

М. И. ОСТРОВСКИЙ

СТРУКТУРА ТОТАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ СОПРЯЖЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Пусть X — банахово пространство, X^* — его сопряженное пространство. Единичный шар и единичную сферу пространства X будем обозначать через $B(X)$ и $S(X)$ соответственно. Напомним некоторые определения.

Подпространство $M \subset X^*$ называется **тотальным**, если для любого $0 \neq x \in X$ найдется такой функционал $f \in M$, что $f(x) \neq 0$. Подпространство $M \subset X^*$ называется **нормирующим**, если для некоторого $c > 0$ имеем

$$(\forall x \in X) (\sup_{f \in M} |f(x)| \geq c \|x\|).$$

Слабым* секвенциальным замыканием подпространства $M \subset X^*$ называется множество всех пределов слабо* сходящихся последовательностей из M . Обозначается слабое* секвенциальное замыкание через $M_{(1)}$. Множество $M_{(1)}$ является, как легко видеть, линейным подпространством, которое, вообще говоря, может быть незамкнутым, и, тем более, не слабо* замкнутым. Соответствующий пример приведен С. Мазуркевичем (см. [1, с. 178]). В связи с этим С. Банах [1, с. 177, 181] ввел слабые* секвенциальные замыкания (у него они называются «слабыми производными») дальнейших, в числе и трансфинитных, порядков. Для ординала α слабым* секвенциальным замыканием порядка α подпространства $M \subset X^*$ называется множество $\bigcup_{\beta < \alpha} (M_{(\beta)})_{(1)}$.

Для цепочки слабых* секвенциальных замыканий имеем

$$M_{(1)} \subset M_{(2)} \subset \dots \subset M_{(\alpha)} \subset M_{(\alpha+1)} \subset \dots$$

При этом, если $M_{(\alpha)} = M_{(\alpha+i)}$, то равны между собой и все дальнейшие слабые* секвенциальные замыкания. Наименьший ординал для которого $M_{(\alpha)} = M_{(\alpha+1)}$ называется порядком подпространства

Изучение тотальных подпространств с бесконечными порядками оказалось важным для теории топологических векторных пространств [2, 3], тотальные подпространства порядка 2 оказались полезными в теории некорректных задач [4]. Естественно возникает задача описания тотальных подпространств различных порядков в сопряженных банаховых пространствах. Целью настоящей статьи является исследование такого варианта этой задачи. Пусть дано сепарабельное банахово пространство X и ординал α . Для таких банаховых пространств Y найдутся такие изоморфные вложения $T: Y \rightarrow X^*$, что $T(Y)$ — тотальное подпространство порядка α в X^* ?

Остановимся на терминологии и обозначениях. Используя термин «оператор», будем иметь в виду линейный непрерывный оператор. Для подмножества A банахова пространства X через $\text{lin } A$ и $\text{cl } A$ будем обозначать, соответственно, линейную оболочку и замыкание в сильной топологии. Для подмножества A в X^* через $\omega^* - \text{cl } A$ и \overline{A}^* будем обозначать, соответственно, слабое* замыкание множества A и $\{x \in X : (\forall x^* \in A)(x^*(x) = 0)\}$. Через $X \oplus Y$ будем обозначать прямую сумму пространств X и Y . Надеемся, что используемые нами без объяснения обозначения и термины стандартны, и смысл ясен из контекста.

Используемые без пояснений сведения из теории банаховых пространств могут быть найдены в [5—7].

Приведем известные утверждения о слабых* секвенциальных замыканиях, нужные для дальнейшего. Пусть X — сепарабельное банахово пространство.

1. Подпространство $M \subset X^*$ удовлетворяет соотношению $M_{(1)} = X^*$ тогда и только тогда, когда оно является нормирующим [1, с. 181].

2. Если пространство X квазирефлексивно, то любое тотальное подпространство M в X^* является нормирующим, и, следовательно, $M_{(1)} = X^*$ [7, с. 78].

3. Для подпространства $M \subset X^*$ имеем [1, с. 108] $(M = M_{(1)}) \Leftrightarrow (M = \omega^* - \text{cl}(M))$.

4. Порядок любого подпространства в X^* является счетным ординалом [7, с. 50] и не может равняться предельному ординалу [8].

5. Если пространство X неквазирефлексивно, то для любого счетного ординала α в X^* найдется тотальное подпространство порядка $\alpha + 1$ [9].

II. Обратимся к задаче, сформулированной в пункте I. Случай, когда пространство X рефлексивно, тривиален. Если X квазирефлексивно, то, в силу утверждения 2 из п. I, порядок любого тотального подпространства в X^* равен 0 или 1. Легко видеть, что в этом случае множество изоморфных типов тотальных подпространств порядка 1 в X^* совпадает со множеством изоморфных типов тех подпространств в X^* , коразмерность которых заключена между 1 и $\dim(X^{**}/X)$. Вопрос о том, обязаны ли все такие подпространства быть изоморфными X^* , является вариантом хорошо известной проблемы. Мы не будем рассматривать этот вопрос.

Если пространство Y таково, что в Y^* нет замкнутых нормирующих подпространств бесконечной коразмерности, и Y изоморфно тотальному подпространству в X^* , то, как доказано в [10] (теорема 3.1), Y изоморфно нормирующему подпространству в X^* и, следовательно, X изоморфно подпространству конечной коразмерности в Y^* .

С другой стороны, если пространство Y неквазирефлексивно и X изоморфно подпространству конечной коразмерности в Y^* , то, как легко видеть, пространство Y изоморфно тотальному (и даже нормирующему) подпространству в X^* .

Поэтому для неквазирефлексивного пространства Y , сопряженное которого не содержит замкнутых нормирующих подпространств бесконечной коразмерности, оператор T из задачи в п. I существует тогда и только тогда, когда $\alpha=0$ или 1 и пространство X изоморфно Y^* или подпространству конечной коразмерности в Y^* соответственно.

Для квазирефлексивного пространства Y верно аналогичное утверждение. Единственным изменением является то, что X должно быть изоморфно подпространству в Y^* , коразмерности, не превосходящей $\dim(Y^{**}/Y)$.

Сделанные замечания показывают, что нам естественно ограничиться рассмотрением следующих вопросов.

Пусть X — неквазирефлексивное сепарабельное банахово пространство, а банахово пространство Y изоморфно подпространству в X^* и таково, что в Y^* есть замкнутые нормирующие подпространства бесконечной коразмерности.

Вопрос 1. Существует ли изоморфное вложение $T: Y \rightarrow X^*$, образ которого тотален?

Вопрос 2. Для каких счетных ординалов α существуют изоморфные вложения $T: Y \rightarrow X^*$, для которых $(T(Y))_{(\alpha)} \neq (T(Y))_{(\alpha+1)} = X^*$?

Сначала мы покажем, что в общем случае ответ на вопрос 1 отрицателен. После этого (в п. III) мы укажем дополнительное условие, при выполнении которого ответ на вопрос 1 становится утвердительным, и рассмотрим вопрос 2.

Теорема 1. *Существует такое сепарабельное банахово пространство X и такое сепарабельное подпространство $Y \subset X^*$, что в Y^* есть замкнутые нормирующие подпространства бесконечной коразмерности, но Y не изоморфно тотальному подпространству в X^* .*

Нам понадобится пространство, построенное в работе [11]. Нужный нам вариант конструкции из этой работы состоит в следующем. Пусть $1 < p < 2$. Обозначим через X_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) подпространство в l_p , состоящее из векторов, все координаты которых начиная с $(n+1)$ -й, равны нулю. Введем пространство $J(l_p)$ как пополнение множества всех финитных последовательностей $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ с $x_n \in X_n$ по норме

$$\|\{x_n\}_{n=0}^\infty\|_J = \sup \left(\sum_{k=1}^{m-1} \|x_{p(k+1)} - x_{p(k)}\|^2 + \|x_{r(m)}\|^2 \right)^{1/2},$$

где супремум берется по всем возрастающим последовательностям целых чисел $\{p(k)\}_{k=1}^m$ с $p(1) \geq 0$.

Нам понадобится следующий результат о пространстве $J(l_p)$, $1 < p < 2$.

Теорема 2 [12]. А. Пространство $(J(l_p))^{**}$ представимо в виде прямой суммы $Z \oplus l_p$, где Z — канонический образ пространства l_p в его втором сопряженном.

Б. Любая слабо, но не сильно сходящаяся к нулю последовательность из $J(l_p)$ содержит подпоследовательность, эквивалентную ортонормированному базису пространства l_2 .

Перейдем к доказательству теоремы 1. В качестве пространства X возьмем прямую сумму $l_q \oplus (J(l_p))^*$, где $1/q = 1 - 1/p$, а в качестве Y — канонический образ пространства $J(l_p)$ в X^* . Из теоремы 2 А непосредственно вытекает, что в Y^* есть замкнутые нормирующие подпространства бесконечной размерности. (Таким является, например, аннулятор в Y^* слагаемого, изоморфного l_p , из Y^{**}).

Остается проверить, что Y не изоморфно тотальному подпространству в X^* . Для этого нам понадобится следующая вариация на тему результата Питта [6, с. 76].

Лемма 1. Любой оператор $R: J(l_p) \rightarrow l_p$ ($1 < p < 2$) является компактным.

Доказательство. Пусть множество $\text{cl}(R(B(J(l_p))))$ не является компактом. Тогда в $B(J(l_p))$ найдется такая последовательность $\{y_i\}_{i=1}^\infty$, что

$$(\exists \delta > 0) (\forall i, j \in \mathbb{N}) (\|Ry_i - Ry_j\| \geq \delta).$$

Так как пространство $(J(l_p))^*$ сепарабельно, то из последовательности $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ можно выделить слабо фундаментальную подпоследовательность $\{y_{i(n)}\}_{n=1}^\infty$. Для последовательности $z_n = y_{i(2n)} - y_{i(2n-1)}$ ($n \in \mathbb{N}$) имеем:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\|Rz_n\| \geq \delta); \quad (1)$$

$$\omega - \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0. \quad (2)$$

В силу теоремы 2.Б из последовательности $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{z_{n(k)}\}_{k=1}^\infty$, эквивалентную ортонормированному базису пространства l_2 . Из (1), (2) и хорошо известных результатов [6, с. 7, 53] вытекает, что из последовательности $\{z_{n(k)}\}_{k=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису пространства l_p . Это приводит нас к противоречию, так как $p < 2$. Лемма доказана.

Пусть $T: Y \rightarrow X^*$ — произвольное изоморфное вложение. Имеем $Y^* = l_p \oplus (J(l_p))^{**} = l_p \oplus J(l_p) \oplus l_p$. Обозначим через P_1, P_2 и P_3 проекторы, соответствующие этому разложению. Получаем $T = P_1T + P_2T + P_3T$. Операторы P_1T и P_3T компактны в силу леммы 1. Следовательно, ядро оператора P_2T конечномерно. Представим пространство Y в виде прямой суммы: $\ker P_2T \oplus Y_1$. Из компактности операторов P_1T и P_3T вытекает, что сужение оператора P_2T на Y_1 является изоморфизмом. Обозначим этот изоморфизм через R ,

а подпространство $R(Y_1) \subset \{0\} \oplus J(l_p) \oplus \{0\}$ — через M . Подпространство $T(Y_1) \subset X^*$ можно представить в виде

$$T(Y_1) = \{(P_1 T R^{-1} m, m, P_3 T R^{-1} m) : m \in M\} \subset l_p \oplus J(l_p) \oplus l_p.$$

Очевидно, что для завершения доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что слабое* замыкание подпространства $T(Y)$ в X^* не совпадает с X^* . Так как линейная оболочка объединения конечномерного и слабо* замкнутого подпространств является слабо* замкнутой, то нам достаточно показать, что $\omega^* - \text{cl}(T(Y_1))$ имеет бесконечную коразмерность в X^* .

Так как $M \subset \{0\} \oplus J(l_p) \oplus \{0\}$, то любой оператор $Q : M \rightarrow X^*$ является непрерывным, если оба эти пространства рассматривать в топологии $\sigma(X^*, X)$. Определим оператор $Q : M \rightarrow X^*$ равенством

$$Q(0, m, 0) = (P_1 T R^{-1} m, m, P_3 T R^{-1} m).$$

Из сказанного выше следует, что Q — изоморфное вложение. Нетрудно видеть, что у оператора Q существует (и притом единственное) $\sigma(X^*, X)$ — непрерывное продолжение на подпространство $\omega^* - \text{cl}(M) \subset X^*$. Обозначим это продолжение через Q_e . Нетрудно проверить, что оператор Q_e представим в виде суммы тождественного на $\omega^* - \text{cl}(M)$ оператора и компактного оператора. Поэтому ядро оператора Q_e конечномерно, и сужение оператора Q_e на любое слабо* замкнутое дополнение к подпространству $\ker Q_e$ в $\omega^* - \text{cl}(M)$ является $\sigma(X^*, X)$ — непрерывным изоморфизмом. Отсюда, в силу теоремы Крейна—Шмульяна, вытекает слабая* замкнутость образа оператора Q_e . Так как $Q(M) = T(Y_1)$, то $\omega^* - \text{cl}(T(Y_1))$ содержится в $\text{im } Q_e$. С другой стороны, так как оператор $P_1 Q$ компактен и $\omega^* - \text{cl}(M) \subset \{0\} \oplus J(l_p) \oplus l_p$, то оператор $P_1 Q_e$ тоже компактен. Отсюда непосредственно вытекает, что $\text{im } Q_e$, а, следовательно, и $\omega^* - \text{cl}(T(Y_1))$ имеет бесконечную коразмерность в X^* . Теорема доказана.

III. В этой части статьи указано дополнительное условие, при выполнении которого ответ на вопрос 1 становится утвердительным и рассмотрен вопрос 2.

Пусть X — банахово пространство, Y — подпространство в X^* . Каждый элемент из X можно естественным образом рассматривать как линейный функционал на Y . Полученное таким образом отображение из X в Y^* обозначим через H_Y .

Теорема 3. А. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, а $Y \subset X^*$ — такое подпространство, что $H_Y(X)$ имеет бесконечную коразмерность в Y^* . Тогда найдется изоморфное вложение $T : Y \rightarrow X^*$, образ которого тотален, и, более того $(T(Y))_{(2)} = X^*$.

Б. Если при этом подпространство $Y^\perp \subset X$ бесконечномерно, то оператор T можно выбрать таким, чтобы $(T(Y))_{(1)} \neq T(Y)_{(2)} = X^*$.

В. Если при этом подпространство $Y^\perp \subset X$ неквазирефлексивно, то для любого счетного ординала $\alpha \geq 1$ можно найти такое изоморфное вложение $T : Y \rightarrow X^*$, что $(T(Y))_{(\alpha)} \neq (T(Y))_{(\alpha+1)} = X^*$.

Замечание. Условия части А теоремы 3 выполнены, если подпространство $H_Y(X) \subset Y^*$ незамкнуто.

Доказательство теоремы 3. Используя рассуждения, проведенные при доказательстве предложения 3.5 работы [10], получаем следующий результат.

Лемма 2. Пусть X — некоторое банахово пространство, а Y — такое подпространство в X^* , что подпространство $H_Y(X)$ незамкнуто. Тогда найдется такое изоморфное вложение $E: Y \rightarrow X^*$, что $\text{cl}(E^*(X))$ имеет бесконечную коразмерность в Y^* и $E(Y)^\top \supset Y^\top$.

Из этой леммы вытекает, что при доказательстве теоремы 3 можно рассматривать лишь случай, когда подпространство $\text{cl}(H_Y(X))$ имеет бесконечную коразмерность в Y^* .

Воспользовавшись сепарабельностью пространства X и замечанием из работы [13, с. 358], находим в Y такую слабо* сходящуюся к нулю базисную последовательность $\{u_i^*\}_{i=1}^\infty$, что для некоторой ограниченной последовательности $\{v_k^{**}\}_{k=1}^\infty \subset X^{**}$ и некоторого разложения $\{j_k\}_{k=1}^\infty$ натурального ряда на попарно непересекающиеся бесконечные множества имеем

$$v_k^{**}(u_i^*) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in j_k; \\ 0, & \text{если } i \notin j_k. \end{cases}$$

Докажем сначала части А и Б теоремы 3. Пусть $\{x_k^*\}_{k=1}^\infty$ — некоторая нормированная последовательность, натягивающая нормирующее подпространство в X^* . Введем оператор $T: X^* \rightarrow X^*$ равенством

$$T(x^*) = x^* + \sum_{k=1}^\infty 4^{-k} v_k^{**}(x^*) x_k^* / \|v_k^{**}\|. \quad (3)$$

Легко видеть, что

$$(\forall x^* \in X^*) ((2/3) \|x^*\| \leq \|T(x^*)\| \leq (4/3) \|x^*\|). \quad (4)$$

Поэтому T — изоморфизм. Покажем, что $(T(Y))_{(2)} = X^*$. Для $i \in j_k$ имеем $T(u_i^*) = u_i^* + 4^{-k} x_k^* / \|v_k^{**}\|$. Так как множество j_k бесконечно, а последовательность $\{u_i^*\}_{i=1}^\infty$ слабо* сходится к нулю, то отсюда вытекает, что $x_k^* \in (T(Y))_{(1)}$. Так как векторы $\{x_k^*\}_{k=1}^\infty$ натягивают нормирующее подпространство в X^* , то получаем соотношение $(T(Y))_{(2)} = X^*$. Часть А теоремы 3 доказана.

Для доказательства части Б достаточно проверить, что в случае, когда подпространство $Y^\top \subset X$ бесконечномерно, построенное выше подпространство $T(Y) \subset X^*$ не является нормирующим.

Пусть $y \in Y$, а $z \in \bigcap_{k=1}^n \ker x_k^* \cap Y^\top$. Тогда $(Ty)(z) = \sum_{k=1}^\infty +1 4^{-k} \times \times v_k^{**}(y) x_k^*(z) / \|v_k^{**}\|$. Поэтому $|(Ty)(z)| \leq (4^{-n}/3) \|y\| \|z\|$. В силу (4) отсюда вытекает $|(Ty)(z)| \leq (4^{-n}/2) \|Ty\| \|z\|$, следовательно, подпространство $T(Y) \subset X^*$ не является нормирующим. Часть Б теоремы 3 доказана.

Перейдем к доказательству части В. Пусть подпространство Y^\top неквазирефлексивно, а $\alpha \geq 1$ — некоторый счетный ординал. Вос

пользовавшись утверждением 5 из п. I, найдем такое замкнутое подпространство $M \subset (Y^\top)^*$, что $M_{(\alpha)} \neq M_{(\alpha+1)} = (Y^\top)^*$, если ординал α бесконечен, и такое, что $M_{(\alpha-1)} \neq M_{(\alpha)} = (Y^\top)^*$, если ординал α конечен. Пусть N — множество всевозможных продолжений функционалов из M на все пространство X . В работе [9] доказано, что для подпространства $N \subset X^*$ выполнено соотношение $N_{(\alpha)} \neq N_{(\alpha+1)} = X^*$ ($N_{(\alpha-1)} \neq N_{(\alpha)} = X^*$). Поскольку пространство X сепарабельно, то в N можно найти такую нормированную последовательность $\{x_k^*\}_{k=1}^\infty$, что для $L = \text{cl lin}(\{x_k^*\}_{k=1}^\infty)$ имеем $L_{(\alpha)} \neq L_{(\alpha+1)} = X^*$, если α — бесконечный ординал, и $L_{(\alpha-1)} \neq L_{(\alpha)} = X^*$, если α — конечный ординал.

Введем оператор $T: X^* \rightarrow X^*$ равенством (3). Для так определенного оператора T выполнено неравенство (4), следовательно, T — изоморфизм. Покажем, что для подпространства $T(Y) \subset X^*$ выполнено соотношение $(T(Y))_{(\alpha)} \neq (T(Y))_{(\alpha+1)} = X^*$. Покажем сначала, что

$$(T(Y))_{(1)} \subset \text{cl lin}(Y_{(1)} \cup \{x_k^*\}_{k=1}^\infty).$$

Пусть $z \in (T(Y))_{(1)}$ и пусть последовательность $\{z_i\}_{i=1}^\infty \subset T(Y)$ такова, что $z = \omega^* - \lim_{i \rightarrow \infty} z_i$. Для некоторых векторов $y_i^* \in Y$ имеем $z_i = T(y_i^*)$.

Так как T — изоморфизм, то последовательность $\{y_i^*\}_{i=1}^\infty$ ограничена. Не уменьшая общности, можем считать эту последовательность слабо сходящейся. Оператор T является суммой тождественного и компактного операторов. Обозначим последний через K . Не уменьшая общности, можем считать последовательность $\{K(y_i^*)\}_{i=1}^\infty$ сильно сходящейся. Ясно, что ее предел входит в $\text{cl lin}(\{x_k^*\}_{k=1}^\infty)$. Следовательно, $z \in \text{cl lin}(Y_{(1)} \cup \{x_k^*\}_{k=1}^\infty)$. Поэтому сужения функционалов из $(T(Y))_{(1)}$ на подпространство $(Y^\top) \subset X$ входят в M . Отсюда вытекает, что $(T(Y))_{(\alpha)} \subset N_{(\alpha-1)}$ в случае, когда ординал α конечен, и $(T(Y))_{(\alpha)} \subset N_{(\alpha)}$, если ординал α бесконечен. В обоих случаях имеем $(T(Y))_{(\alpha)} \neq X^*$.

Так же, как и при доказательстве части А, показываем, что $x_k^* \in (T(Y))_{(1)}$. Поэтому $L \subseteq (T(Y))_{(1)}$. Отсюда вытекает, что $(T(Y))_{(\alpha+1)} = X^*$ как для конечного, так и для бесконечного ординала α . Теорема 3 полностью доказана.

Замечания. 1. Пусть ординал $\alpha \geq 2$ не является предельным. Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 3 и из теоремы 3.1 из [10], вытекает, что банахово пространство Y изоморфно подпространству порядка α в сопряженном к некоторому сепарабельному банахову пространству в том и только в том случае, когда в Y^* есть замкнутое сепарабельное нормирующее подпространство бесконечной коразмерности.

2. Если пространства X и Y удовлетворяют условиям части А теоремы 3, и X изоморфно прямой сумме $X \oplus Z$, где Z — бесконечномерное (неквазирефлексивное) банахово пространство, то найдется изоморфное вложение $Q: Y \rightarrow X^*$, для образа которого выполнены условия части Б (В) теоремы 3.

3. Если X — сепарабельное банахово пространство, а Y — подпространство в X^* , имеющее несепарабельное сопряженное, то для X и Y выполнены условия части А теоремы 3. В силу известных результатов [5, с. 147, 213], отсюда вытекает, что условия части А теоремы 3 выполнены, если X сепарабельное L_∞ — пространство (в смысле Линденштраусса—Пелчинского), а Y — нерефлексивное подпространство в X^* .

4. Пусть $X = C(K)$, где K — некоторый метризуемый компакт. Из известных свойств пространств непрерывных функций (см. [5]) и замечаний 2 и 3 вытекает, что для любого нерефлексивного подпространства $Y \subset X^*$ и любого счетного ординала $\alpha \geq 1$ найдется такое изоморфное вложение $T: Y \rightarrow X^*$, что $(T(Y))_{(\alpha)} \neq (T(Y))_{(\alpha+1)} = X^*$. Нетрудно проверить непосредственно, что аналогичное утверждение верно и для $\alpha = 0$.

Теорема 4. Пусть $X = l_1 \oplus Z$, где Z — некоторое сепарабельное банахово пространство. Тогда для любого счетного ординала $\alpha \geq 1$ и любого банахова пространства Y , сопряженное которого содержит замкнутые сепарабельные нормирующие подпространства бесконечной коразмерности, найдется такое изоморфное вложение $T: Y \rightarrow X^*$, что $(T(Y))_{(\alpha)} \neq (T(Y))_{(\alpha+1)} = X^*$. Наоборот, сопряженное любого тотального подпространства $Y \subset X^*$ содержит замкнутые сепарабельные нормирующие подпространства бесконечной коразмерности.

Доказательство. Пусть $a, b > 0$. Напомним, что подмножество $A \subset Y^*$ называется (a, b) -нормирующим, если выполнены условия:

$$(\forall y \in Y) (\sup \{ \|y^*(y)\| : y^* \in A \} \geq a \|y\|); \\ \sup \{ \|y^*\| : y^* \in A \} \leq b.$$

Пусть банаховы пространства X и Y таковы, что существует оператор $R: X \rightarrow Y^*$, для которого $R(B(X))$ является (a, b) -нормирующим множеством в Y^* для некоторых $a > 0$ и $b < +\infty$, и подпространство $R(X)$ имеет бесконечную коразмерность в Y^* . Нетрудно видеть, что в этом случае сужение оператора R^* на подпространство $Y \subset Y^{**}$ является изоморфным вложением, и для X и $R^*(Y) \subset X^*$ выполнены условия части А теоремы 3.

В силу фактор-универсальности пространства l_1 [6, с. 108] все сказанное имеет место для $X = l_1 \oplus Z$ и любого банахова пространства Y , сопряженное которого содержит замкнутые сепарабельные нормирующие подпространства бесконечной коразмерности. Воспользовавшись замечанием 2 и частью В теоремы 3, получаем доказательство первой части теоремы 4.

Перейдем к доказательству второй части. Если подпространство $Y \subset X^*$ несепарабельно, то подпространство $cl(H_Y(X)) \subset Y^*$ является замкнутым сепарабельным нормирующим подпространством бесконечной коразмерности.

Перейдем к случаю, когда подпространство Y сепарабельно. Если подпространство Y не является нормирующим, то, повторяя рассуждения из доказательства предложения 3.5 работы [10], на-

ходим в Y^* замкнутое сепарабельное нормирующее подпространство бесконечной коразмерности.

Если подпространство Y — нормирующее, то завершаем доказательство с помощью следующего обобщения леммы 1 из [14].

Лемма 3. Пусть Y — сепарабельное банахово пространство, сопряженном к которому существует подпространство, изоморфное l_1 . Тогда Y^* содержит нормирующее подпространство бесконечной коразмерности, изоморфное l_1 .

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_i^*\}_{i=1}^\infty \subset Y^*$ эквивалентна каноническому базису пространства l_1 . В силу сепарабельности пространства Y из последовательности $\{f_i^*\}_{i=1}^\infty$ можно выделить слабо* сходящуюся подпоследовательность $\{f_{i(n)}^*\}_{n=1}^\infty$. Тогда последовательность $g_n^* = f_{i(2n)}^* - f_{i(2n-1)}^*$ ($n \in \mathbb{N}$) будет слабо* сходящейся к нулю последовательностью, эквивалентной каноническому базису пространства l_1 . Пусть $0 < c, C < \infty$ таковы, что

$$(\forall \{a_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}) (c \sum |a_i| \leq \| \sum a_i g_i^* \| \leq C \sum |a_i|).$$

Пусть $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ — плотная в $S(Y)$ последовательность. Для любого $i \in \mathbb{N}$ выберем такой функционал $h_i^* \in S(Y^*)$, что $h_i^*(y_i) = 1$. Выберем возрастающую последовательность четных натуральных чисел $\{m(i)\}_{i=1}^\infty$ так, чтобы

$$(\forall i \in \mathbb{N}) (|g_{m(i)}^*(y_i)| < c/4).$$

Непосредственно проверяем, что последовательность $z_i^* = (c/2) h_i^* + g_{m(i)}^*$ ($i \in \mathbb{N}$) эквивалентна каноническому базису пространства l_1 . Поэтому пространство $L = \text{cl}(\text{lin}\{z_i^*\}_{i=1}^\infty)$ изоморфно l_1 . Покажем, что L — нормирующее подпространство бесконечной коразмерности в Y^* .

То, что L — нормирующее, вытекает из того, что для любого $i \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства $\|z_i^*\| \leq c/2 + C$ и $|z_i^*(y_i)| \geq (c/2)|h_i^*(y_i)| - |g_{m(i)}^*(y_i)| > c/4$, а последовательность $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ плотна в $S(Y)$.

Для доказательства того, что L имеет бесконечную коразмерность в Y^* достаточно проверить соотношение

$$\text{lin}\{g_{2k-1}^*\}_{k=1}^\infty \cap L = \{0\}.$$

Если мы предположим, что это соотношение не выполнено, то для некоторых последовательностей $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ из l_1 будем иметь

$$\sum_{k=1}^\infty b_k g_{2k-1}^* = \sum_{i=1}^\infty a_i g_{m(i)}^* + (c/2) \sum_{i=1}^\infty a_i h_i^*.$$

Следовательно,

$$\| \sum_{k=1}^\infty b_k g_{2k-1}^* - \sum_{i=1}^\infty a_i g_{m(i)}^* \| = (c/2) \| \sum_{i=1}^\infty a_i h_i^* \|.$$

Правая часть этого равенства не превосходит $(c/2) \sum |a_i|$, а левая — не меньше $c(\sum |b_k| + \sum |a_i|)$. Поэтому $a_i = b_k = 0$ для всех i и k . Лемма доказана.

Список литературы: 1. Банах С. С. Курс функционального анализа. К., 1948 216 с. 2. Dierolf S., Moscatelli V. B. A note on quojections // Funct. et approx. 1987. 17. P. 131—138. 3. Metafune G., Moscatelli V. B. Quojections and prequ-

jections // *Advances in the Theory of Fréchet spaces* (ed. by T. Terzioğlu). Dordrecht, 1989. P. 235—254. 4. *Островский М. И.* К вопросу о регуляризуемости суперпозиций обратных линейных операторов // *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*. 1991 Вып. 55. С. 96—100. 5. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. — Berlin, 1973. 243 p. 6. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces, v. I. Berlin, 1977. 188 p. 7. *Петунин Ю. И.* 8. *Гладун Л. В.* Теория характеристик подпространств и ее приложения. К., 1980. 16 с. 8. *Годун Б. В.* О слабых* производных трансфинитного порядка множеств линейных функционалов // *Сиб. мат. журн.* 1977. 18, № 6. С. 1289—1295. 9. *Островский М. И.* w^* -производные трансфинитного порядка подпространств сопряженного банахова пространства // *Докл. АН УССР*. 1987. № 10. С. 9—12. 10. *Strouskii M. I.* Total subspaces in dual Banach spaces which are not norming over any infinite dimensional subspace // *Studia Math.* 1991. 46. 1. 117—124. 11. *Bellenot S. F.* The J-sum of Banach spaces // *J. Funct. Anal.* 1982. 48. № 1. P. 95—106. 12. *Островский М. И.* Подпространства, содержащие ортогональные функционалы базисов различных типов // *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*. 1992. Вып. 57. С. 115—127. 13. *Davis W. J., Johnson W. B.* Basic sequences and norming subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces // *Isr. J. Math.* 1973. 14. P. 353—367. 14. *Гладун Л. В.* О банаховых пространствах, сопряженные которых содержат нормирующие не квазибазисные подпространства // *Сиб. мат. журн.* 1987. 28, № 2. С. 55—59.

Поступила в редколлегию 10.11.91