УДК 513.33

Г. Р. БЕЛИЦКИЙ, В. А. ТКАЧЕНКО

АНАЛИТИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ НЕОСОБОЙ ТОЧКИ

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $F(x)$ — локально-аналитический диффеоморфизм окрестности точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ на окрестность точки $F(x_0) \in \boldsymbol{R}^n$, для которого x_0 не является неподвижной: $F(x_0) \neq x_0$.

Изучим вопрос существования локально-аналитического решения $\varphi \in \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ функционального уравнения

$$g(x,\ \varphi(x),\ \varphi(F(x))) = 0, \tag{1}$$

в котором g — заданное локально-аналитическое отображение, действующее из окрестности некоторой точки $(x_0,\ y_0,\ z_0) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^m$ в пространство $\boldsymbol{R}^k$. Этот вопрос становится нетривиальным, если требовать, чтобы разыскиваемое решение было аналитическим в некоторой связной области, содержащей точки x_0 и $F(x_0)$.

Если $F(x) = x + l_1$, $l_1 \in \boldsymbol{R}^n$, то (1) превращается в уравнение со сдвигом, к которому, например, легко сводится скалярное конечноразностное уравнение на прямой

$$\sum_{p=0}^{s} a_p(x)\,\varphi(x+p) = h(x).$$

Подавляющее число известных результатов о разрешимости таких уравнений относится к случаю постоянных коэффициентов $a_0, \ldots, a_p$.

В теореме 1 мы доказываем локальную разрешимость уравнения.

С уравнением (1) тесно связана задача классификации локальных отображений относительно сопряженности $F \to \Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$. Случай, когда x_0 — неподвижная точка для F, имеет большую историю. Полученные здесь результаты достаточно полно изложены в [1, 2].

Простейшим диффеоморфизмом, «сдвигающим» точку, является $x \to x + e_1$, $e_1 \in \boldsymbol{R}^n$. Вопрос о сопряженности F с таким сдвигом приводит к известному уравнению Абеля

$$\Phi(F(x)) = \Phi(x) + e_1. \tag{2}$$

Если требовать, чтобы Φ был диффеоморфизмом общей связной окрестности точек x_0 и $F(x_0)$, то из (2) с необходимостью вытекает, что $\det F'(x_0) > 0$, т. е. что диффеоморфизм F не меняет ориентацию. В теореме 2 мы докажем, что сохранение или обращение ориентации является единственным инвариантом относительно сопряжения.

Перейдем к формулировкам полученных нами результатов.

Теорема 1. *Пусть F — аналитический диффеоморфизм, определенный в окрестности точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$, и пусть $F(x_0) \neq x_0$. Предположим, что локально-аналитическое отображение $g(x,\ y,\ z)$, действующее из некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0,\ z_0) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \times$*

$\times \boldsymbol{R}^m$ *в пространство* $\boldsymbol{R}^k$, *удовлетворяет условию* $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ *и что матрицы Якоби*

$$A_0 = \frac{\partial g(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \; A_1 = \frac{\partial g(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}$$

имеют ранг k.

Если $n > 1$ *или* $n = 1$ *и* $F'(x_0) > 0$, *то существует стягиваемая область** $U \subset \boldsymbol{R}^n$, *содержащая точки* x_0 *и* $F(x_0)$, *и аналитическая в* U *вектор-функция* φ, *которая удовлетворяет условиям* $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi(F(x_0)) = z_0$ *и уравнению* (1) *в некоторой окрестности точки* $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$.

При $n = 1$ и $F'(x_0) < 0$ ут ерждение теоремы 1 неверно. Достаточно рассмотреть скалярное уравнение $\varphi(1 - x) + \varphi(x) = \gamma(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^1$, где правая часть γ аналитична в малой окрестности точки $x = 0$. Для разрешимости этого уравнения в функциях, аналитических на отрезке $[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы функция γ была аналитической на $[0, 1]$ и четной относительно точки $x = \frac{1}{2}$, т. е. $\gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \gamma\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

В условиях теоремы 1 мы сводим вопрос о разрешимости уравнения (1) к такому же вопросу для уравнения

$$\varphi(F(x)) = Q(x, \varphi(x)), \; \varphi(x_0) = 0, \; \varphi(F(x_0)) = 0, \tag{3}$$

где $Q(x, y)$ — локально-аналитическое отображение, определенное в окрестности точки $(x_0, 0)$, для которого $Q(x_0, 0) = 0$, $\det \frac{\partial Q(x_0, 0)}{\partial y} \neq 0$. С уравнением (3) естественно связать локальный послойный диффеоморфизм

$$G(x, y) = (F(x), Q(x, y)). \tag{4}$$

Решение φ уравнения (3) определяет в пространстве $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ график $(x, \varphi(x))$, являющийся связным аналитическим n-мерным подмногообразием M. Под действием диффеоморфизма G часть M, лежащая в окрестности точки $(x_0, 0)$, переходит в часть, лежащую в окрестности точки $(F(x_0), 0)$. Таким образом, из теоремы 1 вытекает существование в пространстве $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ связного локально инвариантного относительно G подмногообразия.

Вводя преобразование

$$\Phi(x, y) = (H(x), T(x, y)), \tag{5}$$

положим

$$\tilde{G} = \Phi^{-1} \circ G \circ \Phi, \; \tilde{G}(x, y) = (\tilde{F}(x), \tilde{Q}(x, y)). \tag{6}$$

Если ψ есть решение уравнения

$$\psi(\tilde{F}(x)) = \tilde{Q}(x, \psi(x)), \; \psi(x_0) = 0, \; \psi(\tilde{F}(x_0)) = 0, \tag{7}$$

то $\varphi(x) = T(H^{-1}(x), \psi(H^{-1}(x)))$ является решением уравнения (3). Поэтому уравнение (3) естественно свести к его простейшей «нор-

---

* Диффеоморфная открытому кубу пространства $\boldsymbol{R}^n$.

мальной» форме относительно группы (6). Для описания такой формы положим $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \boldsymbol{R}^n$, $I = \{x \in \boldsymbol{R}^n : x = te_1, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, $J = \operatorname{diag}(\delta, 1, \ldots, 1)$, где $\delta = \operatorname{sign}\det \frac{\partial Q(x_0, 0)}{\partial y}$ и $J_0 = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, 1, \ldots 1)$, где $\varepsilon = \operatorname{sign}\det F'(x_0)$ при $n \geqslant 2$ и $J_0 = 1$ при $n = 1$.

Теорема 2. *Пусть F — аналитический диффеоморфизм, определенный в окрестности точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$, $F(x_0) \neq x_0$, и пусть $Q(x, y)$ — локально-аналитическое отображение окрестности точки $(x_0, 0) \in \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$, для которого $Q(x_0, 0) = 0$, $\det \frac{\partial Q(x_0, 0)}{\partial y} \neq 0$. Если $n > 1$ или $n = 1$ и $F'(x_0) > 0$, то существует такой аналитический диффеоморфизм Φ вида (5), где $H(0) = x_0$, $H(e_1) = F(x_0)$, определенный в окрестности прямого произведения $I \times 0 \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$, который приводит отображение $G(x, y) = (F(x), Q(x, y))$ к нормальной форме*

$$\tilde{G}(x, y) = (J_0 x + e_1, Jy). \tag{8}$$

Уравнение (7), соответствующее диффеоморфизму (8), имеет вид

$$\psi(J_0 x + e_1) = J\psi(x). \tag{9}$$

Тривиальному решению $\psi = 0$ этого уравнения соответствует решение $\varphi_0(x) = T(H^{-1}(x), 0$ уравнения (3). Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\psi(\xi, \eta) = e^{\xi \ln J}\omega(\xi, e^{-\xi \ln J_0}\eta), \; x = (\xi, \eta), \tag{10}$$

где $J_0 x = (\xi, J_0\eta)$, а $\omega(x)$ — произвольная, e_1 — периодическая функция: $\omega(x + e_1) = \omega(x)$. Поэтому общее решение уравнения (3), достаточно близкое к решению φ_0 имеет вид $\varphi(x) = T(H^{-1}(x), \psi(H^{-1}(x)))$, где ψ определяется согласно (10) с достаточно малой e_1 — периодической функцией ω. Для того чтобы получить вещественное решение φ, нужно в формуле (10) заменить ψ на $\operatorname{Re}\psi$. В описанном смысле теорему 2 можно считать теоремой о приведении (3) к простейшему уравнению (9). Из возможности такого приведения, в частности, получается приведение к нормальной форме «первой координаты» F.

Следствие. *Пусть F — аналитический диффеоморфизм окрестности точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ на окрестность образа $F(x_0) \neq x_0$. Если $n \geqslant 2$ или $n = 1$ и $F'(x_0) > 0$, то существует аналитический диффеоморфизм Φ, определенный в окрестности отрезка I, для которого $\Phi(0) = x_0$, $\Phi(e_1) = F(x_0)$ и в некоторой окрестности V начала координат выполняется равенство*

$$\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi(x) = J_0 x + e_1, \; x \in V, \tag{11}$$

где $J_0 = 1$ при $n = 1$.

В случае $n = 1$ диффеоморфизм F, определенный на отрезке $[x_0, F(x_0)]$ и меняющий ориентацию, имеет неподвижную точку на нем. Это приводит к появлению инвариантов, отличных от ориентации и, в частности, препятствует сопряжению F с «обратным сдвигом» $x \to e_1 - x$.

Рассмотрим в качестве примера диффеоморфизм $F(x)=1+cx$, $c\neq 1$, $x\in R^1$. Точка $a=(1-c)^{-1}$ является неподвижной для F. Если $c>0$, то полагая

$$\Phi(x)=\frac{e^{x\ln c}-1}{c-1},$$

получим диффеоморфизм оси R^1 на полуось $(a, +\infty)$, который приводит F к стандартному сдвигу $\Phi^{-1}\circ F\circ\Phi(x)=x+1$, $x\in R^1$. В случае $c<0$, в отличие от предыдущего, $a\in[0, 1]$ и при $c\neq -1$ F не может приводиться к обратному сдвигу $x\to 1-x$. Действительно, уравнение $1+c\Phi(x)=\Phi(1-x)$, $c<0$, $c\neq -1$ не имеет аналитического на отрезке $[0, 1]$ решения, отличного от постоянного $\Phi(x)\equiv a$.

Если диффеоморфизм F сохраняет ориентацию, то в (11) $J_0=E$, и равенством $F_t=\Phi^{-1}\circ(\cdot+te_1)\circ\Phi$ F включается в локально-аналитический поток F_t, который по «ременной» переменной t аналитичен в окрестности отрезка $[0, 1]$.

§ 2. Вспомогательные построения

Прежде всего, в качестве предварительного результата мы установим, что диффеоморфизм F приводится к виду, близкому к нормальной форме (11).

Лемма 1. *Пусть F — аналитический диффеоморфизм окрестности точки $x_0\in R^n$ на окрестность образа $F(x_0)\neq x_0$. Тогда при каждом фиксированном $N>0$ существует аналитический диффеоморфизм Φ, определенный в окрестности отрезка I, для которого $\Phi(0)=x_0$, $\Phi(e_1)=F(x_0)$ и выполняется равенство*

$$\Phi^{-1}\circ F\circ\Phi(x)=J_0x+e_1+O(\|x\|^N), \tag{12}$$

где $J_0=\operatorname{sign}F'(x_0)$ при $n=1$.

Доказательство. Афинное преоб азование $\Phi(x)=cx+x_0$, в котором $c^{-1}(F(x_0)-x_0)=e_1$ приводит F к виду $\tilde F=\Phi^{-1}\circ F\circ\Phi$, где $F(0)=e_1$. Поэтому в дальнейшем примем $x_0=0$, $F(x_0)=e_1$, так что $F(x)=e_1+Ax+f(x)$, $f(0)=0$, $f'(0)=0$.

Докажем существование такого диффеоморфизма Ψ окрестности отрезка $[0, e_1]$ на образ, что $\Psi(0)=0$, $\Psi(e_1)=e_1$, приводящего F к виду $F_1(x)=\Psi^{-1}\circ F\circ\Psi(x)=e_1+J_0x+f_1(x)$, где $f_1(0)=o$, $f_1'(0)=0$. Нетрудно проверить, что для этой цели достаточно в качестве Ψ взять такой диффеоморфизм, для которого

$$\Psi(0)=0,\ \Psi'(0)=E,\ \Psi(e_1)=e_1,\ \Psi'(e_1)=J_0A. \tag{13}$$

При этом, согласно определению матрицы J_0, имеем $\det J_0A>0$.

Полагая для краткости $B=J_0A$, предположим вначале, что $B=E+\omega$, где $\|\omega\|\leqslant\frac{1}{4}$. Выберем аналитическую вектор-функцию $h: R^n\to R^n$, удовлетворяющую условиям $h(0)=0$, $h'(0)=0$, $h(e_1)=0$, $h'(e_1)=E$ и положим $\Phi(x;\ \omega)=x+\omega h(x)$.

Если дополнительно потребовать, чтобы выполнялась оценка $\|h'(x)\| \leqslant 2$, то $\Phi(x;\ \omega)$ будет диффеоморфизмом пространства $\boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющим условиям (13).

В общем случае, благодаря условию $\det B > 0$, оператор B может быть представлен в виде конечного произведения $B = (E + \omega_s)(E + \omega_{s-1}) \ldots (E + \omega_1)$, где $\|\omega_k\| \leqslant \frac{1}{4}$. Для того чтобы получить (13), теперь достаточно в качестве Ψ взять суперпозицию $\Psi = \Phi(\cdot,\ \omega_s) \circ \Phi(\cdot,\ \omega_{s-1}) \circ \ldots \circ \Phi(\cdot,\ \omega_1)$.

Таким образом, для доказательства (12) достаточно рассмотреть диффеоморфизм

$$F(x) = e_1 + J_0 x + f(x),\ f(0) = 0,\ f'(0) = 0. \tag{14}$$

Положим

$$\Psi_0(x) = x + f(J_0 \tau(x)), \tag{15}$$

где аналитическая вектор-функция $\tau: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ удовлетворяет условиям

$$\tau^{(\nu)}(0) = 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant N;$$
$$\tau(e_1) = 0,\ \tau'(e_1) = E;$$
$$\tau^{(\nu)}(e_1) = 0,\ 2 \leqslant \nu \leqslant N$$

и настолько мала, что отображение Ψ_0 определено в окрестности отрезка $[0,\ e_1] \subset \boldsymbol{R}^n$ и является ее диффеоморфизмом на образ.

Для построения $\tau(x)$ воспользуемся тем, что благодаря условию $f'(0) = 0$ можно считать

$$2\left\|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right\| \leqslant \frac{1}{2},\ \operatorname{dist}(x,\ I) \leqslant \rho_0. \tag{16}$$

Рассмотрим функцию

$$\theta(\xi) = \left(\frac{\delta^2 - (\xi - 1)^2}{\delta^2}\right)^{N+1} \cdot \xi^p. \tag{17}$$

При фиксированном значении ρ_0 выберем $p \geqslant N + 1$ столь большим, чтобы на отрезке $[0,\ 1 - \rho_0]$ выполнялось неравенство $|\theta(\xi)| \leqslant \frac{\rho_0}{2}$, а затем найдем столь малое значение $\rho_1 < \frac{\rho_0}{2}$, что $|\theta(\xi)| \leqslant 2$ при $\xi \in [-\rho_1,\ 1 + \rho_1]$, $|\theta(\xi)|\,|\xi - 1| \leqslant \rho_0$ при $1 \leqslant \xi \leqslant 1 + \rho_1$ и $|\theta(\xi)| \leqslant 1$ при $\xi \in [-\rho_1,\ 1]$.

Определим в окрестности отрезка $[0,\ e_1] \subset \boldsymbol{R}^n$ отображение

$$\tau(x) = \theta(\xi)(x - e_1),\ x = (\xi,\ \eta) \tag{18}$$

Если $1 \leqslant \xi \leqslant 1 + \rho_1$, то $|\theta(\xi)(\xi - 1)| \leqslant 2\rho_1 \leqslant \rho_0$. Если $1 - \rho_0 \leqslant \xi \leqslant 1$, то $|\theta(\xi)(\xi - 1)| \leqslant |\xi - 1| \leqslant \rho_0$. Наконец, если $-\rho_1 \leqslant \xi \leqslant 1 - \rho_0$, то $|\theta(\xi)(\xi - 1)| \leqslant \frac{\rho_0}{2} \cdot 2 \leqslant \rho_0$. Если к тому же $\eta = (\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_{n-1})$, то $|\theta(\xi)\eta_j| \leqslant 2\rho_1 \leqslant \rho_0$. Таким образом, равенство (16) определяет аналитическое отображение $\tau(x)$ окрестности отрезка $[0,\ e_1]$. Более того, из (16) следует, что Ψ_0 есть диффеоморфизм окрестности этого отрезка на ее образ.

Дифференцируя (15) по x, получим

$$\Psi_0(0) = 0,\ \Psi_0'(0) = E,\ \Psi_0^{(\nu)}(0) = 0,\ 2 \leqslant \nu \leqslant N$$

и

$$\Psi_0^{(\nu)}(e_1)\, J_0^{\nu} = F^{(\nu)}(0)\,.$$

Отсюда следует, что если F имеет вид (14), то

$$\Psi_0^{-1} \circ F \circ \Psi_0(x) = e_1 + J_0 x + O(\|x\|)^N)$$

и лемма 1 доказана.

Покажем теперь, что в условиях теоремы 1 уравнение (1) действительно приводится к виду (3). С этой целью заметим, что в силу этих условий $\dim \operatorname{Ker} A_0 = \dim \operatorname{Ker} A = m - k$. Выберем какое-нибудь подпространство $L \subset \boldsymbol{R}^m$, $\dim L = k$, так что $L \cap \operatorname{Ker} A_0 = L \cap \operatorname{Ker} A_1 = \{0\}$, и зафиксируем какой-нибудь линейный оператор $T: \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^m$ с образом $T\boldsymbol{R}^k = L$. Тогда операторы A_0T и A_1T являются изоморфизмами пространства $\boldsymbol{R}^k$.

Положим теперь

$$\tilde{g}(x,\ u,\ v) = g(x,\ Tu + a(x),\ Tv + a(F(x))),$$

где $u,\ v \in \boldsymbol{R}^k$ и $a: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^k$ — фиксированное аналитическое отображение, которое удовлетворяет условию $a(x_0) = y_0,\ a(F(x_0)) = z_0$. Очевидно, $\tilde{g}(x_0,\ 0,\ 0) = g(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и $\dfrac{\partial \tilde{g}(x_0,\ 0,\ 0)}{\partial u} = A_0T,\ \dfrac{\partial \tilde{g}(x_0,\ 0,\ 0)}{\partial v} = A_1T$. По теореме о неявной функции существует такое отображение $v = Q(x,\ u)$, $Q(x_0,\ 0) = 0$ определенное и аналитическое в окрестности точки $(x_0,\ 0,\ 0) \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^k \times \boldsymbol{R}^k$, для которого в этой окрестности выполняется равенство $\tilde{g}(x,\ u,\ Q(x,\ u)) = 0$. При этом оператор $A = \dfrac{\partial \tilde{g}(x_0,\ 0,\ 0)}{\partial u}: \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^k$ является изоморфизмом, поскольку $A_0T + A_1TA = 0$. В результате исходное уравнение (1) сводится к уравнению

$$\Psi(F(x)) = Q(x,\ \Psi(x)),\ \Psi(x_0) = 0. \tag{19}$$

Действительно, если ψ — некоторое решение уравнения (19) в области $U \subset \boldsymbol{R}^n$, то $\varphi(x) = T\psi(x) + a(x)$ есть решение уравнения (1) в той же области U.

В соответствии со сказанным в § 1, для доказательства разрешимости уравнения (19) достаточно доказать возможность приведения диффеоморфизма $G(x,\ y) = (F(x),\ Q(x,\ y))$ к нормальной форме (8) преобразованием Φ вида (5), т. е. доказать теорему 2. Первым шагом на пути доказательства является

Лемма 2. *При каждом $N > 0$ существует аналитический диффеоморфизм $\Phi(x,\ y) = (H(x),\ T(x,\ y))$, определенный в окрестности отрезка $I \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^k$, для которого $H(0) = x_0,\ H(e_1) = F(x_0)$ и равномерно относительно y, лежащих в некоторой окрестности точки $0 \in \boldsymbol{R}^k$, выполняется равенство*

$$\Phi^{-1}\circ G\circ\Phi(x,\ y)=(J_0x+e_1+O(\|x\|^N),\ Jy+O(\|x\|^N)). \qquad (20)$$

Доказательство. Согласно лемме 1, можно принять $x_0=0$ $F(x)=J_0x+e_1+O(\|x\|^N)$ и $H(x)=x$.

Переходя к построению диффеоморфизма $\Phi(x,\ y)$, приводящего уравнение (19) к виду (20), выделим линейную часть функции Q, полагая $Q(x,\ y)=Ay+h(x,\ y)$, где $\frac{\partial h(0,\ 0)}{\partial y}=0$. Если линейный относительно y диффеоморфизм $\Phi_0(x,\ y)=(x,\ T_0(x)\,y)$ таков, что

$$T(0)=E,\ T_0(e_1)=AJ,$$

то определяемая равенством

$$\Phi_0^{-1}\circ G\circ\Phi_0(x,\ y)=(F(x),\ Jy+h_0(x,\ y))$$

вектор-функция h_0 удовлетворяет условию $\frac{\partial h_0(0,\ 0)}{\partial y}=0$.

Для построения $T_0(x)$ заметим, что поскольку $\det AJ>0$, то $AJ=B_1B_2$, где операторы B_1 и B_2 имеют вещественные логарифмы. Это позволяет принять $T_0(x)=\exp(\xi\ln B_1)\cdot\exp(\xi\ln B_2)$, $x=(\xi,\ \eta)$, $\xi\in R^1$.

Таким образом, в условиях леммы 2, можно считать, что

$$G(x,\ y)=(F(x),\ Q(x,\ y)),\ Q(x,\ y)=Jy+h(x,\ y),\ \frac{\partial h(0,\ 0)}{\partial y}=0.$$

Пусть теперь $\Phi(x,\ y)=(x,\ T(x,\ y)$, а функция $\tilde h$ определена равенством $\Phi^{-1}\circ G\circ\Phi(x,\ y)=(F(x),\ Jy+\tilde h(x,\ y))$. Тогда

$$JT(x,\ y)+h(x,\ T(x,\ y))=T(J_0x+e_1+O(\|x\|^N),\ Jy+\tilde h(x,\ y))$$

и (20) эквивалентно выполнению равенств

$$\frac{\partial^{(\nu)}\tilde h(0,\ y)}{\partial x^\nu}=0,\ 0\leqslant\nu\leqslant N.$$

Это, в свою очередь, эквивалентно выполнению равенств

$$J\frac{\partial^{(\nu)}T(0,\ y)}{\partial x^\nu}+\left.\frac{\partial^{(\nu)}h(x,\ T(x,\ y))}{\partial x^\nu}\right|_{x=0}=\frac{\partial^{(\nu)}T(e_1,\ Jy)}{\partial x^\nu}J_0^{\mathfrak{D}\nu}. \qquad (21)$$

Если вектор-функция $T(x,\ y)$ такова, что

$$T(0,\ y)=y; \qquad (22)$$

$$\frac{\partial^{(\nu)}T(0,\ y)}{\partial x^\nu}=0,\ 1\leqslant\nu\leqslant N,$$

то (21) окажется эквивалентным соотношениям

$$\frac{\partial^{(\nu)}T(e_1,\ Jy)}{\partial x^\nu}J_0^{\mathfrak{D}\nu}=\frac{\partial^{(\nu)}Q(0,\ y)}{\partial x^\nu},\ 0\leqslant\nu\leqslant N. \qquad (23)$$

Будем искать T в виде

$$T(x,\ y)=y+h(J_0\tau(x),\ \theta(\xi)Jy),\ x=(\xi,\ \eta), \qquad (24)$$

где τ и θ те же функции, что и в доказательстве леммы 1. Поскольку $h(0,\ 0)=0$, $\frac{\partial h(0,\ 0)}{\partial y}=0$, найдется столь малое число $\rho_0>0$, что

$$2\left\|\frac{\partial h(x,\ y)}{\partial y}\right\|\leqslant\frac{1}{2},\ \operatorname{dist}\{(x,\ y),\ I\times 0\}\leqslant\rho_0, \qquad (25)$$

и определенная согласно (24) вектор-функция T аналитична в окрестности отрезка $I = [0, e_1] \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$. Но тогда из условия (25) будут следовать соотношения (22) и (23).

Поскольку

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = E + \theta(\xi) \frac{\partial h(J_0 \tau(x), \theta(\xi) Jy)}{\partial y} J,$$

то из (25) следует, что отображение $\Phi(x, y) = (x, T(x, y))$ есть диффеоморфизм некоторой окрестности отрезка $[0, e_1] \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ на ее образ.

Лемма 2 доказана.

§ 3. Гомологическая лемма

В простейшем случае уравнение (1) имеет вид

$$\psi(x + e_1) - \psi(x) = h(x), \; e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \boldsymbol{R}^n, \tag{26}$$

относительно неизвестной вектор-функции $\psi : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$. Его принято называть гомологическим. Несколько более общий вид имеет уравнение

$$\psi(e_1 + J_0 x, Jy) - B\psi(x, y) = h(x, y), \; x \in \boldsymbol{R}^n, \; y \in \boldsymbol{R}^m, \tag{27}$$

в котором J_0 и J — введенные ранее диагональные операторы. Доказательство разрешимости уравнения (27) оказывается существенным элементом доказательства сформулированных в § 5 результатов.

Условимся о некоторых обозначениях. Если D — область в пространстве $\boldsymbol{C}^n$, то $\overline{A}_q(D)$ — пространство функций со значениями в $\boldsymbol{C}^q$, аналитических внутри D, непрерывных в замыкании $\overline{D}$ с нормой $\|h\|_D = \max\limits_{z \in \overline{D}} \|h(z)\|$.

Для заданного $\rho > 0$ определим полицилиндр

$$\prod\nolimits_q(\rho) = \{z = (z_1, \ldots, z_n) : |z_i| < \rho, \; i = 1, \ldots, q\}$$

и область

$$\Omega_q(\rho) = \{z = te_1 + \zeta, \; t \in [0, 1], \; \zeta \in \prod\nolimits_q(\rho)\}.$$

Лемма 3. *Для заданного оператора* $B : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$, $\det B \neq 0$ *существует такая постоянная* $\nu > 0$, *что при любых числах* ρ *и* δ, *не превосходящих* $\frac{1}{2}$, *для всякой функции* $h \in A_{m+n}(\prod_n(\rho))$ *найдется функция* $\psi \in \overline{A}_{m+n}(\Omega_n(\rho e^{-\delta}))$, $\psi(0) = 0$, *которая при* $x \in \Pi_{m+n}(\rho e^{-\delta})$ *удовлетворяет гомологическому уравнению (27) и неравенству*

$$\|\psi\|_{\Omega_{m+n}(\rho e^{-\delta})} \leqslant \delta^{-\nu} \|h\|_{\Pi_{m+n}(\rho)}.$$

Если h *принимает лишь вещественные значения на вещественном подпространстве* $\boldsymbol{R}^n \subset \boldsymbol{C}^n$, *то таким же является и решение* $\overline{\psi}$.

Доказательство. Рассмотрим вначале уравнение

$$\psi(e_1 + x) - B\psi(x) = h(x), \; x \in \boldsymbol{R}^n, \tag{28}$$

Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_q$ — все различные собственные числа оператора B. Каждую точку $\lambda_{sp} = \ln \chi_p + 2\pi$; $s, p = 1, \ldots, q$; $s \in \boldsymbol{Z}$ окружим кружком одного и того же и столь малого радиуса $\sigma < 1$ так, чтобы различные кружки не пересекались, и построим систему замкнутых контуров $L_s \subset \boldsymbol{C}^1$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ следующим образом. При выбранном значении $\delta > 0$ и $\varkappa = e^{-\delta}\rho$ положим $R_0 = 1$, $R_s = s\varkappa^{-1}$, $s = 1, 2, \ldots$ и построим систему окружностей $C_s = \{z \in \boldsymbol{C}^1, \ |z| = R_s\}$. Если окружность C_s не пересекает ни одного исключительного кружка, принимаем $L_s = C_s$. В противном случае составляем L_s из частей окружности C_s и тех окружностей, ограничивающих исключительные кружки и пересекающихся с C_s, которые лежат во нешности C_s. Поскольку оператор B — вещественный, контур L_s симметричен относительно вещественной оси и имеет длину, не превосходящую $2\pi(R_s + 1)$.

Легко видеть, что существует такая постоянная $C > 0$, что выполняется оценка

$$\|(e^\lambda - B)^{-1}\| \leqslant Ce^{-H(\arg\lambda)|\lambda|}, \quad \lambda \in L_s, \tag{29}$$

в которой $H(0)$ — опорная функция отрезка $[0, 1] \subset \boldsymbol{C}^1$.

Положим теперь, следуя методу Гурвица [4],

$$\omega(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_s} \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^{s+1}} (e^\lambda - B)^{-1} \frac{\partial^{(s)} h(0, \eta)}{\partial \xi^s} d\lambda, \quad z = (\xi, \eta), \ \xi \in \boldsymbol{C}^1,$$

$$\eta \in \boldsymbol{C}^{n-1} \tag{30}$$

и проверим, что $\omega \in \bar{A}(\Omega_n(\varkappa))$.

Прежде всего заметим, что при всех $\lambda \in \boldsymbol{C}^1$ выполняется неравенство

$$|e^{\lambda\xi}| \leqslant e^{(H(\arg\lambda)+\varkappa)|\lambda|}, \quad z = (\xi, \eta) \in \Omega_n(\varkappa). \tag{31}$$

Кроме того, в силу неравенств Коши имеем

$$\left|\frac{\partial^{(s)} h(0, \eta)}{\partial \xi^s}\right| \leqslant \frac{s!}{\rho^s} \|h\|_{\Pi_n(\rho)},$$

На контуре L_s имеем $|\lambda| R_s$, что вместе с оценками (29) и (31) приводит к следующей оценке общего члена $\omega_s(z)$ ряда

$$\|\omega_s\|_{\Omega_n(\varkappa)} \leqslant \frac{2s!\, e^{\varkappa R_s}}{C\rho^s R_s^s} \|h\|_{\Pi_n(\rho)} \leqslant C_1 s e^{-\delta s} \|h\|_{\Pi_n(\rho)}$$

с некоторой абсолютной постоянной C_1. Поэтому действительно $\omega \in \bar{A}_n(\Omega_n(\varkappa))$ и, кроме того

$$\|\omega\|_{\Omega_n(\varkappa)} \leqslant C_1 (1 - e^{-\delta})^{-2} \|h\|_{\Pi_n(\rho)}.$$

Если $z \in \Pi_n(\varkappa)$, то $z + e_1 \in \Omega_n(\varkappa)$ и из (30) следует

$$\omega(z + e_1) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_s} \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^{s+1}} e^\lambda (e^\lambda - B)^{-1} \frac{\partial^{(s)}(0, \eta)}{\partial \xi^s} d\lambda =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^{s+1}} \frac{\partial^{(s)} h(0, \eta)}{\partial \xi^s} d\lambda + B \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_s} \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^{s+1}} (e^{\lambda} - B)^{-1} \times$$

$$\times \frac{\partial^{(s)} h(0, \eta)}{\partial \xi^s} d\lambda = h(z) + B\omega(z),$$

так что (30) определяет решение уравнения (28). Вектор-функция $\psi(x) = \omega(x) - \operatorname{Re} e^{\xi \ln B} \omega(0)$ является решением уравнения (28), обращающимся в нуль при $x = 0$ и при достаточно большом значении ν удовлетворяет условию $\|\psi\| \leqslant \delta^{-\nu} \|h\|$.

Наконец, если $h(z)$ принимает вещественные значения при $z \in \boldsymbol{R}^n$, то ввиду вещественности подынтегральной функции в (30) и симметрии контура L_s относительно точки $\lambda = 0$, функция $\psi(z)$ также вещественнозначна при $z \in \boldsymbol{R}^n$. Это доказывает лемму для уравнения (28).

Переходя к рассмотрению уравнения (27), положим

$$h_{\pm}(x, y) = \frac{h(J_0 x, Jy) + h(x, y)}{2}.$$

Тогда $h_{\pm}(J_0 x, Jy) = \pm h_{\pm}(x, y)$ и $h = h_+ + h_-$. Рассмотрим уравнение

$$\psi_{\pm}(e_1 + x, y) \mp B\psi_{\pm}(x, y) = \pm h_{\pm}(x, y).$$

Формула (30) дает решения этих уравнений $\psi_{\pm}$, которые удовлетворяют дополнительным условиям $\psi_{\pm}(J_0 x, Jy) = \pm \psi_{\pm}(x, y)$. Вектор-функция $\psi = \psi_+ + \psi_-$ удовлетворяет всем требованиям леммы.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Как установлено в § 2, можно считать, что

$$F(x) = e_1 + J_0 x + f(x), \ f(0), = 0, \ \frac{\partial f(0)}{\partial x} = 0$$

и

$$G(x, y) = (F(x), \ Jy + g(x, y)), \ g(0, 0) = 0, \ \frac{\partial g(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Пусть преобразование Φ имеет вид $\Phi(x, y) = (x + \varphi(x), \ y + t(x, y))$, пусть $G_1 = \Phi \circ G \circ \Phi^{-1}$ и отображения f_1 и g_1 определены равенством

$$G_1(x, y) = (J_0 x + e_1 + f_1(x), \ Jy + g_1(x, y)).$$

Тогда

$$\Phi \circ G(x, y) = (e_1 + J_0 x + f(x) + \varphi(e_1 + J_0 x + f(x)),$$
$$Jy + g(x, y) + t(F(x), \ Jy + g(x, y)));$$
$$G_1 \circ \Phi(x, y) = (e_1 + J_0 x + J_0 \varphi(x) + f_1(x + \varphi(x)),$$
$$Jy + Jt(x, y) + g_1(x + \varphi(x), y + t(x, y))).$$

Поэтому, если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(e_1 + J_0 x) - J_0 \varphi(x) + f(x) = 0, \tag{32}$$

а функция $t(x, y)$ — уравнению

$$t(e_1 + J_0 x, \ Jy) - Jt(x, y) + g(x, y) = 0, \tag{33}$$

то выполняются равенства

$$f_1(x+\varphi(x)) = \varphi(e_1 + J_0x + f(x)) - \varphi(e_1 + J_0x); \tag{34}$$

$$g_1(x+\varphi(x),\, y + t(x, y)) = t(e_1 + J_0x + f(x),$$
$$Jy + g(x, y)) - t(e_1 + J_0x,\ Jy). \tag{35}$$

Лемма 4. *Существует такое число* $\alpha > 0$, *что если*

$$\|f\|_{\Pi_n(\rho)} \leqslant \rho\delta^{\alpha},\ \|g\|_{\Pi_{n+m}(\rho)} \leqslant \rho\delta^{\alpha},$$

то найдутся такие решения $\varphi \in \bar{A}\left(\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{\delta}{4}}\right)\right)$ *и* $t \in \bar{A}\left(\Omega_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{\delta}{4}}\right)\right)$ *уравнений* (32), (33), *что* $\varphi(0) = 0$, $t(0, 0) = 0$ *и удовлетворяются оценки*

$$\|\varphi\|_{\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{\delta}{4}}\right)} \leqslant \delta^{-\nu}\|f\|_{\Pi_n(\rho)},\ \|t\|_{\Omega_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{\delta}{4}}\right)} \leqslant \delta^{-\nu}\|g\|_{\Pi_{n+m}(\rho)}, \tag{36}$$

а определяемые равенствами (34), (35) *функции* f_1 *и* g_1 *удовлетворяют оценкам*

$$\|f_1\|_{\Pi_n(\rho e^{-\delta})} \leqslant \rho^{-1}\delta^{-\alpha}\|f\|^2_{\Pi_n(\rho)}; \tag{37}$$

$$\|g_1\|_{\Pi_{n+m}(\rho e^{-\delta})} \leqslant \rho^{-1}\delta^{-\alpha}\|g\|_{\Pi_n(\rho)}. \tag{38}$$

Доказательство. Согласно лемме существует такое число ν, когда уравнения (32) и (33) при выбранных функциях $f(x)$ и $g(x, y)$ имеют решения $\varphi(x)$ и $t(x, y)$, которые обладают требуемыми свойствами. В силу неравенств Коши отсюда вытекают оценки

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\|_{\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{\delta}{2}}\right)} \leqslant C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1}\|f\|_{\Pi_n(\rho)}; \tag{39}$$

$$\left\|\frac{\partial t}{\partial x}\right\|_{\Omega_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{\delta}{2}}\right)} + \left\|\frac{\partial t}{\partial y}\right\|_{\Omega_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{\delta}{2}}\right)} \leqslant C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1}\|g\|_{\Pi_{n+m}(\rho)} \tag{40}$$

с постоянной $C > 0$, зависящей только от размерностей n и m. Если $\delta < \frac{1}{2}$, то при достаточно большом значении α будем иметь $\delta^{\alpha} + e^{-\frac{3\delta}{4}} \leqslant e^{-\frac{\delta}{2}}$. Поэтому из (39), (40) следует

$$\|\varphi(e_1 + J_0x + f(x)) - \varphi(e_1 + J_0x)\|_{\Pi_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)} \leqslant$$
$$\leqslant C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1}\|f\|^2_{\Pi_n(\rho)};$$

$$\|t(e_1 + J_0x + f(x),\ Jy + g(x, y) - t(e_1 + J_0x,\ Jy)\|_{\Pi_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)} \leqslant$$
$$\leqslant 2C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1}\|g\|^2_{\Pi_{n+m}(\rho)}.$$

Но тогда

$$\| f_1(x+\varphi(x))\|_{\Pi_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)} \leqslant C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1}\| f\|^2_{\Pi_n(\rho)};$$

$$\| g_1(x+\varphi(x),\ y+t(x,y))\|_{\Pi_{n+m}\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)} C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1}\| g\|^2_{\Pi_{n+m}(\rho)}.$$

Увеличивая в случае необходимости значение α, можно считать, что

$$\|\varphi\|_{\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{\delta}{4}}\right)} \leqslant \rho\delta^{\alpha-\nu} \leqslant \rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\left(1-e^{-\frac{\delta}{4}}\right);$$

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\|_{\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{\delta}{2}}\right)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Для $z\in\Omega_n(\rho e^{-\delta})$ рассмотрим уравнение $z=x+\varphi(x)$. Полагая $x_0=0$, $x_q=z-\varphi(x_{q-1})$, из условия $x_{q-1}\in\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)$ находим $x_q\in\Omega_n(\rho e^{-\delta}+\rho\delta^{\alpha-\nu})\subset\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)$. Но тогда последовательность $\{x^q\}$ сходится, $\lim\limits_{q\to\infty} x_q = x\in\Omega_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)$ и $z=x+\varphi(x)$. Следовательно,

$$\| f_1\|_{\Pi_n(\rho e^{-\delta})} \leqslant \| f_1(x+\varphi(x))\|_{\Pi_n\left(\rho e^{-\frac{3}{4}\delta}\right)} \leqslant C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1}\| f\|^2_{\Pi_n(\rho)}.$$

Аналогично проверяется оценка

$$\| g_1\|_{\Pi_{n+m}(\rho e^{-\delta})} \leqslant 2C\rho^{-1}\delta^{-\nu-1}\| g\|^2_{\Pi_{n+m}(\rho)}.$$

Если выбрать α столь большим, что $2C\delta^{-\nu-1}<\delta^{-\alpha}$, из двух последних неравенств получим (37), (38). Лемма доказана.

Следуя [3], выберем последовательности чисел

$$\delta_0,\ \delta_1=\delta_0^{\frac{3}{2}},\ \ldots,\ \delta_s=\delta_{s-1}^{\frac{3}{2}},\ \ldots;$$

$$M_0=\delta_0^N,\ M_1=M_0^{\frac{3}{2}},\ \ldots,\ M_s=M_{s-1}^{\frac{3}{2}}=\delta_s^N,\ \ldots;$$

$$\rho_0,\ \rho_1=\rho_0 e^{-\delta_0},\ \ldots,\ \rho_s=\rho_{s-1}e^{-\delta_{s-1}}.$$

Число δ_0 зафиксируем столь малым, что $\rho_s\geqslant\frac{\rho_0}{2}$. В обозначениях леммы 4 положим $f_1=R[f]$, $g_1=R[f,g]$ и введем последовательности $f_0=f$, $g_0=g$, $f_{s+1}=R[f_s]$, $g_{s+1}=R[f_s,g_s]$. Предположим, что при некотором целом $s\geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\| f_s\|_{\Pi_n(\rho_s)} \leqslant \rho_s M_s=\rho_s\delta_s^N,\quad \| g_s\|_{\Pi_{n+m}(\rho_s)} \leqslant \rho_s M_s=\rho_s\delta_s^N. \tag{41}$$

Если число N выбрано столь большим, что $N>2\alpha+4$, то из (37) получим

$$\| f_{s+1}\|_{\Pi_n(\rho_{s+1})} \leqslant \rho_s^{-1}\delta_s^{-\alpha}\rho_s^2\delta_s^{2N}=\rho_s\delta_s^{2N-\alpha}\leqslant\rho_{s+1}\delta_{s+1}^N. \tag{42}$$

Аналогично $\| g_{s+1} \|_{\Pi_{n+m}(\rho_{s+1})} \leqslant \rho_{s+1}\delta_{s+1}^N$.

Для того чтобы выбрать ρ_0, заметим, что в соответствии с подготовительными результатами из § 2 имеем

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ g(0, 0) = 0,\ \frac{\partial g(0,0)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial g(0,0)}{\partial y} = 0,$$

откуда при достаточно малых значениях ρ следуют неравенства

$$\| f \|_{\Pi_n(\rho)} \leqslant K\rho^2,\ \| g \|_{\Pi_{n+m}(\rho)} \leqslant K\rho^2.$$

Поэтому, если принять $K\rho_0 < \delta_0^N$, то (41) будет выполняться при $s = 0$. Но тогда последовательности f_s и g_s сходятся к нулю соответственно в пространствах $\bar{A}\left(\Pi_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)\right)$ и $\bar{A}\left(\Pi_{n+m}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)\right)$.

В обозначениях леммы 4 положим $\varphi = U[f]$, $t = V[g]$ и рассмотрим последовательность отображений $\varphi_s = U[f_s]$, $t_s = V[g_s]$, $s = 0, 1, 2, \ldots$. В силу неравенств (36), (41) они удовлетворяют оценкам

$$\| \varphi_s \|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leqslant \rho_s\delta_s^{N-\nu},\quad \| t_s \|_{\Omega_{m+n}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leqslant \rho_s\delta_s^{N-\nu}.$$

Пусть $\Phi_s(x, y) = (x + \varphi_s(x),\ y + t_s(x, y))$, $s = 0, 1, 2, \ldots$. Рассмотрим суперпозицию $\Psi_s = \Phi_s \circ \Phi_{s-1} \circ \ldots \circ \Phi_1 \circ \Phi_0$. Полагая $\Psi_s(x, y) = (H_s(x),\ L_s(x, y))$, будем иметь

$$\Psi_{s+1}(x, y) = \Phi_{s+1} \circ \Psi_s(x, y) = (H_s(x) + \varphi_{s+1}(H_s(x));$$
$$L_s(x, y) + t_{s+1}(H_s(x),\ L_s(x, y))).$$

Таким образом,

$$H_{s+1}(x) - H(x) = \varphi_{s+1}(H_s(x)),\ s = 0, 1, 2, \ldots; \qquad (44)$$

$$L_{s+1}(x, y) - L_s(x, y) = t_{s+1}(H(x),\ L_s(x, y)),\ s = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (45)$$

Проверим, что при всех $s \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\| H_s(x) - x \|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leqslant \frac{\rho_0}{2}. \qquad (46)$$

Действительно, согласно определению $H_0(x) = x + \varphi_0(x)$. Поэтому

$$\| H_0(x) - x \|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leqslant \| \varphi_0 \|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leqslant \rho_0\delta_0^4,$$

а так как $\frac{\rho_0}{2} + \rho_0\delta_0^4 \leqslant \rho_1 e^{-\frac{\delta_1}{4}}$, то из (44) следует

$$\| H_1(x) - x \|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leqslant \rho_0\delta_0^4 + \rho_1\delta_1^4.$$

Вообще, если

$$\| H_s(x) - x \|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leqslant \sum_{q=0}^{s} \rho_q\delta_q^4,$$

то поскольку

$$\frac{\rho_0}{2} + \sum_{q=0}^{s} \rho_q \delta_q^4 < \rho_{s+1} e^{-\frac{s+1}{4}},$$

из (44) будет следовать

$$\| H_{s+1}(x) - x \|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} < \sum_{q=0}^{s+1} \rho_q \delta_q^4,$$

а тогда и (46). Возвращаясь к (46), заметим, что при $x \in \Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)$ значения вектор-функции $H_s(x)$ принадлежат множеству $\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right) \subset \subset \Omega_n\left(\rho_{s+1} e^{-\frac{\delta_{s+1}}{4}}\right)$. Это приводит к оценке

$$\| H_{s+1} - H_s \|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} < \rho_{s+1} \delta_{s+1}, \tag{47}$$

которая влечет сходимость последовательности отображений H_s в пространстве $\bar{A}\left(\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)\right)$. Для предельного отображения $H_\infty(x)$ имеем:

$$\| H_\infty(x) - x \|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} < \sum_{q=0}^{\infty} \rho_q \delta_q^4 < \rho_0 \sum_{q=0}^{\infty} \delta_q.$$

В силу неравенства Коши отсюда следует

$$\| H'_\infty - E \|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{4}\right)} < C \sum_{q=0}^{\infty} \delta_q,$$

где постоянная C за исит лишь от n и m. Уменьшая значение δ_0, можно добиться, чтобы $\| H'_\infty - E \|_{\Omega_n\left(\frac{\rho_0}{4}\right)} < \frac{1}{4}$. В этом случае $H_\infty(x)$ есть диффеоморфизм некоторой окрестности отрезка $[0, e_1] \subset \boldsymbol{R}^n$ на его образ.

Из (47) и неравенства Коши вытекает, что в некоторой окрестности точки $x = 0$ обратимы все отображения $H_s(x)$.

Перейдем к оценке последовательности $L_s(x, y)$. По определению $L_0(x, y) = y + t_0(x, y)$. Значит $\| L_0(x, y) - y \|_{\Omega_{m+n}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} < \rho_0 \delta_0^4$. Аналогично предыдущему проверяется, что при $x \in \Omega_n\left(\frac{\rho_0}{2}\right)$ и $y \in \Pi_m\left(\frac{\rho_0}{2}\right)$ будет $(H_s(x), L_s(x, y)) \in \Omega_{n+m}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)$ и

$$\| L_{s+1} - L_s \|_{\Omega_{n+m}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} < \sum_{k=0}^{s+1} \rho_q \delta_q^4.$$

Это влечет сходимость последовательности L_s и неравенство

$$\| L_\infty (x, y) - y \|_{\Omega_{n+m}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leqslant \rho_0 \sum_{q=0}^{\infty} \delta_q,$$

которое, в свою очередь, приводит к оценке

$$\left\| \frac{\partial L_\infty (x, y)}{\partial y} - E \right\|_{\Omega_{n+m}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)} \leqslant C \sum_{q=0}^{\infty} \delta_q.$$

Помимо существования пределов H_∞ и L_∞ предыдущие оценки устанавливают обратимость операторов $H_s(x)$ при x из малой окрестности отрезка $[0, l_1] \subset \boldsymbol{R}^n$ и операторов $L_s(x, y)$ при уже фиксированном x и малых $y \in \boldsymbol{R}^m$. Если теперь в равенстве $\Psi_s \circ G \circ \Psi_s^{-1}(x, y) = G_s(x, y)$ выполняющемся в некоторой окрестности точки (0, 0) произвести предельный переход, устремляя s к $+\infty$, получим

$$\Psi_\infty \circ G \circ \Psi_\infty^{-1}(x, y) = (e_1 + J_0 x, Jy),$$

что доказывает теорему.

Список литературы: 1. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М., 1979. 117 с. 2. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Динамические системы // Совр. проблемы математики. Фундамент. направления. 1985. 00. С. 5—36. *3. Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978. 195 с. 4. *Picard E.* Leçons sur quelgues équations fonctionelles. Paris, 1928. 230 p.

Поступила в редколлегию 13.05.89