УДК 513.83+513.88

В. М. КАДЕЦ

К ТЕОРЕМЕ О ВЫДЕЛЕНИИ ω-ЛИНЕЙНО-НЕЗАВИСИМЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Последовательность $\{e_n\}_1^\infty$ элементов топологического векторного пространства E называется ω-линейно независимой, если равенство $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = 0$ может выполняться только для нулевых коэффициентов α_n. Очевидно, что ω-линейная независимость влечет обычную линейную независимость, но эти свойства не эквивалентны. В 1953 г. Эрдеш и Штраус [1] доказали, что из любой линейно независимой последовательности в нормированном пространстве можно выделить ω-линейно независимую подпоследовательность (см. также [2, 3]). Охарактеризуем те пространств Фреше, на которые переносится этот результат Эрдеша и Штрауса.

Теорема. *Для пространства Фреше E следующие два условия эквивалентны:*

1) *на E существует непрерывная норма;*

2) *из любой линейно независимой последовательности элементов пространства E можно выделить ω-линейно независимую подпоследовательность.*

Для доказательства нам потребуются вспомогательные утверждения. Первое из них в несколько более общей формулировке принадлежит Б. М. Макарову [4, замечание 1], но так как [4] представляет собой краткое сообщение (без доказательств), мы для полноты изложения это утверждение также докажем.

Лемма 1. *Пусть E — пространство Фреше $p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3 \leqslant \ldots$ — система полунорм, задающая топологию на E. Пусть далее последовательность функционалов $f_n \in E'$ подчиняется следующему условию: функционал f_n разрывен относительно полунорм p_k при $k \leqslant n$ и непрерывен относительно p_{n+1}, p_{n+2} и т. д. Тогда для любой* *числовой последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существует элемент* $e \in E$, *на котором* $f_n(e) = a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Доказательство. Построим по индукции элементы $e_n \in E$ со следующими свойствами:

а) $p_n(e_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$;

б) $f_k(e_n) = 0$ при $k < n$;

в) $f_n(\sum_{k=1}^{n} e_k) = a_n$.

Если нам это удастся, то ряд $\sum_1^{\infty} e_n$ будет сходиться (согласно а)) и его сумма (согласно б) и в)) будет удовлетворять всем требованиям леммы. Теперь поясним, как осуществляется индуктивное построение. Так как f_1 разрывен относительно p_1, на шаре $\left\{x \in E : p_1(x) \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ функционал f_1 принимает все числовые значения. Поэтому существует $e_1 \in E$, для которого $f_1(e_1) = a_1$ и $p_1(e_1) \leqslant \frac{1}{2}$. Пусть уже построены $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$. Рассмотрим подпространство $F = \bigcap_{k=1}^{n-1} \operatorname{Ker} f_k$. F имеет конечную коразмерность в E, замкнуто относительно сходимости в p_n и содержит ядро полунормы p_n (так как $\{f_k\}_1^{n-1}$ непрерывны относительно p_n). Поэтому ограничение функционала f_n на F так же как и сам f_n, разрывно относительно p_n. Следовательно, на множестве $\left\{x \in F : p_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}\right\}$ функционал f_n принимает все числовые значения, и существует $e_n \in F$, для которого выполняются свойства а) и в). Свойство б) выполняется автоматически по построению подпространства F. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ — *последовательность натуральных чисел,* $\{a_k\}_1^{\infty}$ — *произвольные числа. Тогда существует целая функция* $g(z)$, *разложение которой в степенной ряд имеет вид* $\sum_{k=1}^{\infty} S_k z^{n_k}$ *и* $g(k) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Рассмотрим пространство E всех целых функций вида $\sum_{k=1}^{\infty} S_k z^{n_k}$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Зададим полунормы (точнее, нормы) $p_n : p_n(g) = \sup\left\{|g(z)| : |z| \leqslant n - \frac{1}{2}\right\}$ и функционалы $f_n \in E' : f_n(g) = g(n)$. Пространство E, полунормы p_n и функционалы f_n удовлетворяют условиям леммы 1; применив эту лемму, получим требуемое утверждение.

Доказательство теоремы. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\|\cdot\|$ — непрерывная норма на E, $\{x_n\}_1^{\infty}$ — линейно независимая последовательность в E. Рассмотрим $\{x_n\}$ как элементы нормированного пространства $(E, \|\cdot\|)$. Вос-