УДК 517.968

Ю. В. ГАНДЕЛЬ

О ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ПРИВОДЯЩИХ К СИНГУЛЯРНОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ НА СИСТЕМЕ ОТРЕЗКОВ

1. Речь идет о парных интегральных уравнениях

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = 0, \quad x \in CE; \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| C(\lambda)(1+\varepsilon(\lambda))\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = f(x), \quad x \in E, \tag{2}$$

где $E = \bigcup_{k=1}^{m} (a_k, \quad b_k)$; $\quad -\infty < a_1 < b_1 < \cdots < a_m < b_m < +\infty$; $CE = R \setminus E$; $\quad f(x), \quad x \in \overline{E}$; $\quad \varepsilon(\lambda), \quad \lambda \in R$ — заданные функции, $f(x) \in C'(\overline{E})$, $f'(x)$ — непрерывна по Гельдеру, $\varepsilon(\lambda) \in L(R)$ и убывает при $\lambda \to \infty$ не медленнее, чем $1/\lambda^2$, а $C(\lambda)$, $\lambda \in R$ неизвестная функция.

Требуется определить значение интеграла $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$, стоящего в левой части первого уравнения, при $x \in E$.

Обозначим через $F(x)$ производную по x от этого интеграла

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda C(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = F(x), \quad x \in R \tag{3}$$

и выведем сингулярное интегральное уравнение для функции $F(x)$ $x \in E$, которую будем искать в классе функций, представимых в виде

$$F(x) = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{\left|\prod\limits_{k=1}^{m}(b_k - x)(x - a_k)\right|}}, \quad x \in E, \tag{4}$$

где $\Phi(x)$, $x \in \overline{E}$ — непрерывная по Гельдеру функция, $\Phi(y) \neq 0$, $y \in \partial E$ $(F(x) \in L^p(\boldsymbol{R}),\ 1 \leqslant p < 2)$, причем в силу (1) $F(x) = 0$ $x \in CE$ **(5)** и $\int\limits_{a_k}^{b_k} F(x)\, dx = 0$, $k = 1, \ldots, m$ **(6)**. Применяя к (3) преобразование Гильберта

$$(HF)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(y)\, dy}{x - y},$$

и учитывая, что $H: e^{i\lambda x} \to i\frac{|\lambda|}{\lambda} e^{i\lambda x}$, а также (5), имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|\, C(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{E} \frac{F(y)\, dy}{y - x}, \quad x \in \boldsymbol{R}. \tag{7}$$

Теперь можно уравнение (2) представить в виде

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{E} \frac{F(y)\, dy}{y - x} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|\, \varepsilon(\lambda)\, C(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = f(x), \quad x \in E,$$

и учитывая, что в силу (3)—(5)

$$\lambda C(\lambda) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{E} F(y)\, e^{-i\lambda y}\, dy, \quad \lambda \in \boldsymbol{R}, \qquad ($$

окончательно записать сингулярное интегральное уравнение для $F(y),\ y\in E$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{F(y)\,dy}{y-x}+\int\limits_E K(y-x)\,F(y)\,dy=f(x),\quad x\in E, \tag{9}$$

где $K(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\lambda|}{\lambda}\varepsilon(\lambda)\,e^{-i\lambda z}\,d\lambda$ **(10)**, т. е., с точностью до числового множителя, $K(z)$ совпадает с преобразованием Фурье функции $\varepsilon(\lambda)\operatorname{sign}\lambda$.

Как известно [1], характеристическое уравнение, отвечающее (9), однозначно разрешимо в классе функций, представимых в виде (4) и удовлетворяющих соотношениям (6).

2. Парное интегральное уравнение (1)—(2) является континуальным аналогом парного сумматорного уравнения, рассмотренного в работе [2],

$$aX_0+\sum_{n=1}^{\infty}X_n\cos n\varphi+Y_n\sin n\varphi=0,\quad \varphi\in CE; \tag{11}$$

$$bX_0+\sum_{n=1}^{\infty}n(1-\varepsilon_n)(X_n\cos n\varphi+Y_n\sin n\varphi)=f(\varphi),\quad \varphi\in E, \tag{12}$$

где a, b — заданные числа; $f(\varphi)$, $\varphi(\overline{E})$ заданная функция, непрерывная по Гельдеру; $E=\bigcup\limits_{k=1}^{m}(\alpha_k,\ \beta_k)$, $-\pi<\alpha_1<\beta_1<\cdots<\alpha_m<$ $<\beta_m<\pi$, $CE=[-\pi,\ \pi]\diagdown E$, последовательность ε_n стремится к нулю не медленнее, чем $\frac{1}{n^2}$, X_n, Y_n — неизвестные коэффициенты.

Как показано в [2], эта задача также приводит, в конечном счете, к решению уравнения (9), при дополнительных условиях (6) в виде (4), причем

$$K(z)=\frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}-\frac{1}{z}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\sin nz\right\}.$$

3. Настоящая статья стимулирована работами И. К. Лифанова по численному решению сингулярных интегральных уравнений [3]—[5], результаты которых позволяют эффективно находить приближенное решение уравнения (9) в рассматриваемом классе функций (4), (6). Наибольший интерес для наших задач представляет модификация численного метода дискретных вихрей, предложенная в [5].

Для удобства приведем результат работы [5], который дает численный метод для определения функции $F(x)$, $x\in E$.

Пусть $F_k(y) = F(y)|_{y\in(a_k,\, b_k)} = \frac{u_k(y)}{\sqrt{(b_k-y)(y-a_k)}}$ — ограничение решения задачи (9), (6), (4) на интервал $(a_k,\, b_k)$, $y_{k,\,i} = \frac{b_k - a_k}{2} \times \cos\frac{2i-1}{2n_k}\pi + \frac{b_k + a_k}{2}$, $i = 1, \ldots, n_k$; $x_{k,\,j} = \frac{b_k - a_k}{2}\cos\frac{j}{n_k}\pi + \frac{b_k + a_k}{2}$, $j = 1, \ldots, n_k - 1$, $k = 1, \ldots, m$. Тогда, если $F(x)$ — единственное решение (9), (6), (4), то система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_k}\left\{\frac{1}{y_{k,\,i} - x_{p,\,j}} + \pi K(y_{k,\,i} - x_{p,\,j})\right\} u_{k,\,n_k}(x_{k,\,i})\cdot\frac{1}{n_k} = f(x_{p,\,j}),$$

$$j = 1, \ldots, n_p - 1 \qquad \sum_{i=1}^{n_k} u_{k,\,n_k}(x_{k,\,i})\frac{1}{n_k} = 0, \quad j = n_p \quad p = 1, \ldots, m$$

при достаточно больших $N = \min\limits_{1<k<m} n_k$ однозначно разрешима, и справедлива оценка

$$|u_k(x_{k,\,i}) - u_{k,\,n_k}(x_{k,\,i})| = O\left(\frac{1}{N^{r+\alpha}}\right), \quad i = 1, \ldots, n_k; \; k = 1, \ldots, m;$$

$$K(x), \quad f(x)\in C^r(\overline{E}), \quad K^{(r)}(x), \quad f^{(r)}(x)$$

принадлежит гельдеровскому классу $H(\alpha)$.

Список литературы: 1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 599 с. 2. *Гандель Ю. В.* О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 38, с. 39. 3. *Лифанов И. К.* О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши.— Докл. АН СССР, 1978, **239**, № 2, с. 265—268. 4. *Лифанов И. К.* Топология кривых и численное решение сингулярных интегральных уравнений первого рода /IV Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям.— Кишинев: Штиница, 1979, с. 82—85. 5. *Лифанов И. К., Матвеев А. Ф.* О сингулярном интегральном уравнении на системе отрезков. См. статью в наст. сб.

Поступила в редколлегию 30.09.81.