УДК 517

Г. Р. БЕЛИЦКИЙ

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА НЕРАВЕНСТВА КАРЛЕМАНА

1. Известное неравенство Карлемана

$$\sum (a_1 \ldots a_n)^{1/n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (a_n \geqslant 0)$$

и некоторые его обобщения (см. [1], с. 402) приводят к следующей постановке.

Обозначим через S пространство всех вещественных последовательностей с обычной топологией. Пусть $u_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1, 0, \ldots)$, $k = 1, 2, \ldots$ — естественный базис пространства S, а $\{\theta_j\}$ — система линейных непрерывных функционалов, биортогональная к базису u_k: $\theta_j(u_k) = \delta_{jk}$, $j, k = 1, 2, \ldots$ Функционалы θ_j образуют базис Гамеля пространства S^* всех линейных непрерывных функционалов в S. Вектор $x \in S$ называется неотрицательным, если $\theta_j(x) \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Функционал $f \in S^*$ называется неотрицательным, если $f(u_k) \geqslant 0$ $(k=1, 2, \ldots)$. Конус S_+ всех неотрицательных последовательностей определяет структуру порядка в пространстве S, а конус S_+^* всех неотрицательных функционалов определяет структуру порядка в пространстве S^*.

Линейное многообразие $S_0 \subset S$ всех финитных последовательностей плотно в S. Векторы u_k образуют базис Гамеля пространства S_0. Пусть P, $Q: S_0 \to S$ — линейные операторы, определенные на многообразии S_0. Возникает вопрос об изучении множества $K(P, Q) \subset S^* \times S^*$ всех пар линейных функционалов f, $g \in S_+^*$, для которых справедливо неравенство

$$f(e^{Px}) \leqslant g(e^{Qx}) \quad (x \in S_0). \tag{1}$$

Здесь $e^y = (e^{y_1} \ldots e^{y_n} \ldots) \in S$; $y = (y_1 \ldots y_n \ldots) \in S$. Множество $K(P, Q)$ является замкнутым выпуклым конусом в пространстве $S^* \times S^*$. Пусть $\pi_1: S^* \times S^* \to S^*$ — проекция на первый сомножитель. Положим $K_1(P\ Q) = \pi_1(K(P, Q))$. Тогда $K_1(P, Q)$ — замкнутый выпуклый конус в пространстве S^*.

Пусть $h: Z \to R^1$ — линейный функционал, определенный на линейном многообразии $Z \subset S$. Положим $\rho_h(z) = \inf(h(x) + \alpha)$ $(z \in S)$, где нижняя грань берется по всем таким парам (x, α), $x \in Z$, $\alpha \in R'$, для которых $z \leqslant x + \alpha u_0$; $u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} u_j = (1, 1, \ldots)$. По определению, $\rho_h(z) = +\infty$, если не существует таких пар (x, α), $x \in Z$, $\alpha \in R^1$, что $z \leqslant x + \alpha u_0$. Тогда ρ_h — выпуклый функционал в пространстве S. Функционал h называется стохастическим, если *a)* $\rho_h(z) > -\infty$ $(z \in S)$; *b)* $\rho_h(x + \alpha u_0) = h(x) + \alpha$ $(x \in Z$, $\alpha \in R^1)$. В частности, линейный функционал $h: S \to R^1$ является стохастическим, если $h(u_0) = 1$; $h(x) \geqslant 0$ $(x \in S_+)$. Таким образом, стохастический функционал непрерывен. Стохастичность линейного функционала $h: Z \to R^1$ является необходимым и достаточным условием его продолжимости до стохастического функционала, определенного на всем пространстве. Однако такое продолжение не единственно.

Линейный оператор $T: Z \to S$, определенный на линейном многообразии $Z \subset S$ называется стохастическим, если все функционалы $h_k(x) = \theta_k(Tx)$ $(x \in Z)$, $k = 1, 2, \ldots$ — стохастические.

Допустим теперь, что некоторый базисный функционал θ_j ортогонален к линейному многообразию $P(\operatorname{Ker} Q) \subset S$. Тогда, если $x = Qy$ при некотором $y \in S_0$, то число $h_j(x) = \theta_j(Py)$ 2 зависит только от x. Таким образом, равенством (2) на линейном многообразии $\operatorname{Im} Q \subset S$ определен некоторый линейный функционал h_j.

Обозначим через $Z(P, Q) \subset S_+^*$ конус неотрицательных функционалов, натянутый на те базисные функционалы θ_j, которые ортогональны линейному многообразию $P(\operatorname{Ker} Q)$ и для которых функционал $h_j: \operatorname{Im} Q \to R^1$, определенный равенством (2), стохастичен.

Теорема 1. *Конус $K_1(P, Q)$ совпадает с конусом $Z(P, Q)$.* Таким образом, если для некоторого функционала $f \in S_+^*$, $f \neq 0$ найдется такой функционал $g \in S_+^*$, что справедливо неравенство (1), то f ортогонален к линейному многообразию $P(\operatorname{Ker} Q)$, а функционал

$$\gamma(x) = \frac{1}{f(u_0)} f(Py); \quad x = Qy; \quad y \in S_0$$

стохастичен. Однако может случиться, что функционалы f, обладающие перечисленными свойствами, существуют, в то время как $K_1(P, Q) = \{0\}$ (т. е. не существует ни одного базисного функционала θ_j с нужными свойствами).

Если $\operatorname{Ker} Q \subset \operatorname{Ker} P$, то $P(\operatorname{Ker} Q) = \{0\}$ и для каждого $x \in Qy \in \in \operatorname{Im} Q$ вектор $Tx = Py \in S$ 3 зависит только от x. Равенством (3) определен линейный оператор

$$T = T(P, Q) : \operatorname{Im} Q \to S.$$

Следствие 1. *Конус $K_1(P, Q)$ совпадает с конусом S_+^* всех неотрицательных линейных функционалов в том и только том случае, если справедливо включение $\operatorname{Ker} Q \subset \operatorname{Ker} P$, а оператор $T(P, Q)$ стохастичен.*

Следствие 2. *Пусть $P, Q : S \to S$, а оператор Q обратим. Тогда конус $K_1(P, Q)$ совпадает с конусом S_+^* всех неотрицательных функционалов в том и только том случае, если оператор PQ^{-1} стохастичен.*

Это утверждение доказано в [2] для треугольных операторов P и Q. Для описания множества «допустимых» в неравенстве (1) функционалов g сделаем некоторые дополнительные построения.

Координатным ядром функционала $\varphi \in S^*$ назовем линейное подпространство в S, порожденное теми базисными векторами u_k, для которых $\varphi(u_k) = 0$. Пусть φ, $\psi \in S_+^*$ — неотрицательные функционалы с одинаковыми координатными ядрами. Положим

$$v(\varphi, \psi) = \left(\ln \frac{\varphi(u_1)}{\psi(u_1)}, \ \ldots, \ \ln \frac{\varphi(u_n)}{\psi(u_n)}, \ \ldots\right) \in S,$$

считая $\ln \dfrac{\varphi(u_k)}{\psi(u_k)} = 0$, если $\varphi(u_k) = \psi(u_k) = 0$.

Пусть $H : S \to S$ — линейный непрерывный оператор. Обозначим через $M(P, Q, H) \in S_+^*$ конус неотрицательных функционалов, натянутый на те базисные функционалы θ_j, которые обладают следующими свойствами: a) функционал θ_j ортогонален к линейному многообразию $P(\operatorname{Ker} Q)$; b) функционал $H^*\theta_j$ — неотрицателен; c) существует такое стохастическое продолжение $\bar{h}_j$ функционала h_j, определенного равенством (2), что координатные ядра функционалов h_j и $H^*\theta_j$ одинаковы, а вектор $v(H^*\theta_j; \bar{h}_j)$ ортогонален к функционалу $\bar{h}_j$.

Очевидно, $M(P, Q, H) \subset Z(P, Q)$. Существует такой непрерывный линейный оператор $T: S \to S$, что $M(P, Q, T) = Z(P, Q)$. В самом деле, пусть θ_j — те базисные функционалы, которые порождают конус $Z(P, Q)$, а $\bar{h}_j$ — какие-нибудь продолжения функционалов h_j до стохастических. Существует (не единственный, если $Z(P, Q) \neq S_+^*$) непрерывный линейный оператор $T: S \to S$, для которого $\bar{h}_j = T^*\theta_j$ ($\theta_j \in Z(P, Q)$). Тогда $v(T^*\theta_j, \bar{h}_j) = 0$, поэтому $M(P, Q, T) = Z(P, Q)$.

Теорема 2. *Пусть $f \in M(P, Q, H)$ и $H^*f < g$ (в смысле отношения порядка, определяемого конусом S_+^*). Тогда имеет место неравенство $f(e^{Px}) \leqslant g(e^{Px})$ $(x \in S_0)$, так что пара (f, g) принадлежит конусу $K(P, Q)$.*

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать включение

$$K_1(P, Q) \subset Z(P, Q), \tag{4}$$

так как обратное включение вытекает из теоремы 2. Итак, пусть справедливо неравенство (1) и $f_j = f(u_j) \neq 0$ при некотором j. Тогда

$$f_j e^{\theta_j(Px)} \leqslant f(e^{Px}) \leqslant g(e^{\theta x}) \quad (x \in S_0). \tag{5}$$

Пусть теперь $x \in \operatorname{Ker} Q$. Тогда

$$f_j e^{\theta_j(Px)} \leqslant g(u_0).$$

Заменим здесь x на $\lambda x \in \operatorname{Ker} Q$ и получим $f_j e^{\lambda\theta_j(Px)} \leqslant g(u_0)$ при любом вещественном λ. Следовательно, $\theta_j(P) = 0$. Отсюда вытекает, что функционал f является линейной комбинацией (с неотрицательными коэффициентами) тех базисных функционалов θ_j, которые ортогональны к линейному многообразию $P(\operatorname{Ker} Q)$.

Докажем теперь, что функционал h_j стохастичен. Положив $y = Qx$, перепишем неравенство (5) в виде

$$e^{h_j(y)} \leqslant \bar{g}(e^y) \quad (y \in \operatorname{Im} Q), \tag{6}$$

где $\bar{g} = \frac{1}{f_j} g$. Следовательно, $h_j(y) \leqslant \ln \bar{g}(e^y)$ $(y \in \operatorname{Im} Q)$.

В этом неравенстве справа стоит непрерывный выпуклый функционал, определенный на всем пространстве S. Поэтому функционал h_j продолжается до непрерывного функционала, определенного на всем пространстве S с сохранением неравенства (6). Для доказательства включения (4) нам остается установить теперь, что каждый непрерывный функционал $h \in S^*$, удовлетворяющий неравенству

$$e^{h(x)} \leqslant \bar{g}(e^x) \quad (x \in S), \tag{7}$$

при некотором $\bar{g} \in S_+^*$ стохастичен. Положим в этом неравенстве $x = \lambda u_k$. Тогда

$$e^{hx} = e^{\lambda h(u_k)} \leqslant e^{\lambda} \bar{g}(u_k) + g(u_0 - u_k).$$

Следовательно, $0 \leqslant h(u_k) \leqslant 1$. Подставляя в неравенство (7) $x = \lambda u_0$, получаем $e^{\lambda h(u_0)} \leqslant e^{\lambda} \bar{g}(u_0)$ $(\lambda \in R^1)$. Отсюда $h(u_0) = 1$, т. е. h — стохастический функционал. Включение (4) доказано.

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать неравенство $\theta_l(e^{Px}) \leqslant \theta_j(He^{Qx})$ $(x \in S_0)$ для базисного функционала $\Theta_j \in M(P, Q, H)$. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать неравенство

$$e^{h_j(x)} \leqslant \theta_j(He^x) \quad (x \in \operatorname{Im} Q), \tag{8}$$

где h_j — функционал, определенный на линейном многообразии $\operatorname{Im} Q$ равенством (2). Пусть $\bar{h}$ — такое стохастическое продолжение функционала $\bar{h}_j$, для которого выполнено условие «с».

В силу стохастичности функционала $\bar{h}$ и неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим для любого $y \in S$ имеем

$$e^{\bar{h}(x)} = e^{\bar{h}(x+y) - \bar{h}(y)} \leqslant e^{-\bar{h}(y)} \bar{h}(e^{x+y}).$$

Если вектор y пробегает все пространство S, то вектор $z = y - \bar{h}(y) u_0$ пробегает ортогональное дополнение к функционалу $\bar{h}$. В силу условия «с» вектор $v(H^*\Theta_j \bar{h})$ ортогонален к функционалу $\bar{h}$. Поэтому найдется такое $y \in S$, что вектор $z = y - \bar{h}(y) u_0$ удовлетворяет системе уравнений

$$\bar{h}(e^{\Theta_k(z)} u_k) = \theta_j(Hu_k), \ k = 1, 2, \ldots$$

Для этого вектора y получаем равенство

$$e^{-\bar{h}(y)} \bar{h}(e^{x+y}) = (H^+\theta_j)(e^x) \ (x \in S).$$

Следовательно,

$$e^{\bar{h}(x)} \leqslant (H^*\theta_j)(e^x) \ (x \in S).$$

Теорема 2 доказана. Мы использовали здесь метод Полиа доказательства неравенства Карлемана.

2. Специализируя в теореме 2 функционал f и оператор H, можно получать конкретные неравенства. Так, например, для получения неравенства Карлемана следует взять в качестве Θ единичный оператор, в качестве P — оператор, действующий по формуле

$$\theta_k = (Px) \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \theta_j(x), \ k = 1, 2, \ldots$$

в качестве H — оператор, действующий по формуле

$$\Theta_k(Hx) = \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{k} c_j \Theta_j(x), \; c_j = \frac{(j+1)^j}{j^{j-1}}, \; k = 1, 2, \ldots$$

и, наконец, выбрать функционал f_n равным

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j(x), \; n = 1, 2, \ldots$$

Тогда, в силу теоремы 2, справедливо неравенство

$$f_n(e^{Px}) \leqslant (H^* f_n)(e^x) < e f_n(x), \; n = 1, 2, \ldots$$

$$\text{или} \; \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}\sum_{1}^{k} x_j} < e \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}.$$

Полагая здесь $a_k = e^{x_k}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 \ldots a_k)^{1/k} \leqslant e \sum_{k=1}^{n} a_k \;\; (a_k \geqslant 0)$$

при $n = 1, 2, \ldots$, т. е. неравенство Карлемана. Ряд других примеров указан в работе [2].

Список литературы: 1. *Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г.* Неравенства.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948, с. 15.
2. *Белицкий Г. Р.* О некоторых неравенствах.— Укр. мат. журнал, 1965, № 6, с. 110—114.

Поступила в редколлегию 18.01.82.