УДК 517.5+517.9

Д. З. АРОВ

ГАММА-ПРОИЗВОДЯЩИЕ МАТРИЦЫ, j-ВНУТРЕННИЕ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ЗАДАЧИ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ. I

§ 1. Постановка задачи и формулировка основных результатов о γ-производящих матрицах

1. Класс $\boldsymbol{M}(n, m)$ исследуемых в работе матриц-функций (сокращенно — м.-ф.) связан с известной задачей Нехари экстраполяции сжимающей м.-ф. $f(\zeta)$ $(|\zeta| = 1, \ \|f\|_\infty \leq 1)$ порядка $n \times m$ по заданным ее коэффициентам Фурье $\gamma_k(f)$:

$$\gamma_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \zeta^k f(\zeta) \, |d\zeta|$$

при $k \geqslant 1$ в так называемом вполне неопределенном случае. В силу этой связи м.-ф. класса $\boldsymbol{M}(n, m)$ названы γ-производящими матрицами.

Интерес автора к м.-ф. класса $\boldsymbol{M}(n, m)$ вызван еще и тем, что к ним сводится исследование j-внутренних м.-ф. W, так как последние в существенном однозначно представимы в виде

$$W = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} A, \ A \in \boldsymbol{M}(n, m), \tag{1.1}$$

где b_1 и b_2 — внутренние м.-ф. порядков n и m. Так же, как класс $\mathbf{M}(n, m)$ связан с задачей Нехари (задачей $N(n, m)$), класс $\boldsymbol{U}(n, m)$ j-внутренних м.-ф. связан с обобщенной би-касательной задачей Шура—Неванлинны—Пика (задачей $SNP(n, m)$). Эти связи прослежены в настоящей работе, результаты которой в основном анонсированы в статьях [1, 2], и подробно изложены в депонированной рукописи [3].

2. Через $L^p_{n\times m}$ обозначается пространство измеримых по мере Лебега на единичной окружности $|\zeta| = 1$ м.-ф. $f(\zeta)$ порядка $n\times m$ с $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{\|f(\zeta)\| : |\zeta| = 1\}$ при $p = \infty$ и $\|f\|^p = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}(\operatorname{Sp} f^*(\zeta) f(\zeta))^{\frac{p}{2}} |d\zeta|$ при $1 \leqslant p < \infty$.

Задача $N(n, m)$. Найти м.-ф. f из $L^\infty_{n\times m}$ такие, что

$$f(\zeta) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \zeta^{-k} + \cdots, \ \|f\|_\infty \leqslant 1, \tag{1.2}$$

где $\gamma_k = \gamma_k(f)$ — заданные матрицы порядка $n \times m$, $k \geqslant 1$.

Здесь будут использованы результаты о задаче $N(n, m)$, имеющиеся в работах [4, 5]. В исследовании задачи (1.2) важную роль играет оператор $\mathbf{\Gamma}$, определяемый блочно-ганкелевой матрицей $\mathbf{\Gamma} = [\gamma_{j+k-1})_1^\infty$, $\Gamma\xi = \eta$, где $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty \in l^2_m$, $\eta = \{\eta_j\}^\infty{}_1$, $\eta_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1}\zeta_k$. Через l^2_m обозначается гильбертово пространство последовательностей $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty$ с $\|\xi\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\|\xi_k\|^2$, где $\xi_k \in C^m$, C^m — обычное эвклидово пространство вектор-столбцов из m комплексных чисел).

Через F_Γ обозначается множество решений задачи (1.2). Известно, что $\|\mathbf{\Gamma}\| = \min\{\|f\|_\infty : f \in L^\infty_{n\times m}, \ \gamma_k(f) = \gamma_k, \ k \geqslant 1\}$ и, следовательно, $F_\Gamma \neq \varnothing \leftrightarrow \|\mathbf{\Gamma}\| \leqslant 1$. Поэтому, если существует $f \in F_\Gamma$ с $\|f\|_\infty < 1$, и только в этом случае имеем $\|\mathbf{\Gamma}\| < 1$. Нас будет интересовать более общий, вполне неопределенный случай. Он выделяется следующим образом. Рассматривается $K_\Gamma = \{\gamma_0 : \gamma_0 = \gamma_0(f), f \in F_\Gamma\}$. Известно [4], что K_Γ — матричный шар, т. е. $K_\Gamma = \{\gamma_0 : \gamma_0 = \gamma_0^c + R_\Lambda V R_\pi, \ V^*V \leqslant I\}$, где γ_0^c — матрица порядка $n \times m$ (центр шара); $R_\Lambda \geqslant 0$ и $R_\Gamma \geqslant 0$ — матрицы порядков n и m (левый и правый полурадиусы шара, определяемые с точностью до положительного числа r $(R_\Lambda \to rR_\Lambda, \ R_\pi \to r^{-1}R_\pi)$).

Задача (1.2) называется вполне неопределенной, если $R_\Lambda > 0$ и $R_\pi > 0$ у шара K_Γ. Известно [4], что для задачи (1.2) условия а) $R_\Lambda > 0$ и б) $R_\pi > 0$ эквивалентны, и они равносильны условиям а) $C^n \subset (I - \Gamma\Gamma^*)^{1/2} l_n^2$, в) $C^m \subset (I - \Gamma^*\Gamma)^{1/2} l_m^2$ (C^m рассматривается как подпространство таких $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty$ из l_m^2, у которых $\xi_k = 0$ при $k > 1$).

Обозначим через $R_\Lambda(\Gamma)$ и $R_\pi(\Gamma)$ полурадиусы $R_\Lambda (> 0)$ и R_π (> 0) шара K_Γ, нормированные условием $\det R_\pi(\Gamma) = \det R_\pi(\Gamma)$. В [4] получены формулы для операторов, определяемых в естественных базисах в C^n и C^m матрицами $R_\Lambda^{-2}(\Gamma)$ и $R_\pi^{-2}(\Gamma)$:

$$R_\Lambda^{-2}(\Gamma) = \lim_{\rho \to 1-0} P_{C^n}(I - \rho\Gamma\Gamma^*)^{-1} \mid C^n, \quad R_\pi^{-2}(\Gamma) = \lim_{\rho \to 1-0} P_{C^m}(I - \rho\Gamma^*\Gamma)^{-1}_{C^m}$$

(P_N — ортопроектор на N, $A \mid N$ — сужение оператора A на N). В дальнейшем будет представлять интерес величина

$$d(\Gamma) = \det R_\nu^{-2}(\Gamma) (= \det R_\pi^{-2}(\Gamma)).$$

3. Через $H_{n\times m}^p$ обозначается пространство голоморфных в круге $D = \{z : |z| < 1\}$ м.-ф. $h(z) = \sum_0^\infty h_k z^k$ порядка $n \times m$ с $\|h\|_\infty = \sup_{r<1} \{\|h(z)\| : |z| < 1\}$ при $p = \infty$ и $\|h\|^p = \sup_{r<1} 1/2\pi \int_{|\zeta|=1} [\mathrm{sp}(h^* \times (r\xi) h(r\xi))^{p/2} |d\zeta|$ при $1 \leqslant p < \infty$ ($H_{n\times m}^2$ — гильбертово пространство с $\|h\|^2 = \sum_0^\infty \mathrm{sp}(h_k^* h_k)$). Известно, что для $h(z)$ из $H_{n\times m}^p$ существуют граничные значения $h(\zeta) = \lim h(r\xi)$ почти всюду на $\partial D = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$, причем $h(\zeta) \in L_{n\times m}^p$, $\gamma_k(h) = 0$ при $k \geqslant 1$, $\gamma_{-k}(h) = h_k$ при $k \geqslant 0$; $\operatorname{ess\,sup}_{|\zeta|\ 1} \|h(\zeta)\| = \sup_{|z|<1} \|h(z)\| (= \|h\|_\infty)$ при $p = \infty$, ($\|h\|^2 = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \mathrm{sp}(h^*(r\zeta) h(r\zeta)) |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \mathrm{sp}(h^*(\zeta) h(\zeta)) |d\zeta|$ при $p = 2$). Будем отождествлять м.-ф. $h(z)$ из $H_{n\times m}^p$ с соответствующими м.-ф. $h(\zeta)$ из $L_{n\times m}^p$.

Через $B_{n\times m}$ обозначается множество м.-ф. h из $H_{n\times n}^\infty$ с $\|h\|_\infty \leqslant 1$, $B_n \overset{\text{def}}{=} B_{n\times n}$. М.-ф. h из $H_{n\times m}^\infty$ с $\det h(z) \not\equiv 0$ является внешней, если $\ln |\det h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \ln |\det h(\zeta)| \cdot |d\zeta|$; м.-ф. b из $H_{n\times m}^\infty$ называется внутренней, если $b^*(\zeta) b(\zeta) = I_m$ почти всюду на ∂D. Известно, что для произвольной м.-ф. h из $H_{n\times m}^\infty$ с $\det h(z) \not\equiv 0$ справедлива внешне-внутренняя факторизация: $h = b \cdot \varphi$, где φ ($\in H_{n\times n}^\infty$) — внешняя, а b ($\in B_n$) — внутренняя м.-ф.

Задача SNP (n, m). Найти м.-ф. s такие, что

$$b_1^{-1}(s - s_0) b_2^{-1} \in H_{n\times m}^\infty, \quad s \in B_{n\times m}, \tag{1.3}$$

где s_0, b_1, b_2 — *заданные м.-ф.*, $s_0 \in B_{n\times m}$, $b_1 \in B_n$, $b_2 \in B_m$, b_1 и b_2 — *внутренние м.-ф.*

Заменой $f = b_1^{-1} s b_2^{-1}$ задача (1.3) сводится к задаче (1.2) с $\gamma_k = \gamma_k (b_1^{-1} s_0 b_2^{-1})$, $k \geqslant 1$. Задача (1.3) является вполне неопределенной, если соответствующая задача (1.2) является такой. Этот случай можно выделить также следующим образом.

Через $F_{s_0 b_1 b_2}$ обозначим множество решений задачи (1.3). Рассмотрим $z_0 (\in D)$ такое, что $\det [b_1 (z_0) b_2 (z_0)] \neq 0$. Пусть $K (z_0) = \{s (z_0) : s \in F_{s_0 b_1, b_2}\}$, $z_0 \in D$. Это матричный шар. Задача (1. 3) называется вполне неопределенной, если левый и правый полурадиусы $R_\Lambda (z_0)$ и $R_\pi (z_0)$ этого шара невырождены. Для вполне неопределенной задачи при $z_0 = 0$ имеем $d (\Gamma) = \det (R_\Lambda(0) R_\pi(0)) / |\det (b_1 (0) b_2 (0)|$.

К задаче SNP (n, m) сводится целый ряд задач экстраполяции м.-ф. класса $B_{n\times m}$: при $b_1 = I_n$ и $b_2 = z^l I_m$ имеем матричную задачу Шура нахождения м.-ф. $s (\in B_{n\times m})$ по заданным первым коэффициентам ее разложения в ряд Маклорена, т. е. по заданным значениям $s(0)$, $s'(0)$, ... , $s^{(l-1)}(0)$; при $b_1 = I_n$ и $b_2 = bI_m$, где b — скалярное произведение Бляшке с простыми нулями z_k, имеем матричную задачу Неванлинны—Пика нахождения м.-ф. $s (\in B_{n\times m})$ по заданным ее значениям $s (z_k)$; при $b_1 = I_n$ и $b_2 = b$, где b — произведение Бляшке-Потапова, имеем задачу нахождения м.-ф. $s (\in B_{n\times m})$ по ее «касательным» данным, точная постановка и исследование которой выполнены в работах И. П. Федчиной [6]; при $b_1 = I_n$ и $b_2 = bI_m$, где $b (z) = \exp \{-\alpha (1 - z)/(1 + z)\}$, $(\alpha > 0)$, имеем задачу, к которой сводится матричная задача Крейна продолжения винтовой м.-ф. порядка n $(m = n)$ с конечного отрезка $[-\alpha, \alpha]$. Когда b_1 и b_2 — произведения Бляшке-Потапова, имеем би-касательную задачу нахождения м.-ф. $s (\in B_{n\times m})$ по касательным данным для $s(z)$ и $s^*(z)$. Поэтому задача $SNP (n, m)$ названа *обобщенной би-касательной задачей Шура—Неванлинны—Пика.*

Задача $SNP (n, m)$ рассматривалась в работах [7, 8]. Она эквивалентна лифтинг-проблеме в случае, когда сжатия T_1 и T_2, сплетающие сжатие X, таковы, что T_1, $T_2 \in C_0$ и $\mathrm{rang} (I - T_1^* T_1) = n$, $\mathrm{rang} (I - T_2^* T_2) = m$. Общая постановка лифтинг-проблемы и определенные результаты о ней имеются в известной монографии Б. С. Секефальви-Надя и Ч. Фойаша «Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве»; в дальнейшем ей был посвящен цикл работ Ч. Фойаша, З. Чаушеску, Г. Арсена и др. [9].

4. Приведем ниже в виде теоремы А известное описание множества F_Γ во вполне неопределенном случае, полученное в [10] при $n = m = 1$, в [4] — при $\|\Gamma\| < 1$ и, наконец, в [5] — без каких-либо дополнительных ограничений. Предварительно введем ряд понятий и обозначений.

Определение. *γ-производящей матрицей называется матрица-функция* $A (\zeta)$ $(|\zeta| = 1)$ *порядка* $n + m$, *разбитая на блоки* $p_\pm (\zeta)$ и $q_\pm (\zeta)$:

$$A (\zeta) = \begin{bmatrix} p_- (\zeta) & q_- (\zeta) \\ q_+ (\zeta) & p_+ (\zeta) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

с диагональными блоками p_- *и* p_+ *порядков* n *и* m, *если* $A(\zeta)$ *обладает свойствами:*

1) $A(\zeta)$ *принимает* j*-унитарные значения почти всюду на* ∂D, *т. е.*

$$A^*(\zeta)\, jA(\zeta) = j, \quad A(\zeta)\, jA^*(\zeta) = j; \quad j = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix}; \qquad (1.5)$$

2) $p_+^{-1}(z)$ *и* $[p_-^*(z)]^{-1}$ — *внешние матрицы-функции из* B_m *и* B_n;

3) $\chi \overset{\text{def}}{=} -p_+^{-1}q_+ \in B_{m\times n}$. (1.6)

Если к тому же

4) $p_+(0) > 0, \quad p_-^*(0) > 0,$

то назовем $A(\zeta)$ ***нормированной*** γ***-производящей матрицей.***

Обозначения. Множество всех γ-производящих матриц (с фиксированными n и m) обозначим через $\boldsymbol{M}(n, m)$, а нормированных — через $\boldsymbol{M}^0(n, m)$.

Для м.-ф. $A(\varepsilon)$, рассматриваемой в (1.4), положим

$$F_A(E) = [p_-(\zeta)E(\zeta) + q_-(\zeta)]\cdot[q_+(\zeta)E(\zeta) + p_+(\zeta)]^{-1}, \qquad (1.7)$$
$$E \in B_{n\times m}$$

$$F_A(B_{n\times m}) = \{f : f = F_A(E),\ E \in B_{n\times m}\}.$$

Теорема А. *Для произвольной вполне неопределенной задачи* (1.2) $\exists A$: $F_\Gamma = F_A(B_{n\times m})$, $A \in M(n, m)$.

5. Приведем теперь ряд новых результатов о γ-производящих матрицах и их связях с задачей $N(n, m)$.

Назовем γ-производящую матрицу $A(\in \boldsymbol{M}(n, m))$ *сингулярной*, если $F_A(0)\,(= q_-p_+^{-1}) \in B_{n\times m}$. Множество таких A обозначим через $\boldsymbol{M}_s(n, m)$. Будет показано, что $F_A(B_{n\times m}) \subset B_{n\times m}$ для $A \in \boldsymbol{M}_s(n, m)$.

Назовем γ-производящую матрицу $A\ (\in \boldsymbol{M}(n, m))$ *регулярной*, если для нее не существует непостоянной м.-ф. A_s из $\boldsymbol{M}_s(n, m)$ такой, что $A\cdot A_s^{-1} \in \boldsymbol{M}(n, m)$. Множество таких A обозначим через $\boldsymbol{M}_r(n, m)$.

Множества нормированных A из $\boldsymbol{M}_r(n, m)$ и $\boldsymbol{M}_s(n, m)$ обозначим соответственно через $\boldsymbol{M}_r^0(n, m)$ и $\boldsymbol{M}_s^0(n, m)$.

Теорема 1. *Пусть* $A \in \boldsymbol{M}(n, m)$, $f_0 = F_A(0)\ \ (= q_-p_+^{-1} \in L^\infty_{n\times m}$, $\|f_0\|_\infty \leqslant 1)$, $\gamma_k = \gamma_k(f_0)$ — *коэффициенты Фурье м.-ф.* f_0 *при* ζ^{-k} $(k \geqslant 1)$. *Тогда*

а) $F_A(B_{n\times m}) \subset F_\Gamma$;

б) *задача* (1.2) *является вполне неопределенной*;

в) $F_A(B_{n\times m}) = F_\Gamma \Longleftrightarrow A \in \boldsymbol{M}_r(n, m)$.

Теорема 2. а) *Если* $A_1, A_2 \in \boldsymbol{M}_s(n, m)$, *то* $A_1\cdot A_2 \in \boldsymbol{M}_s(n, m)$;

б) *если* $A_1 \in \boldsymbol{M}(n, m)$, $A_2 \in \boldsymbol{M}_s(n, m)$, *то* $A_1 \cdot A_2 \in \boldsymbol{M}(n, m)$;

в) $\forall A\,(\in \boldsymbol{M}(n, m))\ \exists!\ A_r, A_s$: $A = A_r \cdot A_s$, $A_r \in \boldsymbol{M}_r^0(n, m)$, $A_s \in \boldsymbol{M}_s(n, m)$.

Теорема 3. *Пусть* $A_1, A_2 \in \boldsymbol{M}(n, m)$. *Тогда*

а) $F_{A_1}(B_{n\times m}) \subset F_{A_2}(B_{n\times m}) \Longleftrightarrow A_2^{-1}A_1 \in \boldsymbol{M}_s(n, m)$;

б) $F_{A_1}(B_{n\times m}) = F_{A_2}(B_{n\times m}) \Longleftrightarrow A_2^{-1}A_1 = \text{const}$;

в) если $F_{A_1}(B_{n\times m}) = F_{A_2}(B_{n\times m})$ *и* $A_1, A_2 \in \boldsymbol{M}^0(n, m)$, *то* $A_1 = A_2$.

Считая, что $A_1 \simeq A_2$, если $A_1^{-1}A_2 = \mathrm{const}$, и $A_1 < A_2$, *если* $A_2^{-1}A_1 \in \boldsymbol{M}_s(n, m)$, *получаем, что* $\boldsymbol{M}(n, m)$ (*точнее, классы эквивалентности, на которые разбивается* $\boldsymbol{M}(n, m)$ *соотношением* «$\simeq$») — *частично упорядоченное множество, а* $\boldsymbol{M}_r(n, m)$ — *множество его максимальных элементов. По теореме 3,*

$$A_1 < A_2 \Leftrightarrow F_{A_1}(B_{n\times m}) \subset F_{A_2}(B_{n\times m}),$$
$$A_1 \simeq A_2 \Leftrightarrow F_{A_1}(B_{n\times m}) = F_{A_2}(B_{n\times m}),$$

а по теореме 2 (пункт в) для любого A *из* $\boldsymbol{M}(n, m)$ *существует максимальный элемент* $A_r (\in \boldsymbol{M}_r(n, m))$ *такой, что* $A \subset A_r$.

Для $A \in \boldsymbol{M}(n, m)$ рассмотрим $f_E = F_A(E)$ $(E \in B_{n\times m})$. Согласно теореме 1

$$h_E \stackrel{\text{def}}{=} f_E - f_0 \in H^\infty_{n\times m}.$$

Рассмотрим

$$K(A;\ z_0) = \{h_E(z_0 : E \in B_{n\times m}\},\ (z_0 \in D). \tag{1.8}$$

Теорема 4. а) $\forall A (\in \boldsymbol{M}(n, m)) \forall z_0 (\in D) : K(A,\ z_0)$ — *матричный шар с невырожденными левым и правым полурадиусами* $R_\Lambda(A;\ z_0)$ *и* $R_\Pi(A;\ z_0)$, *для которых при нормировке* $\det R_\Lambda = \det R_\Pi$ *имеем*

$$R_\Lambda^{-2}(A;\ z_0) = [(p_-^*)(z_0)]^* \cdot (p_-^*)(z_0) - [(q_-^*)(z_0)]^* \cdot (q_-^*)(z_0), \tag{1.9}$$
$$R_\Pi^{-2}(A;\ z_0) = p_+(z_0)\, p_+^*(z_0) - q_+(z_0)\, q_+^*(z_0); \tag{1.10}$$

б) *если* $A_1 < A_2$, *то* $R_\Lambda^{-2}(A_2,\ z_0) \leqslant R_\Lambda^{-2}(A_1,\ z_0)$ *и* $R_\Pi^{-2}(A_2,\ z_0) \leqslant$ $\leqslant R_\Pi^{-2}(A_1,\ z_0)$;

в) *если* $A_1 < A_2$ *и* $\det R_\Lambda(A_2, z_0) = \det R_\Lambda(A_1, z_0)$ $\det R_\Pi(A_2, z_0) =$ $= \det R_\Pi(A_1,\ z_0)$, то $A_1 \simeq A_2$.

Обозначим

$$d(A) = \det R_\Lambda^{-2}(A;\ 0)\,(= \det R_\Pi^{-2}(A;\ 0)).$$

Теорема 5. *Пусть* $A \in \boldsymbol{M}(n, m)$, $f_0 = F_A(0)$, $\gamma_k = \gamma_k(f_0)$, $(k \geqslant 1)$. *Тогда*

а) $R_\Lambda^{-2}(\Gamma) \leqslant R_\Lambda^{-2}(A;\ 0)$, $\quad R_\Pi^{-2}(\Gamma) \leqslant R_\Pi^{-2}(A;\ 0)$;

б) $A \in \boldsymbol{M}_r(n, m) \Leftrightarrow d(\Gamma) = d(A)$.

В работе получен и другой критерий того, что $A \in \boldsymbol{M}_r(n, m)$. Для его формулировки рассмотрим пространства

$$H^2_{p\times q} = L^2_{p\times q} \ominus \zeta H^2_{p\times q}\ \ (= h : h \in L^2_{p\times q},\ \gamma_{-k}(h) = 0,\ k \geqslant 1\}),$$
$$L^2_p = L^2_{p\times 1},\quad H^2_p = H^2_{p\times 1},\ \overline{H}^2_p = \overline{H}^2_{p\times 1}.$$

Для унитарнозначной м.-ф. ($f \in L^\infty_{n\times n}$) запись $\operatorname{ind} f = 0$ будет означать, что f представима в виде

$$f = \varphi_-^{-1}\varphi_+,\quad \varphi_+ \in H^2_{n\times n},\quad \varphi_- \in \overline{H}^2_{n\times n}, \tag{1.11}$$

причем это представление в существенном однозначно, т. е. если $f = \tilde\varphi_-^{-1}\tilde\varphi_+$ — другое такое же представление, то $\tilde\varphi_\pm = x \cdot \varphi_\pm$, где $x = \mathrm{const}$, $\det x \neq 0$.

Теорема 6. *Пусть* $A \in \boldsymbol{M}(n, m)$, $f_{E_0} = F_A(E_0)$, *где* E_0 — *постоянная матрица порядка* $n \times m$, $E_0^* E_0 = I_m$ *или* $E_0 E_0^* = I_n$ *соответственно при* $n \geqslant m$ *и* $n < m$. *Для того чтобы* $A \in \boldsymbol{M}_r(n, m)$, *необходимо и достаточно, чтобы при любой рассматриваемой* E_0 *имели*

а) *в случае* $m = n$ *краевая задача* $f_{E_0}^* h_+ = h_-$, $h_+ \in H_n^2$, $h_- \in \bar{\zeta} \bar{H}_n^2$ (1.12) *имела лишь нулевое решение* ($h_+ = h_- = 0$), *что для* f_{E_0} *эквивалентно условию* $\operatorname{ind} f_{E_0} = 0$ (*достаточно, чтобы это условие выполнялось при* $E_0 = \pm I_n$);

б) *в случае* $m < n$ *задача* (1.12) *имела решения лишь с* $h_- = 0$;

в) *в случае* $m > n$ *задача*

$$f_{E_0} h_- = h_+, \quad h_+ \in H_n^2, \quad h_- \in \bar{\zeta} H_m^2 \tag{1.13}$$

имела решение лишь при $h_+ = 0$.

Список литературы: 1. *Аров Д. З.* Об одной интерполяционной задаче и индефинитном произведении Бляшке—Потапова // Тез. докл.: Школа по теории операторов в функциональных пространствах. Минск, 1982. С. 14—15. 2. *Arov D. Z.* Three problems about j-inner matrix — functions // Lect. Notes in Math. **1043**. Linear and Complex Analysis Problem Book. 199 Research Problems // Springer. 1984. P. 164—168. 3. *Аров Д. З.* Регулярные *j*-внутренние матрицы-функции и соответствующие задачи продолжения. К., 1987. С. 77. Деп. в УКРНИИНТИ 15.01.87, № 406—Ук87. 4. *Адамян В. М. и др.* Бесконечные ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения / В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн // Изв. АН АрмССР, сер. мат. 1971. **VI**, № 2—3. С. 87—112. 5. *Адамян В. М.* Невырожденные полуунитарные сцепления унитарных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1973. 7, вып. 4. С. 1—16. 6. *Федчина И. П.* Описание решений касательной проблемы Неванлинны—Пика // ДАН АрмССР. 1975. **XI**, № 4. С. 214—218. 7. *Аров Д. З., Крейн М. Г.* О вычислении энтропийных функционалов и их минимумов в неопределенных проблемах продолжения // Acta Sci. Math. 1983. **45**, № 1—4. P. 33—50. 8. *Helton I. W.* Non-euclidean functiona analysis and electronics // Bull. of the Amer. Math. Soc. 1982. **7**, № 1. P. 1—64. 9. *Arsene Cr. et al.* On interwining dilations, VIII / Gr. Arsene, Z. Ceausescu, C. Foias // Journ. of Operator Theory. 1980. **4**. P. 55—91. 10. *Адамян В. М. и др.* Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори-Фейера и И. Шура / В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн // Функцион. анализ и его прил. 1968. **2**, вып. 4. С. 1—17.

Поступила в редколлегию 06.01.86