УДК 517.955

В. М. БОРОК, С. В. ЕВДОКИМОВА

РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ

В 50-х годах было установлено, что классы единственности решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений (и систем) с постоянными коэффициентами и классы корректной разрешимости такой задачи определяются совершенно различными характеристиками уравнения: за условия единственности решения «отвечает» только порядок уравнения [1], а классы корректной разрешимости задачи зависят от алгебраических свойств соответствующего дифференциального выражения [2]. Оказывается, что для ряда других задач ситуация иная: единственность решения задачи в классе ограниченных (гладких) функций влечет ее корректную разрешимость в этом классе. Такие задачи мы назвали регулярными. Целью настоящей статьи является исследование условий регулярности двух типов задач: задачи Коши в полосе для линейного дифференциального уравнения с «нагрузками» по временной координате и нелокальной многоточечной задачи в полосе для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

§ 1. Основные определения и обозначения. Пусть $P(\sigma)$, $Q_k(\sigma)$, $k=\overline{0,\ N}$ — произвольные (комплекснозначные) полиномы $\prod_{k=0}^{N} Q_k(\sigma) \not\equiv \not\equiv 0$, $0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N \leqslant T$.

В полосе $\Pi_T = \boldsymbol{R} \times [0,\ T]$ рассмотрим два типа задач:

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,\ t) + \sum_{k=1}^{N} Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,\ t_k), \tag{1}$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x) \tag{2}$$

и $$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,\ t), \tag{$\tilde{1}$}$$

$$\sum_{k=0}^{N} Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,\ t_k) = u_0(x). \tag{$\tilde{2}$}$$

Обозначим $H_m = \{\varphi \in \mathbf{C}^m(\mathbf{R}),\ \|\varphi\|_m = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant m} \sup\limits_{\mathbf{R}} |f^{(k)}(x)| < \infty\}$, $H = \bigcup\limits_{m\geqslant 0} H_m$.

Определение 1. *Задача (1) — (2) ($(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$) называется корректной (в H), если для $\forall m \geqslant 0\ \exists l \geqslant 0$ такое, что для любой $u_0(x) \in H$ существует единственное решение $u(x,\ t)$ задачи (1) — (2) ($(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$), которое при $\forall t \in [0,\ T]$ принадлежит пространству H_m, причем*

$$\sup_{[0,\ T]} \|u(x,\ t)\|_m \leqslant C \|u_0(x)\|_l.$$

Задачи (1) — (2), $(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$ имеют не более одного решения в H_0 тогда и только тогда, когда [3, 4] $\Delta(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \boldsymbol{R}$ ($\tilde{\Delta}(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \boldsymbol{R}$) где

$$\Delta(\sigma) = \begin{cases} P(i\sigma) + \sum\limits_{j=1}^{N} Q_j(i\sigma) - \sum\limits_{j=1}^{N} Q_j(i\sigma) e^{t_j P(i\sigma)} & \text{при } \sigma : P(i\sigma) \neq 0, \\ 1 - \sum\limits_{j=1}^{N} Q_j(i\sigma) t_j & \text{при } \sigma : P(i\sigma) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

(для задачи (1) — (2))

и $$\tilde{\Delta}(i\sigma) = \sum_{j=1}^{N} Q_j(i\sigma)\, e^{t_j P(\sigma)} \tag{$\tilde{3}$}$$

(для задачи $(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$).

Если решение $u(x,\ t)$ задачи (1) — (2) (или $(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$) и все его производные, входящие в (1) ($(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$), а также функция $u_0(x$

абсолютно интегрируемы, и $v(\sigma, t)$, $v_0(\sigma)$ $(w(\sigma, t), w_0(\sigma))$ — их преобразования Фурье, то, как легко видеть,

$$\frac{dv(\sigma, t)}{dt} = P(i\sigma)\, v(\sigma, t) + \sum_{k=1}^{N} Q_k(i\sigma)\, v(\sigma, t_k), \tag{4}$$

$$v(\sigma, 0) = v_0(\sigma) \tag{5}$$

или, соответственно,

$$\frac{dw(\sigma, t)}{dt} = P(i\sigma)\, w(\sigma, t), \qquad \sum_{k=0}^{N} Q_k(i\sigma)\, w(\sigma, t_k) = w_0(\sigma),$$

откуда получаем

$$v(\sigma, t) = R(\sigma, t)\, v_0(\sigma), \; w(\sigma, t) = \tilde{R}(\sigma, t)\, w_0(\sigma),$$

где

$$R(\sigma, t) = \Big\{\Delta(\sigma) + \Big(P(i\sigma) + \sum_{k=1}^{N} Q_k(i\sigma)\Big) \cdot r(\sigma, t)\Big\} / \Delta(\sigma),$$

$$r(\sigma, t) = \begin{cases} e^{tP(i\sigma)} - 1, \text{ если } \sigma : P(i\sigma) \neq 0, \\ t, \text{ если } \sigma : P(i\sigma) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \tag{6}$$

$$\tilde{R}(\sigma, t) = e^{tP(i\sigma)} / \tilde{\Delta}(\sigma).$$

В работах [5] и [4] доказаны условные теоремы о корректности в H задач (1) — (2) и $(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$ в предположениях, что функции $R(\sigma, t)$ и $\tilde{R}(\sigma, t)$ в некоторой области комплексной плоскости $z = \sigma + i\tau$ имеют рост не выше степенного относительно z. Анализ этих доказательств дает следующее

Утверждение 1. Если $\forall p \geqslant 0 \; \exists \alpha_p \in \boldsymbol{R}$:

$$\left| \frac{\partial^p R(\sigma, t)}{\partial \sigma^p} \right| \leqslant C_p (1 + |\sigma|)^{\alpha_p}, \; (\sigma, t) \in \Pi_T \tag{7}$$

(соответственно,

$$\left| \frac{\partial^p \tilde{R}(\sigma, t)}{\partial \sigma^p} \right| \leqslant \tilde{C}_p (1 + |\sigma|)^{\alpha_p}, \; (\sigma, t) \in \Pi_T), \tag{$\tilde{7}$}$$

то задача (1) — (2) ($(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$) корректна в H; обратно, если задача (1) — (2) ($(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$) корректна в H, то оценка (7) ($(\tilde{7})$) заведомо имеет место при $p = 0$.

На основании этого утверждения найдем (теоремы 1, 2) условия корректности (в H) рассматриваемых задач в терминах $P(\sigma)$, $Q_k(\sigma)$ и параметров t_k $(k = \overline{0, N})$.

Определение 2. *Задача (1) — (2) ($(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$) называется регулярной, если для любых полиномов* $P(\sigma)$, $Q_k(\sigma)$, $\prod_{k=1}^{N} Q_k(\sigma) \not\equiv 0$ *из того, что при некотором* $m \geqslant 0$ *однородная задача* $(u_0(x) \equiv 0)$

имеет в H_m только тривиальное решение $u(x, t) \equiv 0$, следует ее корректность (в H).

В теоремах 3, 4 даны условия регулярности задач (1) — (2) и $(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$ (в терминах параметров t_k) и затем показана необходимость или существенность этих условий.

§ 2. Основная лемма. Лемма 1. *Пусть* $\delta(\sigma) \equiv Q_0(\sigma) + \sum_{k=1}^{N} Q_k(\sigma) \times e^{t_k P(\sigma)} \neq 0 \; (\sigma \in \boldsymbol{R})$ и $t_1 : t_2 : \cdots : t_N = m_1 : m_2 : \cdots : m_N$, $m_j \in \boldsymbol{N}$, $j = \overline{1, N}$. Тогда $\exists C > 0$, $\exists \alpha \in \boldsymbol{R}$:

$$|\delta(\sigma)| \geqslant C(1 + |\sigma|)^{\alpha} \quad (8).$$

Доказательство. Оценка (8) без каких-либо дополнительных условий на t_j, $j = \overline{1, N}$, очевидна в следующих трех случаях:

а) $P(\sigma) \equiv \mathrm{const}$, в этом случае $\delta(\sigma)$ — полином, и $\alpha = \deg \delta(\sigma)$;

б) $\operatorname{Re} P(\sigma) \not\equiv \mathrm{const}$, при этом $\alpha \geqslant \deg Q_0(\sigma)$;

в) $P(\sigma) \not\equiv \mathrm{const}$, $\operatorname{Re} P(\sigma) \equiv \mathrm{const}$; $\exists k \in \{0, \ldots, N\} : \max_{j \neq k} \deg \times Q_j(\sigma) < \deg Q_k(\sigma) = m$, при этом $\alpha = m$.

Пусть теперь $\operatorname{Re} P(\sigma) \equiv \mathrm{const}$, $P(\sigma) \not\equiv \mathrm{const}$ и среди полиномов $Q_j(\sigma)$, $j = \overline{0, N}$, не менее двух имеют (одинаковую) наибольшую степень m. Положив $H(\sigma) = \operatorname{Im} P(\sigma) \dfrac{t_N}{m_N}$, $m_0 = 0$, запишем $\delta(\sigma)$ в виде:

$$\delta(\sigma) \equiv \sum_{j=0}^{m} \sigma^j \sum_{l=0}^{N} \exp(i m_l H(\sigma)) A_{jl} \equiv \sum_{j=0}^{m} \sigma^j h_j(\exp(iH(\sigma))),$$

где полином $h_j(\xi)$ определяется формулой

$$h_j(\xi) \equiv \sum_{l=0}^{N} \xi^{m_l} A_{jl}, \; j = \overline{0, m}.$$

Если оценка (8) не верна, то $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $\exists \sigma_n \in \boldsymbol{R}$: $|\delta(\sigma_n)| < n^{-1}(1 + |\sigma_n|)^{-n}$ (9). Обозначим $\xi_n = \exp(iH(\sigma_n))$. Не уменьшая общности, можем считать $h_m(\sigma_n) \neq 0$ ($\forall n \in \boldsymbol{N}$). Из последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\xi_{n_k} \to \xi_0 = \exp\{i\varphi_0\}$. Полагая $\eta_k = \sigma_{n_k}$, получим $H(\eta_k) = \varphi_0 + \alpha_k + 2\pi h(k)$, где $h(k) \in \mathbf{Z}$, $\alpha_k = \bar{o}(1) \; (k \to \infty)$.

Таким образом,

$$\delta(\eta_k) = \sum_{j=0}^{m} \eta_k^j \sum_{l=0}^{N} A_{jl} \xi_0^{m_l} \exp\{i \alpha_k m_l\} = \sum_{j=0}^{m} \eta_k^j \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_k^r B_{jr}, \tag{10}$$

где $B_{jr} = \sum_{l=0}^{N} A_{jl} \xi_0^{m_l} \dfrac{(i m_l)^r}{r!}$. При этом среди чисел $B_{j0} = h_j(\xi_0)$, $j = \overline{0, m}$, имеются ненулевые, так как в противном случае $\delta(\sigma) = 0$ для тех значений σ, для которых $\exp\{iH(\sigma)\} = \xi_0$. Пусть $B_{jr} = 0$ при $r = \overline{0, r_j - 1}$ и $B_{jr_j} \neq 0$. Тогда, учитывая (9), заключаем, что среди мономов $\eta_k^j \alpha_k^{r_j}$, $j = \overline{0, m}$ имеется не менее двух, имеющих одинаковый порядок роста при $k \to \infty$, не меньший порядка роста любого другого монома $\eta_k^j \alpha_k^r$. Отсюда следует, что

$$\alpha_k = \gamma_1 \eta_k^{-\mu_1}(1 + \alpha_{k1}),\ \gamma_1 \neq 0,\ \mu_1 > 0,\ \alpha_{k1} = \bar{o}(1)\,(k \to \infty). \quad (11)$$

Теперь, подставляя (11) в (10), приходим к выражению

$$\delta(\eta_k) = \sum_{s=0}^{\infty} \Big(\sum_{r=s}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \eta_k^{j-\mu_1 r} B_{jrs} \Big) \alpha_{k1}^s. \quad (12)$$

При этом $\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \eta_k^{j-\mu_1 r} B_{jr0}$ — свободный относительно α_{k1} член ряда (12) — при достаточно больших значениях k не обращается в 0. Последнее следует из того, что иначе на последовательности η_k' решений уравнения $H(\eta) = \varphi_0 + \gamma_1 \eta^{-\mu_1} + 2\pi h(k)$ получим противоречие с условием $\delta(\sigma) \neq 0\ (\sigma \in \boldsymbol{R})$. Тогда, аналогично предыдущему шагу, из (12) и условия (9) делаем вывод, что

$$\alpha_{k1} = \gamma_2 \eta_k^{-\mu_2}(1 + \alpha_{k2}),\ \gamma_2 \neq 0,\ \mu_2 > 0,\ \alpha_{k2} = \bar{0}(1)\,(k \to \infty).$$

Повторяя этот процесс аналогично построению ряда Ньютона [6], получаем асимптотический ряд:

$$\alpha_k = \sum_{s=1}^{\infty} \rho_s \eta_k^{-\mu_s},\ 0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots,\ \rho_s \neq 0. \quad (13)$$

Из (10) и (13) следует, что и $\delta(\eta_k)$ разлагается в асимптотический ряд вида (13):

$$\delta(\eta_k) = \sum_{s=1}^{\infty} \omega_s \eta_k^{\lambda_s},\ \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots,\ \omega_1 \neq 0,$$

что противоречит предположению (9). Лемма доказана.

§ 3. Теоремы корректности и регулярности. Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) $\Delta(\sigma) \neq 0,\ \sigma \in \boldsymbol{R}$,

2) $t_1 : t_2 : \cdots : t_N = m_1 : m_2 : \cdots : m_N,\ m_j \in \boldsymbol{N},\ j = \overline{1, N}$, *а в случае* $t_N < T$, *кроме того, условие*

3) $\sup \operatorname{Re} P(i\sigma) < \infty$.

Тогда задача (1) — (2) корректна (в H) в полосе П*.

Доказательство. С помощью индукции легко установить, что для производных функции $R(\sigma, t)$ (см. (6)) справедлива формула

$$\frac{\partial^k R(\sigma, t)}{\partial \sigma^k} = [\Delta(\sigma)]^{-(k+1)} \sum_{r=1}^{R_k} g_{rk}(\sigma, t) \exp\{\gamma_{rk}(t) P(i\sigma)\} \quad (14)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, где $0 \leqslant \gamma_{rk}(t) \leqslant (k+1)T$ (при $t \in [0, T]$), $g_{rk}(\sigma, t)$ — полином по σ и t, $\deg g_{rk}(\sigma, t) \leqslant k(2a-1) + a$, где $a = \max\{\deg P(i\sigma), \deg Q_1(i\sigma), \ldots, \deg Q_N(i\sigma)\}$. Если $\sup \operatorname{Re} P(i\sigma) < \infty$, то оценки (7) вытекают непосредственно из формулы (14)

* Условия 2) и 3) излишни, если $p(i\sigma) + \Sigma Q_j(i\sigma) \equiv 0$.

и леммы 1, примененной к $\Delta(\sigma)$. Пусть теперь $t_N = T$. Тогда в случае $\operatorname{Re} P(i\sigma) \to +\infty$ (например, при $\sigma \to +\infty$) представим $\Delta(\sigma)$ в виде $\Delta(\sigma) = \exp\{TP(i\sigma)\}\Delta_1(\sigma)$. Очевидно, для $\Delta_1(\sigma)$ выполнены условия леммы 1. Кроме того, при $\sigma \to +\infty$ $|\exp(\gamma_{rk}(t)P(i\sigma))| \leqslant \exp \times \times \{(k+1)T \operatorname{Re} P(i\sigma)\}$. Теперь из формулы (14), учитывая (8) (для $\Delta_1(\sigma)$), приходим к оценкам (7) при достаточно больших значениях σ. Оценки (7), в силу утверждения 1, обеспечивают корректность задачи (1) — (2) в H. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1) $\tilde{\Delta}(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in R$,

2) $t_0 : t_1 : \ldots : t_N = m_0 : m_1 : \ldots : m_N$, $m_j \in \boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{N} \cup \{0\}$

и, кроме того,

3) *если* $t_N < T$, *то* $\sup \operatorname{Re} P(i\sigma) < +\infty$,

4) *если* $t_0 > 0$, *то* $\inf \operatorname{Re} P(i\sigma) > -\infty$.

Тогда задача $(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$ *корректна (в* H*) в полосе* Π_T.

Замечание 1. Если $[t_0, t_N] \in]0, T[$, то условия 3) и 4) теоремы 2 означают, что $\operatorname{Re} P(i\sigma) = \text{const}$.

Замечание 2. Условие $\Delta(\sigma) \neq 0$ является необходимым в силу теоремы единственности. Существенность условия 2) показана ниже; в случаях а) — в), рассмотренных при доказательстве леммы, оно является лишним. Условие 3) теоремы 1 и условия 3) и 4) теоремы 2, в силу утверждения 1 и формулы (6), являются необходимыми.

На основании теорем 1 и 2, используя условия единственности, решения рассмотренных задач ($\Delta(\sigma) \neq 0$ или $\tilde{\Delta}(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \boldsymbol{R}$ — [3, 4]), теперь легко сформулировать условия регулярности для задач (1) — (2) и $(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$.

Теорема 3. *Задача (1) — (2) является регулярной, если*

1) $t_N = T$,

2) $t_1 : \ldots : t_N = m_1 : \ldots : m_N$, $m_j \in \boldsymbol{N}$, $j = \overline{1, N}$.

Теорема 4. *Задача* $(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$ *является регулярной, если*

1) $t_0 = 0$, $t_N = T$,

2) $t_1 : \ldots : t_N = m_1 : \ldots : m_N$, $m_j \in \boldsymbol{N}$, $j = \overline{1, N}$.

Отметим, что первое условие в каждой из этих теорем является необходимым (ср. замечание 2). Существенность второго условия показывает пример задачи Коши для уравнения:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 2\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + 2\frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, \beta)}{\partial x}.$$

Здесь $\Delta(\sigma) = \begin{cases} i\sigma(3 - 2e^{i\sigma} + e^{i\beta\sigma}), & \sigma \neq 0, \\ 1, \ \sigma = 0. \end{cases}$

Если $\beta \bar{\in} \boldsymbol{Q}$, то $\Delta(\sigma) \neq 0$ $(\sigma \in \boldsymbol{R})$. Возьмем $\sigma_k = 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда $|\Delta(\sigma_k)| = 4\pi k \cdot \left|\sin\left\{\pi k\left(\beta - \frac{2m+1}{2k}\right)\right\}\right|$, $m \in \boldsymbol{N}$. В силу теоремы Хинчина [7] для любой положительной функции $\varphi(q)$ натурального аргумента q найдется иррациональное число β, для которого неравенство

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \varphi(q)$$

имеет бесконечное число решений вида $p = 2m + 1$, $q = 2r$, m, $r \in \in \boldsymbol{N}$. Тогда, взяв в качестве функции $\varphi(q)$ достаточно быстро убывающую функцию, получаем, что существуют подпоследовательности $\{m_n\}$, $\{k_n\} \to \infty$ и иррациональное число $\beta > 0$ такие, что

$$\left|\beta - \frac{2m_n + 1}{2k_n}\right| < \varphi(k_n).$$

Покажем, что это влечет за собой нарушение необходимого условия корректности. Действительно, в нашем случае

$$R(\sigma, t) = \frac{3e^{i\sigma t} - 2e^{i\sigma} + e^{i\beta\sigma}}{3 - 2e^{i\sigma} + e^{i\beta\sigma}} \quad (\sigma \neq 0).$$

Возьмем $0 < t' = \frac{p}{q} < 1 = t_1$, p, $q \in \boldsymbol{N}$, представим k_n в виде $k_n = = q_1 q + q_2$, где q_1, $q_2 \in \boldsymbol{N}_0$, $0 \leqslant q_2 \leqslant q - 1$ и рассмотрим классы $I_j = = \{k_n : q_2 = j\}$, $j = \overline{0, q-1}$. Выберем j' такое, что $I_{j'}$ содержит бесконечное число элементов, причем $j' \neq 0$. Если это невозможно, то возьмем другое q $\left(\text{т. е. другое число } t' = \frac{p}{q}\right)$. Обозначая $n' = = q_1 q + j'$, получаем теперь $|R(\sigma_{n'}, t)| \geqslant \frac{M}{\varphi(n')}$, где $\sigma_{n'} = 2\pi n'$, $n' \to \infty$, что означает нарушение необходимого условия (7) корректности задачи (1) — (2). Аналогично можно построить пример некорректной задачи $(\tilde{1})$ — $(\tilde{2})$, для которой $\tilde{\Delta}(\sigma) \neq 0$, но условие 2) теоремы 4 не выполняется.

По-видимому, используя теорему о приближении алгебраических чисел рациональными [7], условие 2) можно несколько ослабить.

Список литературы: 1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши // Успехи мат. наук. 1953. 8, вып. 6. С. 3—54. 2. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. Моск. гос. ун-та, секция А. 1938. **1**. С. 1—72. 3. *Борок В. М., Житомирский Я. И.* Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. I. Единственность // Изв. вузов. Математика. 1981. № 9. С. 5—12. 4. *Макаров А. А.* О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для системы дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1981. **17**, № 2. С. 320—324. 5. *Борок В. М., Житомирский Я. И.* Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. II. Корректность // Изв. вузов. Математика. 1981. № 10. С. 3—9. 6. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. С. 10—20. 7. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М., 1978. 120 с.

Поступила в редколлегию 28.05.87