УДК 517.535.2

С. Д. БРОНЗА, В. Г. ТАИРОВА

КОНСТРУИРОВАНИЕ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КЛАССА F_q^*

В работе [1] мы определили граф-профиль римановой поверхности, используя его для схематического изображения римановых поверхностей класса F_q^*, имеющих такую же структуру, как и римановы поверхности класса F_q (см. [2] с. 456), но без требования односвязности. В § 1 настоящей статьи мы развиваем идеи, сформулированные в [1] — исследуем профиль, как самостоятельный объект, вне его связей с римановыми поверхностями. В § 4 мы используем понятие профиля как рабочий аппарат для решения задачи конструирования римановых поверхностей класса F_q^* заданной разветвленности и как частный случай получаем решение задачи А. А. Гольдберга «рациональные функции с заданной разветвленностью», опубликованной в [3]. При решении последней задачи § 2, 3 носят, вообще говоря, вспомогательный характер. Однако следует отметить, что вопросы, излагаемые в этих параграфах, представляют и самостоятельный интерес: в § 2 изучается группа автоморфизмов римановой поверхности $R \in F_q^*$, а в § 3 доказывается, что теорема Драпе о единственности римановых поверхностей класса F_q остается верной и в классе F_q^*, если требовать, чтобы точки ветвления римановых поверхностей этого класса были первого порядка.

§ 1. Профиль, псевдопрофиль, замыкание псевдопрофиля. Мультипликативная группа псевдопрофилей и ее образующие. В этом параграфе изучаем свойства профиля римановой поверхности из класса F_q^*, как графа, вне его связи с представляемой римановой поверхностью. Поэтому сначала дадим независимое от содержания работы [1] и формально не связанное с понятием римановой поверхности определение графа-профиля П, обладающего теми же свойствами, что и графы-профили римановых поверхностей класса F_q^**.

Вершины и дуги графа-профиля П будем изображать, соответственно, точками и направленными линиями евклидовой плоскости. Пусть P — конечное или счетное множество прямых параллельных фиксированной прямой p, называемой нами базисной прямой. Занумеруем прямые из множества P, а на базисной прямой p отметим базисные точки $a_1, \ldots, a_q$, расположив их на p так, чтобы при движении по прямой p слева направо точки a_i располагались на p в порядке возрастания индекса i, $1 \leqslant i \leqslant q$. Таким образом, прямая p предполагается нами ориентированной слева направо и содержащей q дуг $a_i a_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant q$, $q+1=1$.

В качестве вершин графа П возьмем точки множества прямых P, ортогонально проектирующиеся в базисные точки a_i, $1 \leqslant i \leqslant q$.

Сильными дугами графа П назовем части прямых множества P, на которые эти прямые разбиваются вершинами графа П с ориентацией, индуцированной операцией обратной к ортогональному проектированию на прямую p.

Слабой дугой графа П назовем дугу, инцидентную вершинам графа П, ортогонально проектирующимся в одну и ту же базисную точку, при этом вершины, инцидентные одной дуге, могут и совпадать, т. е. граф П может иметь в качестве слабых дуг и петли.

В графе П могут, наряду с другими, существовать контуры трех видов: элементарные, состоящие из сильных дуг (сильные контуры); элементарные или бесконечные элементарные пути, состоящие из слабых дуг (слабые контуры или бесконечные слабые элементарные пути); контуры, в которых сильные и слабые дуги чередуются (пути графа П).

Говорим, что граф П обладает точным покрытием, если существует такая совокупность путей длины $2q$ графа П, что

1) любая дуга графа П принадлежит этой совокупности;

2) два различных пути из совокупности не имеют общих дуг.

Определение. *Граф П будем называть профилем длины q и толщины t ($t \leqslant \infty$), если он связный, однородный степени 4, обладает точным покрытием, имеет q базисных точек и мно-*

---

* Используемая нами терминология по теории графов такая, как в книге Бержа К. «Теория графов и ее применения».

*жество P состоит из t прямых, если $t < \infty$ и счетного числа прямых, если $t = \infty$**.

В дальнейшем профиль длины q обозначаем через Π_q, но там, где не может возникнуть недоразумений по поводу длины профиля, индекс у обозначения профиля опускаем.

Замечание 1. В работе [1] граф Π_q без требования выполнения условия существования точного покрытия назван графом типа профиля. Там же доказана

Теорема. *Граф типа профиля является профилем некоторой римановой поверхности класса F_q^* тогда и только тогда, когда он обладает точным покрытием.*

Из этой теоремы следует, что вышеопределенный граф-профиль может трактоваться и как профиль некоторой римановой поверхности класса F_q^*. Именно так и трактуем понятие профиль в последующих параграфах.

Замечание 2. В работе [1] граф типа профиля и граф-профиль римановой поверхности определены как частично ориентированные графы, хотя по сути мы пользовались той же, что и выше, ориентацией его ребер (здесь — сильные дуги), так как без определенной ориентации ребер графа типа профиля нельзя говорить об однозначно определенном пути этого графа, а значит, и о точном покрытии.

Определение. *Подграф G_{q_0} профиля Π_q толщины t, $t \leqslant \infty$ будем называть псевдопрофилем длины q_0 $q \geqslant q_0 \geqslant 1$* и толщины t, если G_{q_0} получается из профиля Π_q удалением всех дуг, исходящих из вершин, проектирующихся в $q - q_0$, подряд лежащие базисные точки и отбрасыванием образовавшихся изолированных вершин.

Согласно определению, псевдопрофиль G_{q_0} имеет t вершин степени 3 и t вершин степени 1. Вершины степени 3 будем называть входящими, а 1 — исходящими вершинами псевдопрофиля G_{q_0}. Базисные точки a_i, в которые проектируются вершины псевдопрофиля степени выше 1, будем называть базисными точками псевдопрофиля G_{q_0}. Там, где не может возникнуть недоразумения, считаем, что базисные точки псевдопрофиля G_{q_0} имеют индексы от 1 до q_0. Части сильных контуров и путей профиля Π_q, остающиеся в псевдопрофиле G_{q_0} при его образовании, назовем, соответственно, сильными и чередующимися маршрутами псевдопрофиля G_{q_0}, при этом сильные маршруты G_{q_0} приобретут нумерацию в соответствии с нумерацией сильных контуров профиля Π_q. Псевдопрофиль G_1 с единственной базисной точкой a_i будем называть атомарным псевдопрофилем и обозначим его через G_1^i.

---

* Следует иметь в виду, что при выяснении однородности графа петля рассматривается нами как две слабые дуги, в то время как в пути она фигурирует как одна слабая дуга.

Множество псевдопрофилей толщины t произвольной конечной длины обозначим символом $\{G\}_t$, а его подмножество псевдопрофилей длины 1 — символом $\{G_1\}_t$.

Во множестве $\{G\}_t$ определим бинарную операцию — сложение псевдопрофилей. Пусть $G_{q_1}, G_{q_2} \in \{G\}_t$. Исходящую вершину псевдопрофиля G_{q_1}, являющуюся концом i-го сильного маршрута G_{q_1}, $1 \leqslant i \leqslant t$, отождествим с входящей вершиной псевдопрофиля G_{q_2}, являющейся началом i-го сильного маршрута псевдопрофиля G_{q_2}. В результате получим псевдопрофиль толщины t и длины $q_1 + q_2$. Этот псевдопрофиль назовем суммой псевдопрофилей G_{q_1} и G_{q_2}, при этом будем употреблять запись $G_{q_1} + G_{q_2} = G_{q_1+q_2}$. Если G_q — псевдопрофиль с базисными точками a_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, расположенными на базисной прямой в порядке возрастания индексов, то запишем, что $G_q = \sum_{i=1}^{q} G_1^i$. Пример операции сложения псевдопрофилей приведен на рис. 1*.

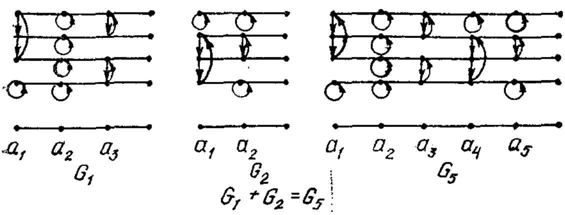

Рис. 1

Во множестве $\{G_1\}_t$ определим бинарную операцию — умножение псевдопрофилей и покажем, что множество $\{G_1\}_t$ является группой относительно этой операции.

Пусть начало чередующегося маршрута псевдопрофиля G_q совпадает с началом i-го сильного маршрута, а его конец — с концом j-го сильного маршрута. Подстановку из t символов $\begin{pmatrix} \cdots i \cdots \\ \cdots j \cdots \end{pmatrix}$ назовем подстановкой псевдопрофиля G_q и обозначим ее через $S(G_q)$. Пусть S_t — множество подстановок из t символов и $S \in S_t$. Существует псевдопрофиль $G \in \{G\}_t$ такой, что $S(G) = S$. Таким псевдопрофилем, в частности, будет псевдопрофиль длины один, начала и концы чередующихся маршрутов которого определяются подстановкой S. Таким образом, отображение множества псевдопрофилей $\{G\}_t$ на множество подстановок S_t является сюрьективным, при этом множество $\{G_1\}_t \subset \{G\}_t$ отображается на множество подставок S_t биективно.

Операция сложения псевдопрофилей индуцирует во множестве подстановок операцию, являющуюся, очевидно, умножением подстановок, т. е., если $G = G' + G''$ $(G', G'' \in \{G\}_t)$, то $S(G) = S(G') \times \times S(G'')$.

---

* При изображении профилей и псевдопрофилей не указываем нумерацию их сильных контуров и сильных маршрутов, предполагая ее идущей сверху вниз, а также не отмечаем ориентацию сильных дуг этих графов, предполагая, что они ориентированы слева направо. Кроме того, там, где не может возникнуть недоразумений, изображения петель в профиле тоже опускаем.

Операция умножения подстановок в симметрической группе подстановок S_t, в свою очередь, индуцирует во множестве псевдопрофилей $\{G_1\}_t$ некоторую бинарную операцию, которую назовем операцией умножения псевдопрофилей единичной длины. Таким образом, если G_1', $G_1'' \in \{G_1\}_t$, то псевдопрофиль G_1 такой, что $S(G_1) = S(G_1')\, S(G_1'')$ и есть произведение псевдопрофилей G_1' и G_1'', при этом употребим запись $G_1 = G_1' G_1''$. В силу биекции множества $\{G_1\}_t$ и множества подставок S_t, множество $\{G_1\}_t$ есть группа относительно операции умножения псевдопрофилей, индуцированной этой биекцией. Группу $\{G_1\}_t$ будем называть мультипликативной группой псевдопрофилей. На рис. 2 приведен пример произведения псевдопрофилей.

Ниже нам понадобится отображение, являющееся суперпозицией отображений: $\{G\}_t \to S_t \to \{G_1\}_t$. Обозначим это отображение через φ. Оно суть сюрьективное отображение множества псевдопрофилей $\{G\}_t$ на мультипликативную группу псевдопрофилей $\{G_1\}_t$, при этом, если G', $G'' \in \{G\}_t$, а G_1', $G_1'' \in \{G_1\}_t$ *таковы*, что $S(G') = S(G_1')$; $S(G'') = S(G_1'')$, то $\varphi(G' + G'') = G_1' \cdot G_1'' = \varphi(G')\, \varphi(G'')$.

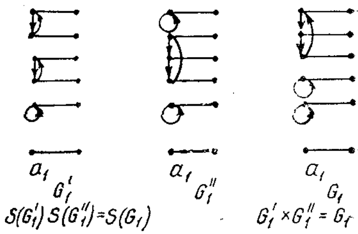

Рис. 2

Пусть псевдопрофиль $G_q \in \{G\}_t$. Отождествим начало и конец каждого из сильных маршрутов. Полученный граф $\overline{G}_q$ назовем замыканием псевдопрофиля G_q. Предположим, что псевдопрофиль G_q связен и $S(G_q)$ — тождественная подстановка, тогда замыкание псевдопрофиля G_q есть профиль. С другой стороны, на профиль Π_q можно смотреть как на замыкание псевдопрофиля $G_q = \sum_{i=1}^{q} G_1^i$, где G_1^i — атомарный псевдопрофиль, соответствующий базисной точке a_i профиля Π_q, а базисные точки профиля располагаются на базисной прямой в порядке возрастания индекса. Таким образом, имеет место

Теорема. *Замыкание псевдопрофиля G_q является профилем тогда и только тогда, когда псевдопрофиль G_q связен и $G_q \subset \ker \varphi$.*

Эта теорема по сути выражает те же свойства профилей, что и теорема о точном покрытии, ибо условие $G_q \subset \ker \varphi$ эквивалентно существованию точного покрытия у замыкания псевдопрофиля G_q.

Обратимся к псевдопрофилям мультипликативной группы $\{G_1\}_t$, подстановки которых суть один цикл. Для таких псевдопрофилей будем употреблять название одноцикловые псевдопрофили и h-транспозиционные, если циклом служит транспозиция (h-модуль разности символов транспозиции).

Заметим, что любая подстановка симметрической группы S_t представима в виде произведения независимых циклов, а каждый цикл — в виде произведений транспозиций. Каждую же транспозицию можно представить в виде произведения инверсий. Следовательно, имеет место

Теорема. 1) *Любой псевдопрофиль мультипликативной группы* $\{G_1\}_t$ *представим в виде произведения одноцикловых псевдопрофилей этой группы.*

2). *Любой одноцикловый псевдопрофиль мультипликативной группы* $\{G_1\}_t$ *представим в виде произведения* h*-транспозиционных псевдопрофилей этой группы.*

3). *Любой* h*-транспозиционный псевдопрофиль мультипликативной группы* $\{G_1\}_t$ *представим в виде произведения* 1*-транспозиционных псевдопрофилей этой группы.*

Эта теорема дает возможность сделать вывод: в мультипликативной группе $\{G_1\}_t$ могут быть выделены в качестве систем образующих:

а) множество одноцикловых псевдопрофилей, б) множество h-транспозиционных псевдопрофилей, в) множество 1-транспозиционных псевдопрофилей, причем, множество 1-транспозиционных псевдопрофилей представляет собой систему независимых образующих мультипликативной группы $\{G_1\}_t$.

Замечание к теореме. В каждом из трех рассмотренных в теореме случаев представлений псевдопрофилей можно обеспечить единственность представления, если договориться об однозначно определенном разложении подстановки псевдопрофиля в виде произведения циклов, транспозиций и инверсий.

Примем следующие соглашения, обеспечивающие единственность представлений псевдопрофиля $G_1 \in \{G_1\}_t$, определенных теоремой.

1. Порядок следования независимых циклов в разложении подстановки определим в соответствии с возрастанием наименьших индексов циклов.

2. λ-членный цикл $(n_1, n_2, \ldots, n_\lambda)$ будем разлагать в следующее произведение $\lambda - 1$-й транспозиции: $(n_1, n_2)(n_2, n_3) \ldots (n_{\lambda-1}, n_\lambda)$, полагая n_1 равным наименьшему символу цикла.

3. Транспозицию (i, j), $|i - j| = h$ будем разлагать в следующее произведение $2h - 1$-й инверсии: $(i, i+1)(i+1, i+2) \ldots$ $\ldots(i+h-2, i+h-1), (j-1, j)(i+h-2, i+h-1) \ldots (i, i+1)$.

В дальнейшем, прибегая к представлению псевдопрофиля $G_1 \in \{G_1\}_t$ в виде произведения одноцикловых и h-транспозиционных псевдопрофилей, будем иметь в виду однозначные представления, определенные в соответствии с нашими соглашениями.

§ 2. Пространство профилей римановой поверхности класса F_q^*. Пусть R — риманова поверхность из класса F_q^*, а F_R — множество ее профилей, называемое нами классом эквивалентности профилей римановой поверхности R. Заметим, что профиль римановой поверхности $R \in F_q^*$ определяется однозначно при фиксированной базисной кривой L и фиксированной нумерации листов римановой поверхности R (см. [1]). Поэтому класс F_R состоит из профилей R, полученных при всех возможных нумерациях листов R и всех возможных базисных кривых L.

В этом параграфе изучим операции в классе $\boldsymbol{F}_R$, индуцированные преобразованиями базисной кривой L с фиксированными базисными точками и перестановками листов R, т. е. изучим структуру пространства ($\boldsymbol{F}_R$, $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{F}_R$), где $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{F}_R$ — группа автоморфизмов над классом эквивалентности профилей $\boldsymbol{F}_R$. Найдем систему образующих в группе $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{F}_R$ и опишем алгоритм их действия в классе $\boldsymbol{F}_R$.

Обозначим через A_L подгруппу группы $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{F}_R$, порожденную группой $\mathrm{Aut}\,L$ — группой автоморфизмов базисных кривых L с фиксированными базисными точками. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,L$ изучена Хабшем (см. [4]). Выясняя структуру группы $\mathrm{Aut}\,L$, Хабш показал, что специального вида автоморфизмы группы $\mathrm{Aut}\,L$, называемые обменами базисной кривой L, представляют собой систему образующих группы $\mathrm{Aut}\,L$.

Для того чтобы выяснить структуру группы $\mathrm{Aut}\,L$, напомним определение обмена базисной кривой и определим соответствующее обмену преобразование в классе эквивалентности $\boldsymbol{F}_R$.

Пусть L — базисная кривая римановой поверхности $R \in F_q^*$, базисные точки которой при положительном обходе L располагаются на L в порядке $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_q$, а базисная кривая $L' = \tau_k L$, где $\tau_k = \tau(a_k, a_{k+1})$ — преобразование обмена базисной кривой L (см. [5]), в результате которого базисные точки при положительном обходе L' располагаются на L' в порядке $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_k, a_{k+2}, \ldots, a_q$, при этом переход от базисной точки a_{k-1} к базисной точке a_{k+2} осуществляется дугой кривой L', принадлежащей внутренности кривой L, а переход от базисной точки a_k к базисной точке a_{k+2} — дугой кривой L', принадлежащей внешности кривой L; дуга кривой L' между базисными точками a_k и a_{k+1} совпадает с соответствующей дугой кривой L, но изменяет ориентацию; все остальные дуги в L и L' совпадают и одинаково ориентированы.

Попутно заметим, что обмены в группе $\mathrm{Aut}\,L$ есть ни что иное как артинова группа кос, т. е. группа с определяющими отношениями: $\tau_k\tau_{k+1}\tau_k = \tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1}$, $k = 1, \ldots, q\,(q+1=1)$; $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$, $i, j = 1, \ldots, q$, $|i-j| > 1$.

Операцию в A_L, индуцированную обменом τ_k, также назовем обменом в A_L, применяя для его обозначения тот же символ, что и в $\mathrm{Aut}\,L$ — τ_k. В дальнейшем нам будет удобно группу A_L обозначать символом $\langle\tau\rangle$, подчеркивая этим обозначением тот факт, что группа A_L по сути группа кос относительно преобразований τ_k в классе эквивалентности $\boldsymbol{F}_R$.

Опишем алгоритм действия операции τ_k на профиль $\Pi_q = \sum_{i=1}^{q} G_1^i$ римановой поверхности $R \in F_q^*$, определенный при некоторой фиксированной нумерации листов R и фиксированной базисной кривой L. Профиль, полученный из профиля Π_q в результате преобразования τ_k обозначим через $\tau_k\Pi_q$. Очевидно, профили Π_q и $\tau_k\Pi_q$ будут отличаться лишь атомарными псевдопрофилями, соответствующими базисным точкам a_k и a_{k+1}, т. е. $\tau_k\Pi_q = \sum_{i=1}^{k-1} G_1^i + G_1'^k + G_1'^{k+1} + \sum_{i=k+1}^{q} G_1^i$.

Выразим атомарные псевдопрофили $G_1'^k$ и $G_1'^{k+1}$ профиля $\tau_k\Pi_q$ через атомарные псевдопрофили профиля Π_q. Согласно определению обмена τ_k базисной кривой L переход от базисной точки a_{k-1} к базисной точке a_k осуществляется дугой кривой L', принадлежащей внутренности кривой L. Это обстоятельство приводит к тому, что слабые контуры и слабые элементарные пути атомарного псевдопрофиля G_1^{k+1} определят слабые контуры и слабые элементарные пути профиля $\tau_k\Pi_q$, дуги которых инцидентны вершинам профиля $\tau_k\Pi_q$, ортогонально проектирующимся в базисную точку a_k базисной прямой профиля $\tau_k\Pi_q^*$, т. е. атомарный псевдопрофиль G_1' имеет ту же подстановку, что и псевдопрофиль G_1^{k+1}: $S(G_1'^k) = S(G_1^{k+1})$. С другой стороны, поскольку профили Π_q и $\tau_k\Pi_q$ обладают точным покрытием, имеет место равенство

$$\prod_{i=1}^{k-1} S(G_1^i)\, S(G_1'^k)\, S(G_1'^{k+1}) \prod_{i=k+2}^{q} S(G_1^i) = \prod_{i=1}^{q} S(G_1^i),$$

и с неизбежностью приходим к заключению, что инцидентность слабых дуг атомарного псевдопрофиля $G_1'^{k+1}$ вершинам профиля $\tau_k\Pi_q$, ортогонально проектирующимся в базисную точку a_{k+1} базисной прямой профиля $\tau_k\Pi_q$, определяется из соотношения:

$$S(G_1'^k)\, S(G_1'^{k+1}) = S(G_1^k)\, S(G_1^{k+1}),$$

т. е. подстановка атомарного псевдопрофиля $G_1'^{k+1}$ получается из подстановки атомарного псевдопрофиля G_1^k трансформированием подстановкой атомарного псевдопрофиля G_1^{k+1}:

---

* Преобразование обмена τ_k базисной кривой L влечет за собой другую расстановку базисных точек на базисной прямой профиля $\tau_k\Pi_q$, а именно, базисные точки a_i базисной прямой p профиля Π_q расположатся на базисной прямой профиля $\tau_k\Pi_q$ при движении по ней слева направо в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_k, a_{k+2}, \ldots, a_q$, сохраняя ориентацию базисной прямой профиля $\tau_k\Pi_q$ — слева направо. Тем самым сохраняется и ориентация сильных контуров профиля $\tau_k\Pi_q$ — слева направо. Однако, в соответствии с принятой в § 1 договоренностью относительно изображения профиля, базисные точки профиля $\tau_k\Pi_q$ мы обозначаем через a_i, предполагая, что они располагаются на базисной прямой профиля $\tau_k\Pi_q$ при движении по ней слева направо в порядке возрастания индекса.

$$S(G_1'^{k+1}) = S^{-1}(G_1^{k+1})\ S(G_1^k)\ S(G_1^{k+1}).$$

Обозначим через G_1^{-1} атомарный псевдопрофиль, подстановка которого есть обратная к подстановке атомарного псевдопрофиля G_1, тогда для атомарных псевдопрофилей $G_1'^k$ и $G_1'^{k+1}$ справедливы равенства:

$$G_1'^k = G_1'^{k+1};\quad G_1'^{k+1} = (G_1^{k+1})^{-1}\, G_1^k G_1^{k+1},$$

где под равенством двух атомарных псевдопрофилей понимаем равенство их подстановок.

Заметим, что независимые циклы подстановки, равной произведению подстановок $S^{-1}(G_1^{k+1})\, S(G_1^k)\, S(G_1^{k+1})$, можно получить, выполняя подстановку $S(G_1^{k+1})$ над символами независимых циклов подстановки $S(G_1^k)$. Таким образом, мы приходим к следующему алгоритму операции τ_k в классе эквивалентности профилей F_R.

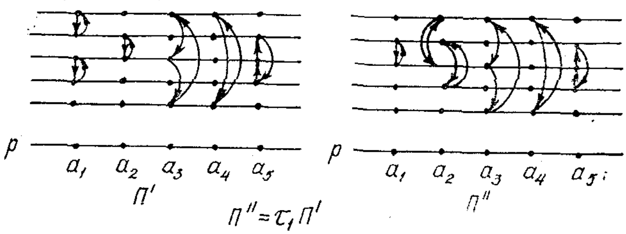

Рис. 3

Для того чтобы по профилю Π_q построить профиль $\tau_k \Pi_q$, достаточно: а) начало (конец) каждой слабой дуги профиля Π_q, ортогонально проектирующееся (проектирующийся) в базисную точку a_{k+1}, переместить по сильному контуру, которому принадлежит начало (конец) перемещаемой слабой дуги, на одну сильную дугу в направлении, противоположном ориентации сильного контура; б) начало (конец) каждой слабой дуги профиля Π_q, ортогонально проектирующееся (проектирующийся) в базисную точку a_k, переместить по пути, которому принадлежит начало (конец) перемещаемой слабой дуги, последовательно на одну сильную и одну слабую дугу *. Пример перехода от профиля Π_q к профилю $\tau^k \Pi_q$ дан на рис. 3.

Нам понадобится также и алгоритм перехода от псевдопрофиля Π_q к псевдопрофилю $\tau_k^{-1}\Pi_q$, где τ_k^{-1} — операция в группе $\langle\tau\rangle$, индуцированная преобразованием базисной кривой L, обратным преобразованию обмена τ_k базисной кривой L. Нетрудно видеть, что атомарные псевдопрофили $G_1'^k$ и $G_1'^{k+1}$ профиля $\tau_k^{-1}\Pi_q$, соответствующие базисным точкам a_k и a_{k+1} профиля $\tau_k\Pi_q$ будут связаны

* Хотя каждая вершина графа Π_q принадлежит двум различным путям, указанное перемещение по пути (сначала по сильной, а затем по слабой дуге) возможно только по одному из них.

с атомарными псевдопрофилями G_1^k и G_1^{k+1} профиля Π_q, соответствующих базисным точкам профиля Π_q — a_k и a_{k+1}, следующими соотношениями: $G_1'^{k+1}=G_1^k$; $G_1'^k=G_1^kG_1^{k+1}(G_1^k)^{-1}$, согласно которым уже нетрудно получить следующий алгоритм операции τ_k^{-1} в классе эквивалентности профилей F_R.

Для того чтобы по профилю Π_q построить профиль $\tau_k^{-1}\Pi_q$, достаточно произвести перемещение слабых дуг профиля Π_q, инцидентных вершинам профиля Π_q, проектирующимся в базисную точку $a_i\,(a_{i+1})$ профиля Π_q по сильным контурам (путям) графа Π_q так же, как и в п. а (п. в) предыдущего алгоритма, но в направлении ориентации сильных контуров профиля Π_q (в направлении, противоположном ориентации путей профиля Π_q).

Итак, нами полностью выяснена структура группы $A_L=\langle\tau\rangle\leqslant\subseteq\operatorname{Aut}F_R$. Заметим, что в общем случае группа A_L не исчерпывает всю группу $\operatorname{Aut}F_R$. Простой пример, приведенный на рис. 4, показывает, что два профиля Π' и Π'', описывающие, очевидно, одну и ту же риманову поверхность класса F_q^* не могут быть преобразованы друг в друга операциями группы $\langle\tau\rangle$. Обозначим через A_S подгруппу группы $\operatorname{Aut}F_R$, индуцированную группой перестановки листов римановой поверхности R. Группа A_s, очевидно, изоморфна симметрической группе S_t, $t\leqslant\infty$. Пусть профиль

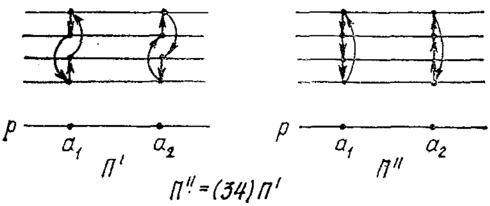

Рис. 4

$$\Pi_q=\sum_{i=1}^{q}G_1^i$$ определен при некоторой фиксированной нумерации листов римановой поверхности $R\in F_q^*$ и фиксированной базисной кривой L, а $s\in A_s$ (операцию s назовем операцией изменения нумерации сильных контуров). Обозначим через $s\Pi_q$ профиль римановой поверхности $R\in F_q^*$, определенный при той же, что и профиль Π_q, базисной кривой L и новой нумерации листов R — измененной согласно подстановке s той нумерации листов римановой поверхности R, которая определяла вместе с базисной кривой L профиль Π_q. Нетрудно видеть, что атомарные псевдопрофили профиля

$$s\Pi_q=\sum_{i=1}^{q}G_1'^i$$ таковы, что их подстановки $S(G_1'^i)$, $i=1,\ldots,q$, определяются по формулам $S(G_1'^i)=sS(G_1^i)s^{-1}$, $i=1,\ldots,q$, Для примера, приведенного на рис. 4, $s=(3,\ 4)$. Понятно, что преобразование $s\in A_s$ не изменит число (и длины) циклов подстановки $S(G_1^i)$, а только произведет замену символов ее циклов согласно подстановке s. Поэтому переход от профиля Π_q к профилю $s\Pi_q$

будет осуществлен, если в профиле Π_q каждую слабую дугу, инцидентную вершинам профиля Π_q, ортогонально проектирующимся в базисную точку a_i заменить новой слабой дугой, определив инцидентные ей вершины в соответствии с перестановкой вершин профиля Π_q, ортогонально проектирующихся в базисную точку a_i, полученной в результате применения к ним подстановки s, $i = 1, \ldots, q$.

Заметим, что операции $\tau \in \langle\tau\rangle$ и $s \in A_s$ — перестановочны, т. е. $\tau s = s\tau$, и поскольку в группе $\operatorname{Aut} E_R$ возникают только автоморфизмы групп $\langle\tau\rangle$ и A_s, имеет место

Теорема. *Группа автоморфизмов римановой поверхности $R \in F_q^*$ есть произведение групп $\langle\tau\rangle$ и A_s.*

Список литературы: 1. *Бронза С. Д., Таирова В. Г.* Профили римановых поверхностей.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1980, вып. 33, с. 12. 2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970, с. 456. 3. *Зап. науч.* семинаров ЛОМИ. 1971, 81, с. 74. 4. *Habsch H.* Die Theorie der Grundkurven und das Agüivalenzproblem bei der Darstellung Riemannscher Flächen.— Mitt Math. Semin. Gjiessen, 1952. 5. *Таирова В. Г.* О комплексах отрезков замкнутых римановых поверхностей рода нуль.— Изв. высших учеб. заведений. Математика, 1962, № 4, с. 155—160.

Поступила в редколлегию 17.11.81.