УДК 513.7

Л. Б. БИРБРАИР

ЗАМЕЧАНИЯ О СТРОЕНИИ ПРОСТРАНСТВА РЕГУЛЯРНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОДНОРОДНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. В данной статье обобщаются результаты заметки [1]. Изложение ведется в случае пространства $\mathbf{C}^n$. Однако все результаты, за исключением п. 5, справедливы и в вещественном случае.

2. Отображение $F: C^n \to C^n$ называется алгебраическим однородным степени k, если существует такое k-линейное симметрическое отображение $\tilde{F}: C^n \times C^n \times \dots \times C^n = (C^n)^k \to C^n$, что $F = \partial \circ \tilde{F}$. (Здесь $\partial: C^n \to (C^n)^k$ — диагональное отображение: $\partial(x) = (x, x, x, \dots, x) \in (C^n)^k$).

Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторый базис в C^n, а $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — координаты вектора x в этом базисе. Тогда

$$F(x) = \sum \frac{k!}{r_1!\, r_2! \dots r_n!} F_{r_1 \dots r_n} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}, \tag{1}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = k; \ F_{r_1 r_2 \dots r_n} = \tilde{F}(\underbrace{e_1, e_1, \dots, e_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{e_n, \dots, e_n}_{r_n}).$$

Обозначим через $\tilde{P}^k(C^n)$ пространство всех однородных степени k отображений из C^n в C^n. Оно, очевидно, изоморфно C^{nl}, где l — это число целочисленных точек положительного ортанта, лежащих на гиперплоскости $\sum r_i = k$. Однородное степени k отображение назовем регулярным, если $F^{-1}(0) = \{0\}$. Подмножество регулярных отображений обозначим $P^k(C^n)$.

Теорема 1. *$P^k(C^n)$ открыто и всюду плотно в $\tilde{P}^k(C^n)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение Φ: $C^n \times C^{nl} \to C^n$, определенное следующим образом:

$$\Phi(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}, \text{ где } \sum_{i=1}^{n} r_i = k;$$

$$x\{x_j\} \in C^n, \ \lambda = \{\lambda_j^i\} \in C^{nk}.$$

Если $x \neq 0$, то $rank\ DF = n$, так как $rank \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = n \ (x \neq 0)$.

Таким образом, $0 \in C^n$ является регулярным значением отображения $\Phi: (C^n \setminus 0) \times C^{nl} \to C^n$. Поэтому является подмногообразием в $(C^n \setminus 0) \times C^{nl}$ коразмерности n. По теореме Абрахама (см. [2]), для открытого и всюду плотного множества $\Lambda \in C^n$ подмногообразие $(C^n \setminus 0) \times \lambda_0$, $\lambda_0 \in \Lambda$ трансверсально $\Phi^{-1}(0)$. Обозначим через $V_{\lambda_0}^n$ множество $V_{\lambda_0} = (C^n \setminus 0) \times \lambda_0 \cap \Phi^{-1}(0) = \Phi_{\lambda_0}^{-1}(0)$. Если $\lambda_0 \in \Lambda$, то имеются две возможности:

1. V_{λ_0} — подмногообразие размерности 0.
2. $V_{\lambda_0} = \varnothing$.

Случай 1 не может иметь места, так как Φ_{λ_0} — однородное отображение, а поэтому, если $x_0 \in \Phi_{\lambda_0}^{-1}(0)$, то и вся прямая μx_0 также принадлежит $\Phi_{\lambda_0}^{-1}(0)$. Значит, $V_{\lambda_0} = \varnothing$.

Поскольку Φ_λ пробегает все множество $\tilde{P}^k(C^k)$, теорема 1 доказана.

Два отображения $F_1, F_2: C^n \to C^n$ называются линейно эквивалентными, если существуют такие линейные отображения: $A, B \in Gl(n, C)$, что $F_1 = A \circ F_2 \circ B^{-1}$. Очевидно, что данное отношение эквивалентности сохраняет условие регулярности. Таким образом, на $P^k(\mathbf{C}^n)$ задано действие группы $Gl(n, \mathbf{C}) \times Gl(n, \mathbf{C})$: $\alpha\{(A, B), F\} = A \circ F \circ B^{-1}$.

Действие α продолжается, конечно, и на $\tilde{P}^k(\mathbf{C}^n)$. Наша дальнейшая задача — более детальное его изучение.

3. Обозначим через $L^n(\mathbf{C}^n)$ пространство всех k-линейных форм на $\mathbf{C}^n$. Оно, очевидно, изоморфно $\mathbf{C}^l$. (Напомним, что l — число целочисленных точек положительного ортанта, лежащих на гиперплоскости $\sum r_i = k$).

Пусть $\overline{P}^k(\mathbf{C}^n) \subset \tilde{P}^k(\mathbf{C}^n)$ — подмножество, определяемое следующим образом: для любого элемента $F \in \tilde{P}^k(\mathbf{C}^n)$ его компоненты $\{F^1, F^2, \ldots, F^n\}$ линейно независимы, как векторы из $L^k(\mathbf{C}^n)$. Разумеется, $\overline{P}^k(\mathbf{C}^n) \supset P^k(\mathbf{C}^n)$ и $\overline{P}^k(\mathbf{C}^n)$ открыто и всюду плотно в $\tilde{P}^k(\mathbf{C}^n)$.

Рассмотрим многообразие $Gr(l, n, \mathbf{C})$ — грассманово многообразие n-мерных подпространств $\mathbf{C}^l$. Пусть $\rho : P^k(\mathbf{C}^n) \to Gr(ln\ \mathbf{C})$ — отображение, определяемое следующим образом:

$$\rho(F = \{F^1, F^2, \ldots, F^n\}) = Lin\{F^1, F^2, \ldots, F^n\} \subset L^k(\mathbf{C}^n).$$

Известно (см., напр., [3]), что отображение ρ является локально-тривиальным расслоением. Нижеследующая теорема согласует эту структуру с действием α.

Теорема 2. *Существует каноническое действие* β, *что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
Gl(n, \mathbf{C}) \times Gl(n, \mathbf{C}) \times \overline{P}^k(\mathbf{C}^n) & \xrightarrow{\alpha} & \overline{P}^k(\mathbf{C}^n) \\
q \times \rho \downarrow & & \rho \downarrow \\
Gl(n, \mathbf{C}) \times Gr(l, n, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\beta} & Gr(l, n, \mathbf{C})
\end{array}$$

коммутативна. (Здесь $q : (Gl(n, \mathbf{C}))^2 \to Gl(n, \mathbf{C})$ — стандартная проекция $q(A, B) = B$.

Доказательство. Пусть $\{B, h\}$ — пара из $Gl(n, \mathbf{C}) \times Gr(l, n, \mathbf{C})$, выберем $(B, A) \in q^{-1}B$ и $F_0 \in \rho^{-1}(h)$. Определим теперь:

$$\beta(B, h) \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\alpha\{(B, A), F_0\}).$$

Это определение не зависит от выбора A и F_0. В самом деле, линейный невырожденный оператор $\tilde{B}$: $L^k(\mathbf{C}^n) — L^k(\mathbf{C}^n)$, соответствующий преобразованию B, переводит подпространство $Lin\{F_0^1, F_0^2, \ldots, F_0^n\}$ на $Lin\{\tilde{B}F_0^1, \ldots, \tilde{B}F_0^n\}$. Оно же, в свою очередь, инвариантно относительно оператора $\tilde{A} : L^k(\mathbf{C}^n) \to L^k(\mathbf{C}^n)$, соответствующего преобразованию A. С другой стороны, любое отображение $F \in \rho^{-1}(h)$ представимо в виде $F = A \circ F_0$, $A \in Gl(n, \mathbf{C})$. Таким образом, $\beta(B, h)$, как точка грассманова многообразия, не зависит от выбора B, F_0. Что и требовалось доказать.

Замечание. Образ пространства $P^k(\mathbf{C}^n)$ при отображении ρ также инвариантен относительно действия β.

Далее подробно изучим строение расслоения ρ на $P^k(\mathbf{C}^n)$. Рассмотрим подмножество $H \subset P^k(\mathbf{C}^n)$, такое что $\forall\ (F \in H)\ [\det\{F(e_i)\} \neq 0]$.

Теорема 3. $\forall (F \in P^k(\mathbf{C}^n)) \exists (B \in Gl(n, \mathbf{C}))$, *что* $\alpha\{(I, B), F\} \in H$.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть* $F \in \tilde{P}^k(\mathbf{C}^n)$. *Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1. $F \in P^k(\mathbf{C}^n)$.
2. F — собственное отображение (т. е. прообраз каждого компактного подмножества компактен).

Доказательство леммы следует из соответствующих утверждений монографии [4].

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим декартово произведение $F^{(n)}: (\mathbf{C}^n)^n \to (\mathbf{C}^n)^n$; $F^{(n)} = \{F, F, \ldots, F\}$. Из собственности F (лемма) вытекает собственность $F^{(n)}$. Отсюда, по теореме Осгуда, $F^{(n)}$ — сюрьективно. Обозначим через E подмножество $(\mathbf{C}^n)^n$, такое, что $\forall (e \in E)$ $[\det\{e_i\} \neq 0]$. E — открыто по Зарисскому в $(\mathbf{C}^n)^n$. Поэтому $(F^{(n)})^{-1}(E) \cap E \neq \varnothing$. Выберем $e \in (F^{(n)})^{-1}(E) \cap E$. В качестве B можно выбрать матрицу перехода от исходного базиса к базису $e = \{e_1 e_2, \ldots, e_n\}$. Теорема 3 доказана.

Отображение ρ на множестве H устроено следующим образом. Пусть $F \in H$. В формуле (1) выделяются все вектор-мономы $F_{0,0,\ldots,k,\ldots,0} x_i^k$, соответствующие чистым k-м степеням переменных. Коэффициенты $F_{0,0,\ldots,k,\ldots,0}$ образуют квадратную $n \times n$ матрицу. Отображение ρ приводит ее к единичной. Тем самым, в i-й строчке формулы остается только моном x_i^k и смешанные мономы.

Более точно. Разложим $L^k(\mathbf{C}^n)$ в прямую сумму $L = L_1 \oplus L_2$, где $L_1 = Lin\{x_i^k\}$, а $L_2 = Lin\{x^p, |p| = k, p_j \neq k\}$. Обозначим через Q_i^1 проекцию F^i на L_1, а Q_i^2 — проекцию F^i на L_2. Рассмотрим далее грассманово многообразие $Gr(l, n, \mathbf{C})$, как многообразие n-мерных подпространств в $L^k(\mathbf{C}^n)$. Множество графиков линейных отображений из L_1 в L_2 образует область определения стандартной карты U в $Gr(l, n, \mathbf{C})$. Пусть $u = \{u_p^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $|p| = k$, $p_j \neq k$ — локальные координаты в карте U. (Мы считаем, что выбраны базисы $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ в L_1 и $\{f_1, f_2, \ldots, f_{l-n}\}$ в L_2).

Пусть ψ: $U \to P^k(\mathbf{C}^n)$ вложение:

$$\psi(u) = \sum_i (x_i^k e_i + \sum_p u_p^i x^p e_i). \tag{2}$$

Теорема 4. *Отображение* $\hat{\psi}$ *является сечением расслоения* $\rho|_H$.

Доказательство. Пусть $F \in H$ — регулярное однородное степени k отображение, тогда

$$F = \begin{Bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ \vdots \\ F^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1, & Q_1^2 \\ Q_2^1, & Q_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ Q_n^1, & Q_n^2 \end{Bmatrix}.$$

Плоскость, натянутая на $\{F^1, F^2, \ldots, F^n\}$, является графиком некоторого отображения $u: L_1 \to L_2$. При фиксированных базисах

$\{f\}$ и $\{g\}$, соответствующие им локальные координаты плоскости $Lin\{F^1, F^2, \ldots, F^n\}$, получаются домножением F на матрицу $\{Q^1\}^{-1}$. Для отображения, заданного формулой (2) (при фиксированных значениях u), $\{Q^1\}$ — единичная матрица. Поэтому локальные координаты соответствующей плоскости есть в точности u_p^i. Что и требовалось доказать.

5. Изложенная выше совокупность утверждений имеет ряд приложений к задаче о классификации однородных отображений. В заметке [1] такая задача была решена для квадратичных отображений в $\boldsymbol{C}^3$. Приводимый ниже результат был ранее в несколько иной форме получен в препринте [5]. С учетом изложенной в пп. 1—4 техники его доказательство, а также вычисления коразмерностей орбит значительно упрощаются.

Теорема 5. (*Линейная классификация регулярных кубических отображений в* $\boldsymbol{C}^2$.) *Пусть* $F: \boldsymbol{C}^2 \to \boldsymbol{C}^2$ *— регулярное однородное степени 3 отображение. Тогда оно линейно эквивалентно одному из следующих, приведенных ниже типов:*

$$B_1\begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix}; \quad B_2\begin{pmatrix} x_1^3 + 3x_1x_2^2 \\ x_2^3 + 3ax_1x_2^2 \end{pmatrix}; \quad B_3\begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^3 \\ x_1x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 5, установим следующий факт.

Утверждение. Пусть $F: \boldsymbol{C}^2 \to \boldsymbol{C}^2$ удовлетворяет условию теоремы 5. Тогда существует базис $\{e_1, e_2\}$ такой, что $\tilde{F}(e_1, e_1 e_2) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим трилинейное отображение: $\tilde{F}: (\boldsymbol{C}^2)^3 \to \boldsymbol{C}^2$. По лемме оно собственно на диагонали $\{x, x, x\} \in (\boldsymbol{C}^2)^3$. Поэтому и на сдвинутой диагонали $\{x, x, x+\delta\}$; $\delta \in \boldsymbol{C}^2$ — отображение $F\delta = \tilde{F}(x, x, x+\delta)$ также будет собственным. Кратность ростка векторного поля F в точке 0 равна 9. По теореме Паламодова [6] при деформации $F_\delta = \tilde{F}(x, x, x+\delta)$ из нее должно ответвиться некоторое количество особых точек с суммарной кратностью 9. У векторного поля F_δ имеются две не интересные нам особые точки $x=0$ и $x=-\delta$. Кратность F_δ в точке $x=0$ равна 4. Точка $x=-\delta$ — простая. Поэтому $\exists (e \in \boldsymbol{C}^2)$, что $F_\delta(e) = 0$; $e \neq 0$, $e + \delta = 0$. Выберем $e_1 = e$, $e_2 = e + \delta$. Таким образом, $F_\delta(e) = \tilde{F}(e_1, e_1, e_2) = 0$. Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 5. Если при фиксированном базисе $\{e_1, e_2\}$ $F \in H$, то оно может быть приведено к виду (2). Если коэффициент при вектор-мономе $x_1x_2^2$ равен 0, то F принадлежит орбите типа B_1, в противном случае F элементарными преобразованиями приводится к виду B_2.

Как и в работе [1], вычисления коразмерностей орбит удобно производить в грассмановых координатах. Пусть μ_i — коразмерность орбиты типа B_i. Тогда $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 2$.

Список литературы: 1. *Бирбраир Л. Б., Сапронов Ю. И.* Линейная классификация квадратичных отображений в пространстве C^3 // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1978. Вып. 9. С. 10—23. 2. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М., 1979. 297 с. 3. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М., 1970. 442 с. 4. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. М., 1965. 160 с. 5. *Dimca A., Gibson C. G.* On contract simple germs of the plane L., 1980. 54 p. 6. *Паламодов В. П.* О кратности голоморфного отображения // Функцион. анализ и прил. 1967. **1**, вып. 3. С. 45—47.

Поступила в редколлегию 12.05.86