi} - \varkappa_m - i\,\frac{\ln \rho_m}{2\pi},\ m = \overline{1, 2},$$

где $\lambda_m = \rho_m \exp(i\theta_m)$, *а целые числа* $\varkappa_m$ *выбираются так, чтобы* $-1 < \operatorname{Re} B_{m0} \leqslant 0$;

$$B_{m1} = \frac{t_0 - z_0}{2\pi i} [\ln \sigma_m(t_0)]^{(1)};$$

$$B_{m\nu} = \frac{(t_0-z_0)^\nu}{\nu!\, 2\pi i} [\ln \sigma_m(t_0)]^{(\nu)} - \frac{1}{\nu} \sum_{s=1}^{\nu-1} (-1)^{\nu-s} \cdot s \cdot C_\nu^s \cdot B_{ms},\ \nu = \overline{2, r};$$

$$R_0^{(\nu)} = 0;\ R_k^{(\nu)} = \frac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!} (z_0-t_0)^k \left[\ln(z_0-t_0) + \sum_{s=1}^{\nu-k} \frac{1}{\nu-s+1}\right],\ k = \overline{1, \nu};$$

$$\sigma_m(t) = \lambda_m + \sum_{k=1}^{r} \frac{\omega_{mm}^{(k)}}{k!} (t-t_0)^k,\ m = \overline{1, 2};$$

$\omega_{mm}^{(k)}$ *— соответствующие элементы матрицы* ω_k; $\Phi_0^\pm(z)$ *— кусочно-аналитический вектор, являющийся решением задачи*

$$\Phi_0^+(t) = G_0(t)\, \Phi_0^-(t),\ \ t \in L,\ \ \Phi_0^-(\infty) = 0, \tag{19}$$

где $G_0(t) = [X^+(t)]^{-1} A^{-1}(t)\, G(t)\, B(t)\, X^-(t) \in H_\beta^{(r)},\ \ t \in \overset{\frown}{t_{j-1} t_{j+1}},\ \ t_j = t_0$, $\beta = \lambda$, *а в остальной части контура* L *обладает теми же свойствами, что и матрица* $G(t)$, *т. е. точками разрыва матрицы* $G_0(t)$ *являются точки* $t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_k$.

Теорема 2. *Если* $\alpha = 0$, *то решение задачи (9) имеет вид*

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= Q(z)\, \Phi_0^+(z),\ z \in D^+, \\ \Phi^-(z) &= P(z)\, \Phi_0^-(z),\ z \in D^-, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$Q(z) = A(z)\, U[u_1(z)]\, X^+(z); \quad P(z) = B(z)\, U[u(z)]\, X^-(z), \tag{21}$$

$$U[u] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi\lambda_0} u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_0 = \frac{1}{2} c \neq 0;$$

$A(z)$ и $B(z)$ определяются по формулам (13), где $A_0 = G(t_0 + 0) \times \times B_0 U[u_2(t_0 - 0)]$, а B_0 — решение матричного уравнения (14), *в котором* $\omega_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$; *$A_n$ и B_n определяются по формулам* (15) *и* (16) *соответственно, где $P_\nu (\nu \geqslant 1)$ — решение уравнения*

$$U^{-1}[-1]\, P_\nu U[-1] - P_\nu + \Omega_\nu = \omega_\nu = \lambda_\nu E, \tag{22}$$

где $\lambda_\nu = \frac{1}{2}(\omega_{11}^{(\nu)} + \omega_{22}^{(\nu)})$; $\omega_{11}^{(\nu)}, \omega_{22}^{(\nu)}$ — *диагональные элементы матрицы* Ω_ν; $p_{11}^{(\nu)} = p_{12}^{(\nu)} = 0$; $p_{21}^{(\nu)} = \pi i \lambda_0 (\omega_{11}^{(\nu)} - \omega_{22}^{(\nu)})$, $p_{22}^{(\nu)} = 2\pi i \lambda_0 \omega_{12}^{(\nu)} - -\frac{1}{2}(\omega_{11}^{(\nu)} - \omega_{22}^{(\nu)})$; $\Omega_\nu = \lambda_0^{-1} U[u_2(t_0+0)] \Big\{ \sum_{k=0}^{\nu-1} C_\nu^k A_0^{-1} [G(t_0 - 0)\, B^{(k)}(t_0) \times \times U^{(\nu-k)}[u_2(t_0-0)] - \lambda_0 G(t_0+0)\, B^{(k)}(t_0)\, U^{(\nu-k)}[u_2(t_0+0)] + + \sum_{m=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{m} C_\nu^m C_m^k A_0^{-1} [G^{(\nu-m)}(t_0 - 0)\, B^{(k)}(t_0)\, U^{(m-k)}[u_2(t_0-0)] - - \lambda_0 G^{(\nu-m)}(t_0+0)\, B^{(k)}(t_0)\, U^{(m-k)}[u_2(t_0+0)] + \sum_{s=1}^{\nu-1} \sum_{m=0}^{s} \sum_{k=0}^{m} C_\nu^s C_s^m C_m^k \times \times [A^{-1}(t_0)]^{(\nu-s)} [G^{(s-m)}(t_0-0)\, B^{(k)}(t_0)\, U^{(m-k)}[u_2(t_0-0)] - \lambda_0 G^{(s-m)}(t_0 + +0)\, B^{(k)}(t_0)\, U^{(m-k)}[u_2(t_0+0)] \Big\}\, U^{-1}[u_2(t_0+0)]$; *$X^\pm(z)$ определяются по формулам (17), в которых $\lambda_m = \lambda_0$, $\sigma_m(t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \lambda_k (t - t_0)^k$, а λ_k определяются по формулам (22); $\Phi_0^\pm(z)$ — решение задачи (19), где $G_0(t) = Q^{-1}(t)\, G(t)\, P(t) \in H_\beta^{(r)}$, $t \in t_{j-1}t_{j+1}$, $t_0 = t_j$, $\beta = \lambda$, а в остальной части контура L обладает теми же свойствами, что и матрица $G(t)$.*

Теорема 3. *Пусть матрица $G(t)$ удовлетворяет условиям* (5). *Тогда решение задачи (9) имеет вид*

$$\Phi^+(z) = \prod_{s=1}^{k} Q_s(z)\, \Phi_0^+(z), \quad z \in D^+,$$

$$\Phi^-(z) = \prod_{s=1}^{k} P_s(z)\, \Phi_0^-(z), \quad z \in D^-,$$

где $Q_s(z)$ и $P_s(z)$ определяется по формулам (21), а матрицы $A(z)$, $B(z)$, $X^\pm(z)$, $U[u]$ определяются формулами (13), (17), (21) с заменой матрицы $G(t)$ на матрицу $\underline{Q_{j-1}^{-1}(t)}\, \ldots\, Q_1^{-1}(t)\, G(t) \times \times P_1(t)\, \ldots\, P_{j-1}(t)$ для каждой точки t_j ($j = \overline{1, k}$), причем в слу-

чае $\alpha=0$ *полагаем* $U_j[u]=E$; $\Phi_0^{\pm}(z)$ — *решение задачи (19), где* $G_0(t)=\theta_k^{-1}(t)\ \ldots\ \theta_1^{-1}(t)\,G(t)\,P_1(t)\ \ldots\ P_k(t)\in H_\beta^{(r)},\ t\in L,\ \beta=\lambda.$

Замечание 1. Если $g(t)\neq 0,\ t\in L$, то решение задачи (4) проводится аналогичным способом, при этом приходим к двум скалярным задачам «о скачке» с правой частью со степенно-логарифмическими особенностями (см., напр., [5]). Решение последних проводится по схеме, описанной в работе [7]. Тогда согласно формулам (6) легко получить решение задачи (1).

Замечание 2. Если $\lambda=1$, то изложенные выше результаты сохраняют смысл, но во всех формулах, по которым определяется β, еобходимо λ заменить на $1-\varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число.

Список литературы: 1. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977. 448 с. 2. *Литвинчук Г. С. Спитковский И. М.* Точные оценки дефектных чисел обобщенной краевой задачи Римана//ДАН СССР. 1980. **225.** № 5. С. 1042—1046. 3. *Литвинчук Г. С., Спитковский И. М.* Точные оценки дефектных чисел обобщенной краевой задачи Римана, факторизация эрмитовых матриц-функций и некоторые проблемы приближения мероморфными функциями//Мат. сб. 1982. **117,** вып. 2. С. 196—215. 4. *Михайлов Л. Г.* Новый класс особых интегральных уравнений и его приложение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963. 183 с. 5. *Бузиновский Б. П., Светной В. П.* Выделение особенностей решений матричной задачи Римана с разрывными коэффициентами. К., 1985. 34 с. Деп. в УкрНИИНТИ 20.07.85, № 475УК—85. 6. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., 1970. 380 с. 7. *Светной А. П., Тихоненко Н. Я.* К выделению особенностей решений задачи Римана//Изв. вузов. Математика. 1981. № 6. С. 78—82.

Поступила в редколлегию 01.03.87