УДК 517.53

А. Ф. ГРИШИН

О МНОЖЕСТВАХ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ. I

Введение

Определение 1. *Отображение $T(z)$, определенное на множестве E, называется асимптотически тождественным на бесконечности, если*

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ \in E}} \frac{T(z)-z}{z}=0.$$

Определение 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, $\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$. Множество E называется множеством регулярного роста функции $f(z)$ если существует отображение $T(z)$, определенное на E, асимптотически тождественное на бесконечности, такое, что*

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in T(E)}}\left[\frac{\ln|f(z)|}{r^{\rho(r)}}-h(\theta)\right]=0,\quad z=re^{i\theta}. \tag{1}$$

Определение 3. *Пусть E — множество регулярного роста для функции $f(z)$, A — предельное множество функции $\arg z \pmod{2\pi}$ при $z\to\infty$, $z\in E$. Пусть $h_1(\theta)$ — тригонометрически ρ — выпуклый индикатор такой, что $h_1(\theta)\geqslant h(\theta)$, $h_1\theta=h(\theta)$ при $\theta\in A$. Тогда множество E называется множеством регулярного роста функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$.*

Таким образом, если множество E есть множество регулярного роста функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$, то, во-первых, $h_1(\theta)\geqslant h(\theta)$, где $h(\theta)$ — индикатор функции $f(z)$, и, во-вторых, существует отображение T, определенное на E и асимптотически тождественное на бесконечности такое, что

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in T(E)}}\left[\frac{\ln|f(z)|}{r^{\rho(r)}}-h_1(\theta)\right]=0. \tag{2}$$

Основные результаты работы содержатся в следующих трех утверждениях. Сейчас они формулируются не в полном объеме.

1. *Если E — подмножество множества корней функции $f(z)$ и одновременно множество регулярного роста этой функции относительно индикатора $h_1(\theta)$, то существует целая функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h_1(\theta)$, которая обращается в ноль на множестве E.*

Доказательство этого утверждения основывается на следующем результате, который имеет и самостоятельное значение.

2. *Пусть $u(z)$ и $v(z)$ — субгармонические функции, $w(z)=u(z)-v(z)$, $w(z)\geqslant 0$. Пусть μ_w — риссовская мера $w(z)$, а $E=\{z: w(z)=0\}$. Тогда μ_{wE} — ограничение меры μ_w на множество E, есть неотрицательная мера.*

Первое утверждение применяется для решения одной задачи в теории интерполяции целыми функциями. Пусть a_n, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, последовательность комплексных чисел. Пусть последовательность b_n такова, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{r_n^{\rho(r_n)}}\ln|b_n|-h(\theta_n)\right]\leqslant 0,\quad a_n=r_ne^{i\theta_n}, \tag{3}$$

где $\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$, h — тригонометрически ρ-выпуклый индикатор.

3. *Пусть $A=\{a_n,\ n=1,2,\ldots,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty\}$ — фиксированная последовательность комплексных чисел. Чтобы для любой последовательности комплексных чисел b_n, удовлетворяющих условию (3) существовала целая функция с индикатором, не превосходящим $h(\theta)$, решающая интерполяционную задачу $f(a_n)=b_n$, необходимо, чтобы существовала целая функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$, которая обращалась бы в ноль на множестве A, причем $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}}\ln\frac{1}{|\varphi'(\lambda_n)|}+h(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0$, где λ_n — последовательность корней функции $\varphi(z)$.*

1. Новое определение и старое. В работе [1, гл. III] приведено следующее определение. Функция $F(z)$ называется функцией вполне регулярного роста на множестве лучей R_M (M — множество значений θ) относительно уточненного порядка $\rho(r)$, если функция $h_{F, r}(\theta) = \frac{\ln|F(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}}$ равномерно на множестве M стремится к индикатору $h(\theta)$ функции $F(z)$ при $r \to \infty$, $r \overline{\in} E_M$, где E_M — множество интервалов нулевой плотности. Последнее означает, что $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R} \operatorname{mes}(E_M \cap [0, R]) = 0$. Там же доказана теорема о том, что множество всех лучей вполне регулярного роста целой функции $F(z)$ есть замкнутое множество.

Теорема 1. *Для того чтобы луч* $\Lambda = \{z : \arg z = \theta_0\}$ *был множеством регулярного роста целой функции* $f(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *была функцией вполне регулярного роста на этом луче.*

В одну сторону доказательство теоремы простое. Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок функции $f(z)$, $h(\theta)$ — ее индикатор. Если на луче Λ функция $f(z)$ вполне регулярного роста, то это означает существование на этом луче множества интервалов E нулевой плотности такого, что

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ z\overline{\in} E}} \left[\frac{\ln|f(re^{i\theta_0})|}{r^{\rho(r)}} - h(\theta_0)\right] = 0.$$

Определим на луче Λ отображение $T(z) = \begin{cases} z, & z \overline{\in} E \\ \zeta, & z \in E \end{cases}$, где ζ — один из концов интервала из множества E, которому принадлежит точка z. Так определенное отображение $T(z)$ является асимптотически тождественным на бесконечности и для него выполняется соотношение (1).

Доказательство обратного утверждения сложнее. Оно во многом похоже на доказательство уже упоминавшейся теоремы о замкнутости множества лучей вполне регулярного роста. Итак, пусть Λ — множество регулярного роста функции $f(z)$, а $T(z)$ — отображение из определения 2. Пусть ε, η, ε_1, η_1 — произвольные числа из интервала $(0, 1)$. В силу равномерной непрерывности индикатора существует число δ_1, $0 < \delta_1 < 1$ такое, что при $|\theta_1 - \theta_2| < \delta_1$ будет выполняться неравенство

$$|h(\theta_1) - h(\theta_2)| < \varepsilon_1. \tag{4}$$

Через $C(z, \alpha)$ обозначим открытый круг с центром в точке z радиуса α. Существует множество E_{η_1}, состоящее из открытых непересекающихся кругов $E_{\eta_1} = \bigcup C(z_j, \alpha_j)$, верхняя линейная плотность которого не превосходит η_1 $\left(\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{1}{R} \sum_{|z_j|<R} \alpha_j < \eta_1\right)$, вне которого функция $\frac{\ln|f(z)|}{r^{\rho(r)}}$ равномерно непрерывна. Это означает, что по числу ε_1 можно найти δ_2, $0<\delta_2<1$, такое, что при $|h|\leqslant\delta_2$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{\ln|f(z_1)|}{|z_1|^{\rho(|z_1|)}} - \frac{\ln|f(z)|}{|z|^{\rho(|z|)}}\right| < \varepsilon_1, \quad z_1 = z + hz, \ z\overline{\in} E_{\eta_1}, \ z_1\overline{\in} E_{\eta_1}. \quad (5)$$

Доказательство этого утверждения отражено в работах [1, гл. II, теорема 7] и [5]. Пусть $0<\delta_3<\min\delta_1, \delta_2)$. Так как отображение $T(z)$ асимптотически тождественное на бесконечности, то существует число R_1 такое, что при $|z|\geqslant R_1$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{T(z)-z}{z}\right| \leqslant \frac{1}{8}\delta_3. \quad (6)$$

Пусть R_2 такое, что при $|z|\geqslant R_2$, $z\in T(\Lambda)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\ln|f(z)|}{r^{\rho(r)}} - h(\theta)\right| \leqslant \varepsilon_1. \quad (7)$$

Пусть $|z_2 - z_1|\leqslant\delta_3|z_1|$; $a=(1-\delta_3)|z_1|$; $b=(1+\delta_1)|z_1|$. Из монотонности функции $r^{\rho(r)}$ следуют неравенства

$$\frac{|z_1|^{\rho(|z_1|)}}{b^{\rho(b)}} \leqslant \frac{|z_1|^{\rho(|z_1|)}}{|z_2|^{\rho(|z_2|)}} \leqslant \frac{|z_1|^{\rho(|z_1|)}}{a^{\rho(a)}}.$$

Так как $\lim_{z_1\to\infty} \frac{|z_1|^{\rho(|z_1|)}}{b^{\rho(b)}} = \frac{1}{(1+\delta_3)^\rho}$; $\lim_{z_1\to\infty} \frac{|z_1|^{\rho(|z_1|)}}{a^{\rho(a)}} = \frac{1}{(1-\delta_3)^\rho}$, то существуют числа δ_4, $0<\delta_4<1$ и R_3 такие, что при $\delta_3\leqslant\delta_4$ и $|z_1|>R_3$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{|z_1|^{\rho(|z_1|)}}{|z_2|^{\rho(|z_2|)}} - 1\right| < \varepsilon_1 M, \quad (8)$$

где $M=\min\left(\frac{1}{\max h(\theta)}, 1\right)$. В дальнейшем при доказательстве теоремы 1 мы будем считать, что $\delta_3\leqslant\delta_4$. Обозначим $R_4 = 2\max\times\times(R_1, R_2, R_3)$. Пусть E_1 — множество, состоящее из интервалов (a_{1s}, b_{1s}) длины l_s с центром u_s, являющееся круговой проекцией множества E_{η_1} на луч Λ. Пусть (a_{2s}, b_{2s}) — гомотетия с коэффициентом 2 интервала (a_{1s}, b_{1s}) относительно u_s. Пусть $E_2 = \bigcup_s (a_{2s}, b_{2s})$. Тогда верхняя плотность множества E_2, т. е.

$\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R} \operatorname{mes}(E_2 \cap [0, Re^{i\theta_0}])$, не превосходит $2\eta_1$. Пусть $z \in \Lambda$, $z \bar{\in} E_2$, $|z| \geqslant R_4$. Так как $z \bar{\in} E_2$, то $z \bar{\in} E_{\tau_1}$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $z_1 = T(z) \bar{\in} E_{\tau_1}$. Из определения R_4 и неравенства (6) следует, что $|z_1| > R_2$, а значит, для точки $z_1 = r_1 e^{i\delta_1}$ справедливо неравенство (7). В рассматриваемом случае для точек z и z_1 справедливо неравенство (5). Кроме того, из (6) следует, что $|\theta_1 - \theta_0| \leqslant \delta_1$, а по неравенству (4) $|h(\theta_1) - h(\theta_0)| < \varepsilon_1$. Тогда

$$\left|\frac{\ln|f(z)|}{|z|^{\rho(|z|)}} - h(\theta_0)\right| \leqslant \left|\frac{\ln|f(z)|}{|z|^{\rho(|z|)}} - \frac{\ln|f(z_1)|}{|z_1|^{\rho(|z_1|)}}\right| + \left|\frac{\ln|f(z_1)|}{|z_1|^{\rho(|z_1|)}} - h(\theta_1)\right| +$$
$$+ |h(\theta_1) - h(\theta_0)| \leqslant 3\varepsilon_1. \tag{9}$$

2). Пусть $z_1 = T(z) \in E_{\eta_1}$. Пусть w принадлежит кругу C_s, круговая проекция которого на луч Λ есть интервал $(a_s, b_s) \subset (a_{1s}, b_{1s})$. Пусть $\Delta_s = \frac{l_s}{u_s}$, $z \in \Lambda$, $z \bar{\in} E_2$. Оценим величину $\left|\frac{w-z}{z}\right|$.

i). Пусть $|w| \leqslant |z|$. Тогда $\left|\frac{w-z}{z}\right| \geqslant \frac{|z| - |w|}{|z|} \geqslant \frac{|z| - |u_s| - \frac{1}{2} l_s}{z} \geqslant$
$$\geqslant \frac{|u_s| + l_s - |u_s| - \frac{1}{2} l_s}{|u_s| + l_s} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_s}{1 + \Delta_s}.$$

ii). Пусть $|w| \geqslant |z|$. Тогда $\left|\frac{w-z}{z}\right| \geqslant \frac{|w| - |z|}{|z|} \geqslant \frac{|u_s| - \frac{1}{2} l_s - |z|}{|z|} \geqslant$
$$\geqslant \frac{|u_s| - \frac{1}{2} l_s - |u_s| + l_s}{|u_s| - l_s} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_s}{1 - \Delta_s}.$$

Таким образом, если $w \in C_s$, $z \in \Lambda$, $z \bar{\in} E_2$, то

$$\left|\frac{w-z}{z}\right| \geqslant \frac{1}{2} \frac{\Delta_s}{1 - \Delta_s} \geqslant \frac{1}{4} \Delta_s. \tag{10}$$

Если $z_1 = Tz \in C_s \subset E_{\tau_1}$, то из неравенств (10) и (6) следует, что $\Delta_s \leqslant \frac{1}{2} \delta_3$. Рассмотрим круг C_s. На границе этого круга найдется точка z_2 такая, что $\ln|f(z_2)| > \ln|f(z_1)|$. Точка z_2 уже не принадлежит множеству E_{η_1}, так как множество E_{η_1} состоит из непересекающихся кругов. Кроме того,

$$|z_2 - z_1| \leqslant l_s = \Delta_s |u_s| = \Delta_s \frac{|u_s|}{|z_1|} |z_1| \leqslant \Delta_s \frac{|u_s|}{|u_s| - \frac{1}{2} l_s} |z_1| =$$
$$= \frac{\Delta_s}{1 - \frac{1}{2}\Delta_s} |z_1| \leqslant \frac{1}{2} \frac{\delta_3}{1 - \frac{1}{4}\delta_3} |z_1| \leqslant \frac{2}{3} \delta_3 |z_1|; \tag{11}$$

$$|z_2 - z| \leqslant |z_2 - z_1| + |z_1 - z| \leqslant \frac{2}{3}\delta_3 |z_1| + \frac{1}{8}\delta_3 |z| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{3}\frac{\delta_3}{1-\frac{1}{8}\delta_3} + \frac{1}{8}\delta_3\right)|z| < \delta_3 |z|.$$

Поэтому по неравенству (5) имеем $\left|\frac{\ln|f(z)|}{|z|^{\rho(|z|)}} - \frac{\ln|f(z_2)|}{|z_2|^{\rho(|z_2|)}}\right| \leqslant \varepsilon_1$.

Далее $\frac{\ln|f(z)|}{|z|^{\rho(|z|)}} \geqslant \frac{\ln|f(z_2)|}{|z_2|^{\rho(|z_2|)}} - \varepsilon_1 > \frac{\ln|f(z_1)|}{|z_2|^{\rho(|z_2|)}} - \varepsilon_1 = \frac{\ln|f(z_1)|}{|z_1|^{\rho(|z_1|)}} \times$
$\times \frac{|z_1|^{\rho(|z_1|)}}{|z_2|^{\rho(|z_2|)}} - \varepsilon_1 \geqslant (h(\theta_1) - \varepsilon_1)\frac{|z_1|^{\rho(|z_1|)}}{|z_2|^{\rho(|z_2|)}} - \varepsilon_1 = h(\theta_1) + h(\theta_1) \times$

$$\times \left[\frac{|z_1|^{\rho(|z_1|)}}{|z_2|^{\rho(|z_2|)}} - 1\right] - \varepsilon_1 \frac{|z_1|^{\rho(|z_1|)}}{|z_2|^{\rho(|z_2|)}} - \varepsilon_1.$$

Теперь из неравенств (11), (8), (6), (4) получим

$$\frac{\ln|f(z)|}{|z|^{\rho(|z|)}} \geqslant h(\theta_1) - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_1(1+\varepsilon_1) \geqslant h(\theta_0) - 5\varepsilon_1; \tag{12}$$

Если положить $\eta = 2\eta_1$; $\varepsilon = 5\varepsilon_1$; $E_\eta = E_2$, то из неравенств (9), (12) получим, что на луче Λ вне множества интервалов E_η, с верхней плотностью не превышающей η, при $|z| \geqslant R(\varepsilon, \eta) = R_4$ выполняется неравенство $\frac{\ln|f(z)|}{r^{\rho(r)}} > h(\theta_0) - \varepsilon$, $z = re^{i\theta_0}$.

В силу произвольности чисел $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ из этого следует [1, гл. III, § 1, Лемма 1], что функция $f(z)$ имеет вполне регулярный рост на луче $\arg z = \theta_0$. Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы целая функция $f(z)$ была функцией вполне регулярного роста, необходимо и достаточно, чтобы вся комплексная плоскость Z была множеством регулярного роста функции $f(z)$.*

Теорема 2 доказывается так же, как и теорема 1.

2. Доказательство вспомогательной теоремы.

Теорема 3. *Пусть u, v — субгармонические функции в плоскости Z, $w = u - v$, $w \geqslant 0$. Пусть ν — риссовская мера функции $w(z)$, $E = \{z : w(z) = 0\}$. Пусть ν_E — ограничение меры ν на множество E. Тогда мера ν_E — неотрицательная.*

В начале доказательства отметим, что под $w(z)$ мы будем понимать $\lim\limits_{n\to\infty} w_n(z)$, $w_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} w\left(z + \frac{1}{n}e^{i\varphi}\right)d\varphi$ в тех же точках, где он существует. Это, с одной стороны, расширяет область определения функции $w(z)$, позволяя приписывать ей определенные значения в некоторых из точек z, для которых $u(z) = v(z) = -\infty$, а с другой стороны, позволяет провести следующее рассуждение.

Пусть $E_{n,m} = \left\{z\colon -\frac{1}{m} < \omega_n(z) < \frac{1}{m}\right\}$. В силу непрерывности функции $\omega_n(z)$ множество $E_{n,m}$ — открытое. Так как $E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} E_{n,m}$, то E — борелевское множество и ν_E — борелевская мера. Пусть E_1 — компакт, лежащий в E, $z \in E_1$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega\left(z + \frac{1}{n} e^{i\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(z + Re^{i\varphi})\, d\varphi - \int_{1/n}^{R} \frac{\nu_z(t)}{t}\, dt,$$

где $\nu_z(t) = \nu(C(z, t)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int_0^R \frac{\nu_z(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(z + Re^{i\varphi})\, d\varphi \geqslant 0.$$

Поэтому существует такая последовательность $t_n = t_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$, что $\nu_z(t_n) = \nu(C(z, t_n)) \geqslant 0$.

Далее мы воспользуемся обобщенной теоремой Витали [3, гл. I, § 3, теорема 3.2, замечание 3 к этому параграфу].

Теорема. *Пусть A — ограниченное множество в R^n, μ — неотрицательная борелевская мера, μ^* — верхняя мера, порожденная мерой μ. Пусть для каждой точки $x \in A$ существует последовательность открытых (замкнутых) шаров $Q_m(x)$ стягивающихся к точке x. Тогда из системы $Q_m(x)$, $x \in A$ можно выделить последовательность непересекающихся шаров Q_k такую, что $\mu^*(A \setminus \bigcup Q_k) = 0$.*

Из этой теоремы следует, что из системы открытых кругов $C(z, t_n(z))$, $z \in E_1$ можно выбрать последовательность непересекающихся кругов C_m такую, что $|\nu|(E_1 \setminus \bigcup_m C_m) = 0$. Пусть $G = \bigcup_m C_m$. Тогда $\nu(G) = \sum_m \nu(C_m) \geqslant 0$. В силу измеримости компакта E_1 существует последовательность открытых множеств G_j, $E_1 = \bigcap_j G_j$ таких, что $\lim_{j\to\infty} |\nu|(G_j \setminus E_1) = 0$. Расстояние $\delta_j = \rho(E_1, \partial G_j) > 0$. Если мы все радиусы $t_n(z)$ кругов $C(z, t_n(z))$ выберем меньшими чем δ_j, то множество G будет частью множества G_j. Далее имеем $\nu(G_j) = \nu(G) + \nu(E_1 \setminus G) + \nu(G_j \setminus (G \bigcup (E_1 \setminus G)))$. В силу выбора множества G $\nu(E_1 \setminus G) = 0$, $\nu(G) \geqslant 0$. Кроме того, $G_j \setminus (G \bigcup (E_1 \setminus G)) \subset G_j \setminus E_1$. Таким образом, $|\nu|(G_j \setminus (G \bigcup (E_1 \setminus G))) \leqslant |\nu|(G_j \setminus E_1 = \varepsilon_j$. Следовательно, $\nu(G_j) \geqslant -\varepsilon_j$. Поэтому $\nu(E_1) = \lim_{j\to\infty} \nu(G_j) \geqslant 0$. Так как E_1 — произвольный компакт из E, то мера ν_E — неотрицательная мера. Теорема 3 доказана.

3. Оценка плотности множества E, которое является множеством регулярного роста для функции $f(z)$ и одновременно подмножеством множества ее корней.

Пусть E — счетное множество с единственной точкой сгущения на бесконечности, $n_E(D)$ — число точек E, принадлежащих множеству D, $n_E(C(0, r)) < Mr^{\rho(r)}$. Пусть K — компакт, $K_\sigma = \overline{\bigcup_{z \in K} C(z, \sigma)}$, K^t — гомотетия множества K с коэффициентом t и центром в начале координат, $K_\sigma^t = (K_\sigma)^t$. Обозначим $\tilde{d}_E(K) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{n_E(K^t)}{t^{\rho(t)}}$, $d_E(K) = \lim_{\sigma \to +0} \tilde{d}_E(K_\sigma)$. Очевидно, что функции $\tilde{d}_E(K)$, $d_E(K)$ полуаддитивные функции, т. е. из соотношения $K \subset K_1 \cup K_2$ следует, что $\tilde{d}_E(K) \leqslant \tilde{d}_E(K_1) + \tilde{d}_E(K_2)$, $d_E(K) \leqslant d_E(K_1) + d_E(K_2)$, кроме того, $\tilde{d}_E(K) \leqslant d_E(K)$.

Обозначим через s_0 класс неотрицательных монотонных функций, стремящихся к нулю на бесконечности.

Лемма 1. *Существует положительная непрерывная функция $\sigma(t) \in s_0$ такая, что*

$$d_E(K) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{n_E(K_{\sigma(t)}^t)}{t^{\rho(t)}}. \tag{13}$$

Доказательство. Отметим, что для любой функции $\sigma(t) \in s_0$

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{n_E(K_{\sigma(t)}^t)}{t^{\rho(t)}} \leqslant d_E(K). \tag{14}$$

Существует последовательность t_n, $t_{n+1} > 2t_n$ такая, что

$$\frac{n_E(K_{1/n}^{t_n})}{t_n^{\rho(t_n)}} > d_E(K) - \frac{1}{n}.$$

Пусть функция $\sigma_1(t)$ равна 1 при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и равна $\frac{1}{n}$ при $t_n \leqslant t < t_{n+1}$. Тогда $\sigma_1(t) \in s_0$, причем

$$\frac{n_E(K_{\sigma_1(t_n)}^{t_n})}{t_n^{\rho(t_n)}} = \frac{n_E(K_{1/n}^{t_n})}{t_n^{\rho(t_n)}} > d_E(K) - \frac{1}{n}.$$

Из этого неравенства и из (14) следует, что

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{n_E(K_{\sigma_1(t)}^t)}{t^{\rho(t)}} = d_E(K).$$

В качестве $\sigma(t)$ можно взять произвольную монотонную непрерывную мажоранту функции $\sigma_1(t)$ в классе s_0.

Используем следующие топологии.

1). Пусть G — линейное пространство финитных бесконечно-дифференцируемых функций. Сходимость $f_n \to f$ в этом пространстве означает, что функции f_n равномерно финитны и $\frac{\partial^m}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(f_n - f)$ $m = \alpha + \beta$, $m \geqslant 0$ равномерно стремятся к нулю при $n \to \infty$. Сопряженное пространство G^* к этому пространству называется пространством обобщенных функций. Топологию слабой сходимости в G^* обозначим τ.

2). Пусть Φ — линейное пространство непрерывных финитных функций. Сходимость $f_n \to f$ в этом пространстве означает, что функции f_n равномерно финитны и что разность $f_n \to f$ равномерно стремится к нулю. Сопряженное Φ^* к этому пространству есть пространство локально конечных мер. Топологию слабой сходимости в Φ^* мы будем обозначать τ_1.

Символы $\tau \lim$, $\tau_1 \lim$, $\lim$ в дальнейшем будут обозначать в первом случае, что предел вычисляется в топологии τ, во втором — в топологии τ_1, в третьем — это обычный числовой предел.

Теорема 4. *Пусть E — часть множества корней целой функции $f(z)$ с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, $\rho > 0$. Пусть E — множество регулярного роста функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$. Пусть μ_H — риссовская мера субгармонической функции $H(re^{i\theta}) = r^\rho h_1(\theta)$. Тогда для любого компакта K справедливо неравенство $d_E(K) \leqslant \mu_H(K)$* **(15).**

Доказательство. Пусть t_j — сходящаяся к бесконечности последовательность положительных чисел такая, что существует предел

$$v(z) = \tau \lim_{j \to \infty} \frac{\ln |f(t_j z)|}{t_j^{\rho(t_j)}}.$$

Функция $v(z)$ является субгармонической, ее мы назовем функцией Азарина, порожденной целой функцией $f(z)$ и последовательностью t_j. Через A_f обозначим множество всех функций $v(z)$, порожденных целой функцией $f(z)$ — предельное множество Азарина. Если $f(z)$ — целая функция вполне регулярного роста, то для любой последовательности $t_j \to \infty$ $v(z) = h(\theta) r^\rho$; $z = re^{i\theta}$, если $f(z)$ — произвольная целая функция с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, то имеет место равенство (см. [4]) $r^\rho h(\theta) = \sup\limits_{v \in A_f} v(z)$.

Между риссовской массой μ_v функции $v(z)$ и множеством корней целой функции $f(z)$ существует зависимость

$$\mu_v(F) = \lim_{j \to \infty} \frac{n_f(F^{t_j})}{t_j^{\rho(t_j)}}$$

для регулярных относительно μ_v множеств F. Пусть

$$\mu_j(F) = \frac{n_E(F^{t_j})}{t_j^{\rho(t_j)}}.$$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности последовательности t_j, можно считать, что существует предел $\mu_{E, v} = \tau_1 \lim_{j\to\infty} \mu_j$. Очевидно, что $\mu_{E, v} \leqslant \mu_v$.

Покажем, что если нарушается неравенство (15), то существует функция Азарина $v(z)$ такая, что для некоторого компакта K будет справедливо неравенство $\mu_{E, v}(K) > \mu_H(K)$ **(16)**. Действительно, пусть для некоторого компакта K $d_E(K) = \mu_H(K) + \Delta$, $\Delta > 0$. Пусть $\sigma(t) \in s_0$ — функция, для которой справедливо равенство (13), а t_j — такая последовательность, что существует предел

$$d_E(K) = \lim_{j\to\infty} \frac{n_E(K^{t_j}_{\sigma(t_j)})}{t_j^{\rho(t_j)}}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что существует предел (см. [4])

$$v(z) = \tau \lim_{j\to\infty} \frac{\ln|f(t_j z)|}{t_j^{\rho(t_j)}}.$$

Для полученной функции $v(z)$ и любого $\sigma > 0$ имеем [2, Лемма 0.10.1, следствие 2]

$$\mu_{E, v}(K_\sigma) \geqslant \lim_{j\to\infty} \frac{n_E(K^{t_j}_\sigma)}{t_j^{\rho(t_j)}} \geqslant \lim_{j\to\infty} \frac{n_E(K^{t_j}_{\sigma(t_j)})}{t_j^{\rho(t_j)}} = d_E(K) = \mu_H(K) + \Delta.$$

Переходя к пределу при $\sigma \to 0$, получим $\mu_{E, v}(K) \geqslant \mu_H(K) + \Delta$.

Далее мы покажем, что на носителе меры $\mu_{E, v}$ имеет место равенство $v(z) = H(z)$ **(17)**. Пусть z_0 такая точка, что для любого положительного α $\mu_{E, v}(C(z_0, \alpha)) > 0$ и пусть вопреки (17) имеет место неравенство $v(z_0) < H(z_0)$. Тогда в силу полунепрерывности сверху $v(z)$ и непрерывности $H(z)$ существуют положительные числа ε и δ такие, что при $|z - z_0| \leqslant \delta$ будет справедливо неравенство

$$v(z) < h_0 - \varepsilon, \text{ где } h_0 = \min_{|z-z_0|<\delta} H(z). \tag{18}$$

Пусть $M = \lim_{j\to\infty} \frac{((|z_0| + \delta)t_j)^{\rho((|z_0|+\delta)t_j)}}{t_j^{\rho(t_j)}}$. Тогда при $j \geqslant j_1$ (существует такое j_1) будет выполняться неравенство

$$\frac{(|\zeta|t_j)^{\rho(|\zeta|t_j)}}{t_j^{\rho(t_j)}} \leqslant M + 1 \quad \text{при} \quad \zeta \in C(z_0, \delta).$$

Последовательность $v_j(z) = \frac{\ln|f(t_j z)|}{t_j^{\rho(t_j)}}$ сходится к $v(z)$ в топологии τ.

Поэтому по теореме Азарина [4] в круге $|z-z_0| \leqslant \delta$ $v_j(z)$ сходится к $v(z)$ по α — мере Карлесона при любом $\alpha > 0$, в частности при $\alpha = 1$. Поэтому существует число j_2 такое, что для каждого $j \geqslant j_2$ в кольце $\frac{\delta}{2} \leqslant |z-z_0| \leqslant \delta$ найдется точка z_j такая, что

$$\ln|f(t_j z_j)| = \max_{|z-z_0| \leqslant |z_j - z_0|} \ln|f(t_j z)|; \tag{19}$$

$$|v_j(z_j) - v(z_j)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{20}$$

Тогда из неравенств (20) и (18) следует, что

$$v_j(z_j) \leqslant v(z_j) + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant h_0 - \frac{3\varepsilon}{4}. \tag{21}$$

С другой стороны, из неравенства $\mu_{E,v}\left(C\left(z_0, \frac{1}{6}\delta\right)\right) > 0$ следует, что существует j_3 такое, что при $j \geqslant j_3$ будет выполняться неравенство $n_E\left(C\left(t_j z_0, \frac{1}{3}\delta t_j\right)\right) > 0$. Поэтому в круге $C\left(t_j z_0, \frac{1}{3}\delta t_j\right)$ найдем точку $\tilde{\zeta}_j \in E$. Существует такое j_4, что при $j \geqslant j_4$ точка $\zeta_j = T(\tilde{\zeta}_j)$ будет находиться в круге $C\left(t_j z_0, \frac{\delta}{2} t_j\right)$, поскольку отображение T асимптотически тождественное на бесконечности. Из определения множества регулярного роста функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$ следует существование такого числа j_5, что при $j \geqslant j_5$ будет выполняться неравенство $\ln|f(\zeta_j)| \geqslant \left(h_1(\theta_j) - \frac{\varepsilon}{4(M+1)}\right)|\zeta|^{\rho(|\zeta_j|)}$; $\theta_j = \arg \zeta_j$. Тогда при $j \geqslant \max\limits_{1 < s < 5} j_s$ будет справедливо неравенство

$$\frac{\ln|f(\zeta_j)|}{t_j^{\rho(t_j)}} \geqslant h_1(\theta_j) \frac{|\zeta_j|^{\rho(|\zeta_j|)}}{t_j^{\rho(t_j)}} - \frac{\varepsilon}{4} = H(\lambda_j) + H(\lambda_j)\left[\frac{|\zeta_j|^{\rho(|\zeta_j|)}}{\lambda_j|^{\rho} t_j^{\rho(t_j)}} - 1\right] - \frac{\varepsilon}{4},$$

где $\lambda_j = \frac{\zeta_j}{t_j}$. Так как в силу свойств уточненного порядка [1, с. 49]

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|\zeta_j|^{\rho(|\zeta_j|)}}{|\lambda_j|^{\rho} t_j^{\rho(t_j)}} = 1,$$

причем предел, равномерный при $\zeta_j \in C(t_j z_0, \delta t_j)$, то существует число j_6 такое, что при $j \geqslant j_6$ будет справедливо неравенство

$$\frac{\ln|f(\zeta_j)|}{t_j^{\rho(t_j)}} \geqslant H(\lambda_j) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant h_0 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь из равенства (19) следует, что $v_j(z_j) \geqslant h_0 - \frac{\varepsilon}{2}$. При $j > \max(j_5, j_6)$ это неравенство противоречит (21), и равенство (17) доказано.

Пусть A — носитель меры $\mu_{E,v}$. Так как мера $\mu_{E,v}$ мажорируется мерой μ_v, то она мажорируется и ограничением $\mu_{v,A}$ меры μ_v на множество A. Разность субгармонических функций $H(z) - v(z)$ неотрицательна, поскольку $\sup\limits_{v \in A_f} v(z) \leqslant H(z)$. Кроме того, $H(z) = v(z)$ при $z \in A$. По теореме 3 $\mu_{H,A} - \mu_{v,A} \geqslant 0$. Поэтому $\mu_{E,v} \leqslant \mu_{v,A} \leqslant \leqslant \mu_{H,A} \leqslant \mu_H$. Таким образом неравенство (16) невозможно, и теорема 4 доказана.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: ГИТТЛ, 1956.— 632 с. 2. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М.: Наука, 1966.— 515 с. 3. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в R^n.— М.: Мир, 1978.— 200 с. 4. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка.— Мат. сб., 1979, 108 (150), № 2, с. 147—167. 5. *Гришин А. Ф.* О регулярности роста субгармонических функций.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1968, вып. 6, с. 3—29.

Поступила в редколлегию 27.01.82.