УДК 517.9

Т. В. МИСЮРА

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ВЕЙЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА

В спектральном анализе дифференциальных операторов и его приложениях важное место занимает исследование поведения решений Вейля соответствующих уравнений, когда спектральный параметр стремится к бесконечности.

Точная асимптотическая формула для решений Вейля широкого класса уравнений Штурма—Лиувилля получена в работе [1]. Решающее значение при доказательстве этой формулы имело условие полуограниченности соответствующих операторов Штурма—Лиувилля.

В настоящей работе аналогичная формула получена для решений Вейля уравнений Дирака.

Заметим, что операторы Дирака не могут быть полуограниченными и наш метод доказательства существенно отличается от метода работы [1].

1. Рассмотрим дифференциальную операцию Дирака:

$$D = B\frac{d}{dx} + \Omega(x), \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ -\infty < x < \infty \tag{1}$$

с вещественной непрерывно дифференцируемой потенциальной матрицей

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix} \tag{1'}$$

и обозначим через

$$\mathrm{E}(z, x) = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{11}(z, x) & \mathrm{E}_{12}(z, x) \\ \mathrm{E}_{21}(z, x) & \mathrm{E}_{22}(z, x) \end{pmatrix}, \ \mathrm{E}(z, 0) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

фундаментальное решение уравнения

$$D(y(z, x)) = zy(z, x). \tag{2}$$

Общее векторное решение этого уравнения представимо в виде $\mathrm{E}(z, x)C$, где C — произвольная постоянная столбцевая матрица.

Условимся обозначать через $\vec{L}_2(a, b)$ гильбертово пространство вектор-функций $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, т. е. столбцевых матричных функций со скалярным произведением:

$$(f, g) = \int_a^b g^*(x) f(x)\, dx = \int_a^b \{\overline{g_1(x)} f_1(x) + \overline{g_2(x)} f_2(x)\}\, dx.$$

Согласно классической теореме Вейля существуют такие голоморфные вне вещественной оси функции $m^{\pm}(z)$, что решения

$$\psi^{\pm}(z, x) = \mathrm{E}(z, x)\begin{pmatrix} m^{\pm}(z) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{11}(z, x)\, m^{\pm}(z) + \mathrm{E}_{12}(z, x) \\ \mathrm{E}_{21}(z, x)\, m^{\pm}(z) + \mathrm{E}_{22}(z, x) \end{pmatrix} \tag{3}$$

уравнения (2) соответственно принадлежат пространствам $\vec{L}_2(0, \infty)$ и $\vec{L}_2(-\infty, 0)$:

$$\psi^+(z, x) \in \vec{L}_2(0, \infty), \quad \psi^-(z, x) \in \vec{L}_2(-\infty, 0).$$

Функцию $m(z)$ и решение $\psi(z, x)$, определяемые равенствами

$$m(z) = \begin{cases} m^+(z) \\ m^-(z) \end{cases}, \quad \psi(z, x) = \begin{cases} \psi^+(z, x) & \operatorname{Im} z > 0, \\ \psi^-(z, x) & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \tag{4}$$

будем называть функцией и решением Вейля уравнения (2). Таким образом, решение Вейля $\psi(z, x) = \begin{pmatrix} \psi_1(z, x) \\ \psi_2(z, x) \end{pmatrix}$ удовлетворяет начальному условию $\psi_2(z, 0) = 1$, принадлежит пространству $\vec{L}_2(0, \infty)$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и пространству $\vec{L}_2(-\infty, 0)$ при $\operatorname{Im} z < 0$. Так как для уравнения (2) всегда имеет место случай предельной точки [2], то этими свойствами решение Вейля однозначно определено, и любое решение $\Phi(z, x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(z, x) \\ \Phi_2(z, x) \end{pmatrix}$ уравнения (2), принадлежащее пространству $\vec{L}_2(0, \infty)$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и пространству $\vec{L}_2(-\infty, 0)$ при $\operatorname{Im} z < 0$, представимо в виде

$$\Phi(z, x) = \Phi_2(z, 0)\, \psi(z, x), \tag{5}$$

откуда, в частности, следует, что

$$m(z) = \frac{\Phi_1(z, 0)}{\Phi_2(z, 0)}. \tag{5'}$$

В простейшем случае, когда $\Omega(x) \equiv 0$, функция $m_0(z)$ и решение $\psi_0(z, x)$ Вейля равны:

$$m_0(z) = i; \quad \psi_0(z, x) = e^{izx}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Абсолютной величиной $|A|$ матрицы $A=(a_{ik})$ (вообще говоря, прямоугольной) будем называть неотрицательное число

$$|A|=\max_i\left(\sum_k |a_{ik}|\right).$$

Заметим, что она обладает всеми свойствами нормы.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме:

Теорема. *Пусть в уравнении* (2) *потенциальная матрица* $\Omega(x)$ *дифференцируема и ее производная* $\Omega'(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\Omega'(x)|\leqslant \exp(C_1+C_2|x|), \tag{6}$$

где C_1 *и* C_2 — *некоторые неотрицательные числа.*

Тогда для решения Вейля $\psi(z, x)$ *этого уравнения при всех* $\varepsilon>0$, $A>0$ *выполняется асимптотическое равенство*

$$\lim_{|z|\to\infty}\sup_{|x|<A}|e^{-izx}(\psi(z, x)-\psi_0(z, x))|=0,\ |\operatorname{Im} z|>\varepsilon, \tag{7}$$

где $\psi_0(z,\ x)=e^{izx}\begin{pmatrix} i\\ 1\end{pmatrix}$.

Так как $\psi(-z, -x)$ является решением Вейля уравнения

$$B\frac{d}{dx}\psi(-z, -x)-\Omega(-x)\psi(-z,\ -x)=z\psi(-z,\ -x),$$

в котором потенциальная матрица $-\Omega(-x)$ тоже удовлетворяет условиям теоремы, то можно без ограничения общности рассматривать только z, лежащие в верхней полуплоскости.

Далее, фундаментальная матрица $\mathrm{E}(z, x)$ уравнения (2) удовлетворяет также уравнению

$$-\frac{d^2}{dx^2}Y(z, x)+V(x)Y(z, x)=z^2Y(z, x), \tag{8}$$

где $V(x)=B\Omega'(x)+\Omega^2(x)$, и начальным условиям $\mathrm{E}(z, 0)=I$, $\mathrm{E}'(z, 0)=B\Omega(0)-zB$. Следовательно,

$$\mathrm{E}(z, x)=C(z, x)-zS(z, x)B+S(z, x)B\Omega(0), \tag{9}$$

где $C(z, x)$, $S(z, x)$ — решения уравнения (8) при начальных данных $C(z, 0)=S'(z, 0)=I$; $C'(z, 0)=S(z, 0)=0$.

Из уравнения

$$C(z, x)=\cos zx\cdot I+\int_0^x\frac{\sin z(x-t)}{z}V(t)C(z, t)\,dt,$$

которому удовлетворяет $C(z, x)$, и аналогичного уравнения для $S(z, x)$ следует, что в области $|z|>2P(x)$, где $P(x)=\left|\int_0^x|V(t)|\,dt\right|$, выполняются неравенства

$$|C(z, x)|\leqslant 2e^{|\operatorname{Im} zx|},\quad |zS(z, x)|\leqslant 2e^{|\operatorname{Im} zx|},$$

$$|C(z, x)-\cos zx\cdot I|\leqslant\frac{2P(x)}{|z|}e^{|\operatorname{Im} zx|}, \tag{10}$$

$$|zS(z, x)-\sin zx\cdot I|\leqslant\frac{2P(x)}{|z|}e^{|\operatorname{Im} zx|},$$

из которых согласно (9), (3) и (4) следует, что

$$|e^{-izx}(\psi(z, x)-\psi_0(z, x))| \leqslant \left(|m(z)-i| + \frac{2|\Omega(0)|}{|z|} + \right.$$
$$\left. + \frac{1+|m(z)|}{|z|} \cdot 4P(x)\right) e^{|\operatorname{Im} zx| + \operatorname{Im} zx}.$$

Поэтому, если $\operatorname{Im} z > 0$ и $|z| > 2\max\{P(A), P(-A)\}$, то

$$\sup_{-A<x<0} |e^{-izx}(\psi(z, x)-\psi_0(z, x))| \leqslant |m(z)-i| +$$
$$+ |z^{-1}|\{2|\Omega(0)| + 4(1+|m(z)|)P(-A)\}$$

и

$$\sup_{0<x<A} |e^{-izx}(\psi(z, x)-\psi_0(z, x))| \leqslant \{|m(z)-i| +$$
$$+ |z^{-1}|[2|\Omega(0)| + 4(1+|m(z)|)P(A)]\} e^{2A \operatorname{Im} z}.$$

Эти неравенства показывают, что для доказательства теоре[...] достаточно доказать справедливость следующих двух равенств:

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im} z \geqslant \varepsilon}} m(z) = i; \qquad (\ldots$$

$$\lim_{\Lambda\to+\infty} \sup_{\operatorname{Im} z \geqslant \Lambda} \left(\sup_{0<x\leqslant A} |e^{-izx}(\psi(z, x)-\psi_0(z, x))| \right) = 0. \qquad (\ldots$$

2. Дифференциальная операция (1) порождает в пространс[...] $\vec{L}_2(0, l)$ $(l<\infty)$ и $\vec{L}_2(0, \infty)$ самосопряженные операторы $D_1 = D$[...] $D_2 = D_2(l)$ и $D_3 = D(\infty)$, области определения которых сос[...] из вектор-функций $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условиям:

$$D(y(x)) \in \vec{L}_2(0, l), \ \ y_2(0) = y_1(l) = 0 \ \text{ для } \ D_1;$$
$$D(y(x)) \in \vec{L}_2(0, l), \ \ y_2(0) = y_2(l) = 0 \ \text{ для } \ D_2;$$
$$D(y(x)) \in \vec{L}_2(0, \infty), \ \ y_2(0) = 0 \qquad \text{ для } \ D_3.$$

Формулы разложения по собственным вектор-функциям этих оп[...] раторов и связанные с ними равенства Парсеваля имеют такой ви[...]

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, x)\, \omega(\lambda, f)\, d\rho_i(\lambda); \qquad (1\ldots$$

$$\int_0^{\infty} g^*(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\omega(\lambda, g)}\, \omega(\lambda, f)\, d\rho_i(\lambda), \qquad (13\ldots$$

где $i = 1, 2, 3$;

$$\omega(z, x) = \mathrm{E}(z, x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{11}(z, x) \\ \mathrm{E}_{21}(z, x) \end{pmatrix};$$

$$\omega(z, f) = \int_0^{\infty} \omega^T(z, x) f(x)\, dx;$$

неубывающие функции $\rho_1(\lambda) = \rho_1(\lambda, l)$, $\rho_2(\lambda) = \rho_2(\lambda, l)$, $\rho_3(\lambda) = \rho(\lambda, \infty)$ называются спектральными функциями операторов D[...] D_2, D_3, и через A^T обозначены матрицы, транспонированные матр[...] цам A.

Спектральная функция $\rho(\lambda, \infty)$ удовлетворяет асимптотическому равенству (см. [3]):

$$\rho(\lambda, \infty) = \frac{1}{\pi}\{\lambda - p(0)\ln|\lambda|\} - \frac{\lambda}{2|\lambda|}r(0) + \varepsilon(\lambda), \tag{14}$$

где $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \varepsilon(\lambda) = 0$, и связана с функцией Вейля $m(z) = m^+(z)$ формулами

$$m(z) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{d\rho(\lambda, \infty)}{\lambda - z}; \tag{14'}$$

$$\rho(\lambda_2, \infty) - \rho(\lambda_1, \infty) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{Im} m(t + i\varepsilon)\,dt. \tag{14''}$$

Из равенств (14), (14′), повторяя ход доказательства леммы 1 работы [1], выводим справедливость равенства (11).

3. Обозначим через $W_2(\sigma)$ множество всех целых функций $\varphi(z)$ экспоненциального типа $\leqslant\sigma$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\,dx < \infty.$$

Согласно теореме Винера—Пэли это множество совпадает с множеством всех функций, представимых в виде $f(z) = \int_0^\sigma (\cos zt\cdot g_1(t) + \sin zt\cdot g_2(t))\,dt$, где $g_k(t)\in L_2(0, \sigma)$ $(k = 1, 2)$.

Лемма 1. *Множество обобщенных преобразований Фурье*

$$\omega(z, f) = \int_0^\sigma \omega^T(z, y)\,f(y)\,dy$$

всех вектор-функций $f(y)\in\vec{L}_2(0, \sigma)$ *совпадает с множеством* $W_2(\sigma)$.

Доказательство. Решение $\omega(z, x)$ уравнения (2) выражается через решение

$$\omega_0(z, x) = \begin{pmatrix}\cos zx\\ \sin zx\end{pmatrix}$$

простейшего уравнения с нулевой потенциальной матрицей с помощью операторов преобразования

$$\omega(z, x) = \omega_0(z, x) + \int_0^x K(x, t)\,\omega_0(z, t)\,dt,$$

откуда следует, что для вектор-функций $f(x)\in\vec{L}_2(0, \sigma)$ выполняются равенства $\omega(z, f) = \omega(z, \tilde{f})$, где

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \int_x^\sigma K^T(t, x)\,f(t)\,dt.$$

Так как эта формула определяет взаимно однозначное отображение $\tilde{f}(x) \to f(x)$ пространства $\vec{L}_2(0, \sigma)$ на себя, то множество обобщенных преобразований Фурье $\omega(z, f)$ совпадает с множеством функций вида

$$\omega_0(z, \tilde{f}) = \int_0^\sigma \{\cos zx \cdot \tilde{f}_1(x) + \sin zx \cdot \tilde{f}_2(x)\} dx,$$

где $\tilde{f}_1(x)$ и $\tilde{f}_2(x)$ — произвольные функции из $L_2(0, \sigma)$, т. е. с множеством $W_2(\sigma)$.

Следствие. *Если у двух операций Дирака D, $\tilde{D}$ потенциальные матрицы $\Omega(x)$, $\tilde{\Omega}(x)$ совпадают на интервале $(0, \sigma)$ и $l \geqslant \sigma$, $\tilde{l} \geqslant \sigma$, то для всех функций $\varphi_k(z) \in W_2(\sigma)$ $(k = 1, 2)$ равенства*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_1(\lambda)}\, \varphi_2(\lambda)\, d\rho_i(\lambda, l) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_1(\lambda)}\, \varphi_2(\lambda)\, d\tilde{\rho}_j(\lambda, \tilde{l})$$

выполняются при всех $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3$.

Действительно, из равенства $\Omega(x) = \tilde{\Omega}(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \sigma)$ следует, что $\omega(z, x) = \tilde{\omega}(z, x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \sigma)$, а значит, и $\omega(z, f) = \tilde{\omega}(z, f)$ для всех вектор-функций $f(x) \in \vec{L}_2(0, \infty)$, равных нулю при $x > \sigma$. Отсюда и из равенств Парсеваля (13′) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\omega(\lambda, g)}\, \omega(\lambda, f)\, d\rho_i(\lambda, l) = \int_0^\sigma g^*(x) f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{\omega}(\lambda, g)}\, \tilde{\omega}(\lambda, f)\, d\tilde{\rho}_j(\lambda, \tilde{l}) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\omega(\lambda, g)}\, \omega(\lambda, f)\, d\tilde{\rho}_j(\lambda, \tilde{l})$$

при всех $g(x)$, $f(x) \in \vec{L}_2(0, \sigma)$ и всех $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$, причем, согласно лемме 1, в качестве $\omega(\lambda, g)$, $\omega(\lambda, f)$ можно взять любые функции из множества $W_2(\sigma)$.

Лемма 2. *В верхней полуплоскости* $(\operatorname{Im} z > 0)$ *компоненты $\psi_k(z, x)$ $(k = 1, 2)$ решения Вейля $\psi(z, x) = \begin{pmatrix} \psi_1(z, x) \\ \psi_2(z, x) \end{pmatrix}$ при всех $x > 0$ представляются в виде*

$$\psi_k(z, x) = \frac{E_{k1}(z, x)}{\varphi(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z} d\{\rho(\lambda, \infty) - \rho_k(\lambda, x)\}, \tag{15}$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция из множества $W_2(x)$.

Доказательство. Резольвентами операторов $D_1(l)$, $D_2(l)$, $D(\infty)$ являются операторы $(D_i - zI)^{-1}$, которые на любую вектор-функцию $f(x) \in \vec{L}_2(0, \infty)$, равную нулю при $x > l$, действуют как интегральные операторы $(D_i - zI)^{-1} f(x) = \int_0^\infty R_i(z;\, x,\, y) f(y)\, dy$ $(i = 1, 2, 3)$ с ядрами

$$R_i(z;\, x,\, y) = \begin{cases} \omega(z, x)\, \psi_i^T(z, y) & 0 \leqslant x \leqslant y \\ \psi_i(z, x)\, \omega^T(z, y) & 0 \leqslant y \leqslant x, \end{cases}$$

где

$$\psi_i(z,\ x) = \mathrm{E}(z,\ x)\begin{pmatrix} m_i(z) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{11}(z,\ x)\, m_i(z) + \mathrm{E}_{12}(z,\ x) \\ \mathrm{E}_{21}(z,\ x)\, m_i(z) + \mathrm{E}_{22}(z,\ x) \end{pmatrix};$$

$$m_1(z) = -\frac{\mathrm{E}_{12}(z, l)}{\mathrm{E}_{11}(z, l)}, \quad m_2(z) = -\frac{\mathrm{E}_{22}(z, l)}{\mathrm{E}_{21}(z, l)}; \tag{16}$$

$$m_3(z) = m(z) = m^+(z).$$

С другой стороны, из формул разложения (13) следует, что

$$(D_i - zI)^{-1} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\lambda, x)\, \omega(\lambda, f)}{\lambda - z}\, d\rho_i(\lambda).$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} R_i(z;\ x,\ y)\, f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\lambda,\ x)\, \omega(\lambda, f)}{\lambda - z}\, d\rho_i(\lambda),$$

откуда при $x = 0$ следует, что

$$\int_0^{l} \psi_i^T(z,\ y)\, f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\lambda, f)}{\lambda - z}\, d\rho_i(\lambda),$$

какова бы ни была вектор-функция $f(x) \in \vec{L}_2(0,\ \infty)$, равная нулю при $x > l$. Так как

$$\int_0^{l} \psi_i^T(z,\ y)\, f(y)\, dy = m_i(z)\int_0^{l} \{\mathrm{E}_{11}(z,\ y)\, f_1(y) +$$

$$+ \mathrm{E}_{21}(z,\ y)\, f_2(y)\}\, dy + \int_0^{l} \{\mathrm{E}_{12}(z,\ y)\, f_1(y) + \mathrm{E}_{22}(z,\ y)\, f_2(y)\}\, dy =$$

$$= m_i(z)\, \omega(z,\ f) + \nu(z,\ f),$$

где
$$\nu(z,\ f) = \int_0^{l} \{\mathrm{E}_{12}(z,\ y)\, f_1(y) + \mathrm{E}_{22}(z,\ y)\, f_2(y)\}\, dy,$$

то
$$(m(z) - m_i(z))\, \omega(z, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\lambda, f)}{\lambda - z}\, d\{\rho(\lambda,\ \infty) - \rho_k(\lambda,\ l)\}$$

и согласно (16), (3), (4)

$$\psi_k(z,\ l) = \frac{\mathrm{E}_{k1}(z, l)}{\omega(z, f)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\lambda, f)}{\lambda - z}\, d\{\rho(\lambda,\ \infty) - \rho_k(\lambda,\ l)\},$$

причем в силу леммы 1 и произвольности $f(x) \in \vec{L}_2(0,\ l)$ в качестве $\omega(z,\ f)$ можно взять произвольную функцию $\varphi \in W_2(l)$. Полагая здесь $l = x$, получаем формулы (15).

Следствие. *Если у операций Дирака D, $\tilde{D}$ потенциальные матрицы $\Omega(x)$, $\tilde{\Omega}(x)$ совпадают на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \sigma$ и $\operatorname{Im} z > 0$, то на отрезке $2\alpha \leqslant x \leqslant \sigma$ соответствующие решения Вейля $\psi(z,\ x)$, $\tilde{\psi}(z,\ x)$ удовлетворяют равенствам*

$$\psi(z, x)-\tilde{\psi}(z, x)=i\omega(z, x)\left(\frac{z\alpha}{\sin z\alpha}\right)^2\int_0^\infty e^{izt}\times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t}d\left(\rho(\lambda, \infty)-\tilde{\rho}(\lambda, \infty)\right)\right\}dt, \tag{17}$$

где $\rho(\lambda, \infty)$, $\tilde{\rho}(\lambda, \infty)$ — *спектральные функции операторов;* $D_3 = D_3(\infty)$; $\tilde{D}_3 = \tilde{D}(\infty)$.

Действительно, если $\Omega(x)=\tilde{\Omega}(x)$ при $x\in[0, \sigma]$, то $\mathrm{E}(z, x) = \tilde{\mathrm{E}}(z, x)$, а значит, и $\rho_j(\lambda, x)=\tilde{\rho}_j(\lambda, x)$ $(j=1, 2)$ при $x\in[0, \sigma]$, откуда согласно (15) следует, что при $x\in(0, \sigma]$

$$\psi_k(z, x)-\tilde{\psi}_k(z, x)=\frac{\mathrm{E}_{k1}(z, x)}{\varphi(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda-z}d\left(\rho(\lambda, \infty)-\rho_k(\lambda, x)\right)-$$

$$-\frac{\tilde{\mathrm{E}}_{k1}(z, x)}{\varphi(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda-z}d\left(\tilde{\rho}(\lambda, \infty)-\tilde{\rho}_k(\lambda, x)\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{E}_{k1}(z, x)}{\varphi(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda-z}d\left(\rho(\lambda, \infty)-\tilde{\rho}(\lambda, \infty)\right), \quad (k=1, 2)$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция из множества $W_2(x)$.

Отсюда следует, что

$$\psi(z, x)-\tilde{\psi}(z, x)=\frac{\omega(z, x)}{\varphi(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda-z}d\left(\rho(\lambda, \infty)-\tilde{\rho}(\lambda, \infty)\right). \tag{18}$$

Заметим теперь, что если $\lambda\in(-\infty, \infty)$ и $\mathrm{Im}\, z>0$, то

$$(\lambda-z)^{-1}=i\int_0^\infty e^{i(z-\lambda)t}dt$$

и, значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda-z}d\rho(\lambda, \infty)=i\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^\infty\varphi(\lambda)e^{i(z-\lambda)t}dt\right\}d\rho(\lambda, \infty)=$$

$$=i\int_0^\infty e^{izt}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)e^{-i\lambda t}d\rho(\lambda, \infty)\right\}dt, \tag{19}$$

при условии, что функция $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda)|\,d\rho(\lambda, \infty)<\infty,$$

гарантирующему законность произведенной перемены порядка интегрирования. Это условие заведомо выполняется для функций

$$\varphi(z)=\left(\frac{\sin z\alpha}{z\alpha}\right)^2\in W_2(2\alpha),$$

откуда согласно (18), (19) следуют доказываемые равенства (17).

4. Рассмотрим операцию Дирака (1) с финитной потенциальной матрицей: $\Omega(x)=0$ при $|x|\geqslant L$. Очевидно, в этом случае вектор-функция $\psi_0(z, x)=e^{izx}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ при $x>L$ удовлетворяет уравнению (2) и принадлежит пространству $\vec{L}_2(0, \infty)$, если $\operatorname{Im} z>0$.

Обозначим через $\Phi(z, x)$ то решение уравнения (2), которое совпадает с $\psi_0(z, x)$ при $L>x$. Ясно, что при $\operatorname{Im} z>0$ решение $\Phi(z, x)$ принадлежит пространству $\vec{L}_2(0, \infty)$, откуда следует, что функция и решения Вейля уравнения (2) выражаются через $\Phi(z, x)$ по формулам (5), (5′). Так как вектор-функция $\Phi(z, x)$ удовлетворяет также уравнению (8) с финитным потенциалом (8′) и при $x\in(L, \infty)$ совпадает с $\psi_0(z, x)$, то она находится из такого интегрального уравнения:

$$\Phi(z, x)=\psi_0(z, x)+\int_x^\infty \frac{\sin z(x-t)}{z} V(t)\,\Phi(z, t)\,dt. \tag{20}$$

Лемма 3. *В замкнутой верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ *при всех* $x\in[0, \infty)$ *выполняются неравенства*

$$|e^{-izx}(\Phi(z, x)-\psi_0(z, x))|\leqslant \frac{1}{|z|}Q(x)\exp\left\{\frac{Q(x)}{|z|}\right\}; \tag{21}$$

$$\left|e^{-izx}\left\{\Phi(z, x)-\psi_0(z, x)-e^{izx}\int_x^\infty \frac{1-e^{2iz(t-x)}}{2iz} V(t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} dt\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left\{\frac{Q(x)}{|z|}\right\}^2 \exp\left\{\frac{Q(x)}{|z|}\right\}, \tag{21′}$$

где $Q(x)=\int_x^\infty |V(t)|\,dt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (20) следует, что вектор-функция $y(z, x)=e^{-izx}\Phi(z, x)$ удовлетворяет уравнению

$$y(z, x)=\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}+\int_x^\infty \frac{1-e^{2iz(t-x)}}{2iz} V(t)\,y(z, t)\,dt. \tag{20′}$$

Поэтому в замкнутой верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ выполняется неравенство $|y(z, x)|\leqslant 1+\int_x^\infty |z|^{-1}|V(t)|\,|y(z, t)|\,dt$, показывающее, что функция $|y(z, x)|$ мажорируется решением уравнения $y(x)=1+\int_x^\infty |z|^{-1}|V(t)|\,y(t)\,dt$, т. е. функцией $y(x)=\exp\left\{|z|^{-1}\int_x^\infty |V(t)|\,dt\right\}$:

$$|y(z, x)|\leqslant \exp\left\{|z|^{-1}\int_x^\infty |V(t)|\,dt\right\}=\exp\{|z|^{-1}Q(x)\}.$$

Из этой оценки, уравнения (20′) и его первой итерации вытекают неравенства

$$\left| y(z, x) - \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right| \leqslant \int_x^\infty |z|^{-1} |V(t)|\, |y(z, t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^\infty |z|^{-1} |V(t)| \exp\left\{ |z|^{-1} \int_t^\infty |V(\xi)|\, d\xi \right\} dt =$$

$$= \exp\{|z|^{-1} Q(x)\} - 1 \leqslant |z|^{-1} Q(x) \exp\{|z|^{-1} Q(x)\},$$

$$\left| y(z, x) - \left[\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + \int_x^\infty \frac{1 - e^{2iz(t-x)}}{2iz} V(t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} dt \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^\infty |z|^{-1} |V(t)| \left\{ \int_t^\infty \frac{|V(\xi)|}{|z|} \exp\left[|z|^{-1} \int_\xi^\infty |V(\eta)|\, d\eta \right] d\xi \right\} dt =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{|z|} \int_x^\infty |V(t)|\, dt \right\} - 1 - \frac{1}{|z|} \int_x^\infty |V(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left\{ \frac{Q(x)}{|z|} \right\}^2 \exp\left(\frac{Q(x)}{|z|} \right),$$

эквивалентные доказываемым неравенствам (20), (21′).

Следствие. *В замкнутой верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ *при* $|z| \geqslant 3Q(0)$ *решение и функция Вейля уравнения* (2) *с финитной потенциальной матрицей* (1′) *удовлетворяют неравенствам*

$$\sup_{0 \leqslant x < \infty} |e^{-izx} (\psi(z, x) - \psi_0(z, x))| \leqslant 6 |z|^{-1} Q(0); \tag{22}$$

$$\left| m(z) - \left\{ i - \frac{1}{z} \left[q(0) + \int_0^\infty e^{2izt} q'(t) \right] \right\} \right| \leqslant 11 \left\{ \frac{Q(0)}{|z|} \right\}^2, \tag{22′}$$

где $q(x) = r(x) + ip(x)$.

Действительно, при рассматриваемых значениях z и всех $x \in [0, \infty)$

$$\exp\left\{ \frac{Q(x)}{|z|} \right\} \leqslant \exp\left\{ \frac{Q(0)}{|z|} \right\} \leqslant e^{\frac{1}{3}} < \frac{3}{2},$$

откуда согласно (21) следует, что

$$|\Phi_1(z, 0) - i| \leqslant \frac{3}{2} \frac{Q(0)}{|z|};$$

$$|\Phi_2(z, 0) - 1| \leqslant \frac{3}{2} |z|^{-1} Q(0) \leqslant \frac{1}{2}$$

и, значит,

$$|\Phi_2(z, 0)| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{1}{\Phi_2(z, 0)} - 1 \right| \leqslant 3 \frac{Q(0)}{|z|} \tag{23}$$

$$\left| \frac{\Phi_1(z, 0)}{\Phi_2(z, 0)} - \{\Phi_1(z, 0) + i(1 - \Phi_2(z, 0))\} \right| =$$

$$= \left| \frac{(1 - \Phi_2(z, 0)) [(\Phi_1(z, 0) - i) - i(\Phi_2(z, 0) - 1)]}{\Phi_2(z, 0)} \right| \leqslant 9 \left(\frac{Q(0)}{|z|} \right)^2.$$

Из этих оценок, формул (5), (5′) и неравенств (21), (21′) следует, что

$$|e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))| =$$

$$= \left| e^{-izx} \left\{ \frac{\Phi(z, x) - \psi_0(z, x)}{\Phi_2(z, 0)} + \psi_0(z, x)\left[\frac{1}{\Phi_2(z, 0)} - 1\right]\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,|e^{-izx}(\Phi(z, x) - \psi_0(z, x))| + 3\,|z|^{-1} Q(0) \leqslant 6\,|z|^{-1} Q(0);$$

$$|m(z) - \{i + \Phi_1(z, 0) - i\Phi_2(z, 0)\}| \leqslant 9\left(\frac{Q(0)}{|z|}\right)^2;$$

$$\left|\Phi_1(z, 0) - i\Phi_2(z, 0) - \int_0^\infty \frac{1 - e^{2izt}}{2iz}(1 - i)\, V(t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} dt\right| \leqslant \left(\frac{Q(0)}{|z|}\right)^2 \frac{3}{2}$$

и, значит,

$$\left| m(z) - \left\{ i + \int_0^\infty \frac{1 - e^{2izt}}{2iz}(1 - i)\, V(t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} dt \right\}\right| \leqslant 11\left(\frac{Q(0)}{|z|}\right)^2.$$

Таким образом, неравенство (22) уже доказано, а для завершения доказательства неравенства (22′) остается заметить, что согласно (8′)

$$V(t) = \begin{pmatrix} r'(t) & -p'(t) \\ -p'(t) & -r'(t) \end{pmatrix} + (p^2(t) + r^2(t))\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(1, -i)\, V(t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 2i\,(r'(t) + ip'(t)) = 2iq'(t),$$

и в силу финитности функции $q(t)$

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{2izt}}{2iz}(1, -i)\, V(t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^\infty \frac{1 - e^{2izt}}{z} q'(t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{z}\left(q(0) + \int_0^\infty e^{2izt} q'(t)\, dt\right).$$

Лемма 4. *Спектральная функция $\rho(\lambda, \infty)$ оператора Дирака с финитной потенциальной матрицей непрерывно дифференцируема на полуосях $(-\infty, -3Q(0))$, $(3Q(0), \infty)$ $\left(Q(0) = \int_0^\infty V(t)\, dt\right)$ и ее производная представима в виде*

$$\rho'(\lambda, \infty) = \frac{1}{\pi}\left\{1 - \frac{1}{\lambda}\left[p(0) + \int_0^\infty (\cos 2\lambda t \cdot p'(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin 2\lambda t \cdot r'(t))\, dt\right] + \delta(\lambda)\right\}, \qquad (24)$$

где $|\delta(\lambda)| \leqslant 11\lambda^{-2} Q(0)^2$ при $|\lambda| \geqslant 3Q(0)$.

Доказательство. Из интегрального уравнения (20) и финитности матрицы $V(t)$ следует, что компоненты вектор-функции $\Phi(z, x)$ при каждом $x \geqslant 0$ являются целыми функциями от z. Поэтому функция Вейля $m(z) = \Phi_1(z, 0)(\Phi_2(z, 0))^{-1}$ является мероморфной функцией, и согласно (23) ее полюсы не могут лежать

на полуосях $(-\infty, -3Q(0))$, $(3Q(0), \infty)$. Таким образом, на этих полуосях функция Вейля непрерывна, а спектральная функция согласно (14″) непрерывно дифференцируема, причем $\rho'(\lambda, \infty) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im} m(\lambda)$, и согласно (22′)

$$\operatorname{Im} m(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda}\left[p(0) + \int_0^\infty (\cos 2\lambda t \cdot p'(t) + \sin 2\lambda t \cdot r'(t))\, dt\right] + \delta(\lambda),$$

где $|\delta(\lambda)| \leqslant 11\lambda^2 Q(0)^2$.

Следствие. *Остаточный член $\varepsilon(\lambda)$ в асимптотической формуле* (14) *для спектральной функции оператора Дирака с финитной потенциальной матрицей при $|\lambda| \geqslant 3Q(0)$ удовлетворяет неравенству*

$$|\varepsilon(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi|\lambda|}}\left\{\int_0^\infty |q'(t)|^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{11}{\pi|\lambda|} Q(0)^2. \tag{25}$$

Действительно, если $\lambda \geqslant 3Q(0)$, то, интегрируя обе части равенства (24) по отрезку $[\lambda, \mu]$ $(\mu > \lambda)$, находим, что

$$\rho(\mu, \infty) - \rho(\lambda, \infty) = \frac{1}{\pi}\{\mu - \lambda - p(0)[\ln\mu - \ln\lambda]\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_\lambda^\mu \left\{\frac{1}{\xi}\int_0^\infty [\cos 2\xi t \cdot p'(t) + \sin 2\xi t \cdot r'(t)]\, dt + \delta(\xi)\right\} d\xi.$$

Устремляя здесь μ к $+\infty$ и замечая при этом, что согласно (14)

$$\lim_{\mu\to+\infty}\left\{\rho(\mu, \infty) - \frac{1}{\pi}[\mu - p(0)\ln\mu]\right\} = -\frac{1}{2}r(0),$$

получаем

$$\rho(\lambda, \infty) = \frac{1}{\pi}\{\lambda - p(0)\ln\lambda\} - \frac{1}{2}r(0) + \varepsilon(\lambda),$$

где

$$\varepsilon(\lambda) = -\frac{1}{\pi}\int_\lambda^\infty \left\{\frac{1}{\xi}(c(2\xi, p') + s(2\xi, r')) + \delta(\xi)\right\} d\xi,$$

и через $c(\xi, p')$, $s(\xi, r')$ обозначены косинус- и синус-преобразования Фурье функций $p'(t)$ и $r'(t)$. Далее, согласно лемме 4 $|\delta(\xi)| \leqslant 11\xi^{-2}Q(0)^2$ при $|\xi| > 3Q(0)$ и, значит,

$$\left|\int_\lambda^\infty \delta(\xi)\, d\xi\right| \leqslant \int_\lambda^\infty |\delta(\xi)|\, d\xi \leqslant 11\lambda^{-1}Q(0)^2, \tag{26}$$

а согласно неравенству Коши-Буняковского и равенству Парсеваля для преобразований Фурье

$$\left|\int_\lambda^\infty \frac{1}{\xi}(c(2\xi, p') + s(2\xi, r'))\, d\xi\right| \leqslant \int_\lambda^\infty \frac{1}{\xi}|c(2\xi, p') + s(2\xi, r')|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{\int_{\lambda}^{\infty}|c(2\xi, p') + s(2\xi, r')|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\left\{\int_0^{\infty}(c(2\xi, p')^2 + \right.$$

$$\left. + s(2\xi, r')^2)\, d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left\{\int_0^{\infty}(p'(t)^2 + r'(t)^2)\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left\{\int_0^{\infty}|q'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

...куда следует, что

$$|\varepsilon(\lambda)| \leqslant \frac{11}{\pi\lambda} Q(0)^2 + \sqrt{\frac{1}{2\pi\lambda}}\left\{\int_0^{\infty}|q'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

...ля $\lambda < -3Q(0)$ доказательство проводится так же.

Замечание. Из формулы (24) следует, что при $|\xi| \geqslant 3Q(0)$

$$\left|\rho'(\xi, \infty) - \frac{1}{\pi}\left\{1 - \frac{p(0)}{\xi}\right\}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{|\xi|}|c(2\xi, p') + s(2\xi, r')| + |\delta(\xi)|\right\},$$

...уда согласно неравенствам (26), (26′) и аналогичным неравен... ...ам для $\lambda < -3Q(0)$ следует, что при $|\lambda| \geqslant 3Q(0)$

$$\int_{|\xi| \geqslant |\lambda|}\left|\rho'(\xi, \infty) - \frac{1}{\pi}\left\{1 - \frac{p(0)}{\xi}\right\}\right| d\xi \leqslant \frac{22Q(0)^2}{\pi|\lambda|} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{2\pi|\lambda|}}\left\{\int_0^{\infty}|q'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

5. Одновременно с данной операцией (1) рассмотрим порождаемое ...о семейство операций Дирака $D(\sigma)$ с финитными потенциальными ...атрицами $\Omega(x, \sigma)$ вида

$$\Omega(x, \sigma) = \begin{cases} \Omega(x) & |x| \leqslant \sigma \\ \Omega(x)\{1 - (|x| - \sigma)^2\}^2 & \sigma \leqslant |x| \leqslant \sigma + 1 \\ 0 & \sigma + 1 \leqslant |x| \end{cases}.$$

...се величины $A(\cdot)$, связанные с операцией $D(\sigma)$, условимся обозна...ать через $A(\cdot, \sigma)$. Например, $p(x, \sigma)$, $r(x, \sigma)$ — элементы матрицы ...(x, σ); $q(x, \sigma) = r(x, \sigma) + ip(x, \sigma)$; $\rho(\lambda, \infty, \sigma)$ — спектральная функ...ия оператора $D_3(\sigma)$ и т. д.

Матрицы $\Omega(x, \sigma)$ тоже непрерывно дифференцируемы, причем

$$\Omega'(x, \sigma) =$$

$$= \begin{cases} \Omega'(x) & |x| \leqslant \sigma \\ \Omega'(x)\{1 - (|x| - \sigma)^2\}^2 - 4\Omega(x)\dfrac{x}{|x|}\{1 - (|x| - \sigma)^2\}(|x| - \sigma) & \sigma \leqslant |x| \leqslant \sigma + 1 \\ 0 & \sigma + 1 \leqslant |x|. \end{cases}$$

откуда следует, что функции $q(x, \sigma)$ и матрицы $V(x, \sigma) = B\Omega'(x, \sigma) + \Omega(x, \sigma)^2$ при $|x| \leqslant \sigma + 1$ удовлетворяют неравенствам

$$|q'(x, \sigma)| \leqslant |q'(x)| + 2|q(x)|;$$
$$|V(x, \sigma)| \leqslant |\Omega'(x)| + 2|\Omega(x)| + |\Omega(x)|^2 \tag{2}$$

и обращаются в нуль при $|x| \geqslant \sigma + 1$.

Лемма 5. *При всех $\sigma > 0$ выполняются неравенства*

$$\left\{\int_0^\infty |q'(t, \sigma)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant 3\sqrt{\sigma+1}\,\{|q(0)| + \sqrt{\sigma+1}\cdot\alpha(\sigma+1)\}, \tag{2}$$

$$Q(0, \sigma) = \int_0^\infty |V(t, \sigma)|\,dt \leqslant 2(\sigma+1)\{1 + |q(0)| + \\ + \sqrt{\sigma+1}\cdot\alpha(\sigma+1)\}^2, \tag{3}$$

где

$$\alpha(x) = \left\{\int_0^x |\Omega'(t)|\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (x > 0). \tag{31}$$

Доказательство. Согласно определению абсолютной величины матрицы $|\Omega'(x)| = |p'(x)| + |r'(x)|$, откуда следует, что $|q'(x)|^2 = |p'(x)|^2 + |r'(x)|^2 \leqslant |\Omega'(x)|^2$ и, значит,

$$|q(x)| = \left|q(0) + \int_0^x q'(t)\,dt\right| \leqslant |q(0)| + \int_0^x |q'(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant |q(0)| + \sqrt{x}\left\{\int_0^x |q'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant |q(0)| + \sqrt{x}\alpha(x). \tag{3}$$

Поэтому

$$\left\{\int_0^\infty |q'(t, \sigma)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\int_0^{\sigma+1} |q'(t, \sigma)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\int_0^{\sigma+1} (|q'(t)| + 2|q(t)|)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{\int_0^{\sigma+1} |q'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ 2\left\{\int_0^{\sigma+1} |q(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \alpha(\sigma+1) + 2\sqrt{\sigma+1}\,\{|q(0)| +$$
$$+ \sqrt{\sigma+1}\,\alpha(\sigma+1)\} \leqslant 3\sqrt{\sigma+1}\,\{|q(0)| + \alpha(\sigma+1)\sqrt{\sigma+1}\}$$

и, так как $|\Omega(t)| = |r(t)| + |p(t)| \leqslant 2|q(t)|$, то согласно (28), (32)

$$Q(0, \sigma) = \int_0^\infty |V(t, \sigma)|\,dt = \int_0^{\sigma+1} |V(t, \sigma)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{\sigma+1} |\Omega'(t)|\,dt + \int_0^{\sigma+1} \{2|\Omega(t)| + |\Omega(t)|^2\}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sigma+1}\,\alpha(\sigma+1) + 2(\sigma+1)\,\{\sqrt{2}[|q(0)| +$$
$$+ \sqrt{\sigma+1}\,\alpha(\sigma+1)] + [|q(0)| + \sqrt{\sigma+1}\,\alpha(\sigma+1)]^2\} \leqslant$$
$$\leqslant 2(\sigma+1)\{1 + |q(0)| + \sqrt{\sigma+1}\cdot\alpha(\sigma+1)\}^2.$$

Следствие. *Пусть*

$$L = L(\sigma) = 6(\sigma + 1)\{1 + |q(0)| + \sqrt{\sigma + 1}\,\alpha(\sigma + 1)\}^2 \tag{33}$$

и $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma$, $0 < \sigma_2 \leqslant \sigma$. *Тогда*

$$\rho(L, \infty, \sigma_i) - \rho(-L, \infty, \sigma_i) \leqslant 2L, \ (i = 1, 2) \tag{34}$$

$$\int\limits_{|\lambda| > L} |\rho'(\lambda, \infty, \sigma_2) - \rho'(\lambda, \infty, \sigma_1)|\, d\lambda \leqslant 2L. \tag{35}$$

Действительно, из (30), (33) следует, что $L > 3Q(0, \sigma_i)$ $(i = 1, 2)$. Поэтому остаточные члены $\varepsilon(\pm L, \sigma_i)$ в формуле (14) удовлетворяют неравенству (25), и, значит,

$$\rho(L, \infty, \sigma_i) - \rho(-L, \infty, \sigma_i) = \frac{2}{\pi} L - r(0) + \varepsilon(L, o_i) - \varepsilon(-L, \sigma_i) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} L + |r(0)| + |\varepsilon(L, \sigma_i)| + |\varepsilon(-L, \sigma_i)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} L + |r(0)| + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, L^{-\frac{1}{2}} \left\{\int\limits_0^\infty |q'(t, \sigma_i)|^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{22}{\pi L} Q(0, \sigma_i)^2.$$

Так как $L^{-1} Q(0, \sigma_i)^2 = L(L^{-1} Q(0, \sigma_i))^2 \leqslant \frac{1}{9} L$, $L \geqslant 6(1 + 2|q(0)|) \geqslant 6(1 + |r(0)|)$ и согласно (29), (33)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, L^{-\frac{1}{2}} \left\{\int\limits_0^\infty |q'(t, \sigma_i)|^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{6}{\sqrt{2\pi \cdot 6}} < 1,$$

то из последнего неравенства следует

$$\rho(L, \infty, \sigma_i) - \rho(-L, \infty, \sigma_i) \leqslant \frac{2}{\pi} L + \frac{22}{9\pi} L + |r(0)| + 1 \leqslant$$

$$\leqslant L\left\{\frac{2}{\pi} + \frac{22}{9\pi} + \frac{1}{6}\right\} < 2L.$$

Далее, воспользовавшись неравенствами (27), находим, что

$$\int\limits_{|\lambda| > L} |\rho'(\lambda, \infty, \sigma_2) - \rho'(\lambda, \infty, \sigma_1)|\, d\lambda \leqslant \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{|\lambda| \geqslant L} \Big|\rho'(\lambda, \infty, \sigma_i) -$$

$$- \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\lambda} p(0)\right)\Big|\, d\lambda \leqslant \sum_{i=1}^{2} \left\{\frac{22}{\pi} \frac{Q(0, \sigma_i)}{L} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{L} \left\{\int\limits_0^\infty |q'(t, \sigma_i)|^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}}\right\} \leqslant 2L\left\{\frac{22}{9\pi} + \frac{1}{6}\right\} < 2L.$$

Из совпадения потенциальных матриц операторов D и $D(\sigma)$ на сегменте $[-\sigma, \sigma]$ и формулы (17) следует, что на отрезке $2\alpha \leqslant x \leqslant \sigma_0$ выполняется равенство

$$\psi(z, x) - \psi(z, x, \sigma_0) = i\omega(z, x)\left(\frac{z\alpha}{\sin z\alpha}\right)^2 \int\limits_0^\infty e^{izt} F(t, \alpha, \sigma_0)\, dt, \tag{36}$$

где $\psi(z, x, \sigma_0)$ — решение Вейля уравнения $D(\sigma_0)\psi = z\psi$, а

$$F(t, \alpha, \sigma_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t} d\{\rho(\lambda, \infty) - \rho(\lambda, \infty, \sigma_0)\}. \quad (37)$$

Так как

$$\left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t} = \overline{\left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha} e^{i\frac{\lambda t}{2}}\right)} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha} e^{-\frac{i\lambda t}{2}}\right)$$

и

$$\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha} e^{\pm i\frac{\lambda t}{2}} \in W_2\left(\frac{|t|}{2} + \alpha\right),$$

то согласно следствию леммы 1 при $|t| \leqslant 2(\sigma - \alpha)$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t} d\rho(\lambda, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t} d\rho(\lambda, \infty, \sigma).$$

Отсюда и из определения (37) функции $F(t, \alpha, \sigma_0)$ следует, что, во-первых, $F(t, \alpha, \sigma_0) = 0$ при $|t| \leqslant 2(\sigma_0 - \alpha)$ и, во-вторых, при $|t| < < 2(\sigma - \alpha)$ в формуле (37) вместо $\rho(\lambda, \infty)$ можно взять $\rho(\lambda, \infty, \sigma)$, т. е.

$$F(t, \alpha, \sigma_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t} d\{\rho(\lambda, \infty, \sigma) - \rho(\lambda, \infty, \sigma_0)\}$$

при $t \in [-2(\sigma - \alpha), 2(\sigma - \alpha)]$. Полагая $\sigma > \sigma_0$ и определяя $L = L(\sigma)$ по формуле (33), находим, что при $|t| \leqslant 2(\sigma - \alpha)$

$$F(t, \alpha, \sigma_0) = \int_{-L}^{L} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t} d\{\rho(\lambda, \infty, \sigma) - \rho(\lambda, \infty, \sigma_0)\} +$$
$$+ \int_{|\lambda| > L} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t} \{\rho'(\lambda, \infty, \sigma) - \rho'(\lambda, \infty, \sigma_0)\} d\lambda,$$

откуда в силу неравенств (34), (35) следует, что при $\alpha \to 0$ функции $F(t, \alpha, \sigma_0)$ сходятся к $F(t, 0, \sigma_0)$ равномерно на сегменте $[-\sigma, \sigma]$, причем их модули удовлетворяют неравенствам $|F(t, \alpha, \sigma_0)| \leqslant 2L + + 2L \leqslant 4L(\sigma)$ $(|t| \leqslant 2(\sigma - \alpha))$. Так как $\sigma > \sigma_0$ произвольно, то предел

$$\lim_{\alpha \to 0} F(t, \alpha, \sigma_0) = F(t, 0, \sigma_0) \quad (38)$$

существует при всех $t \in (-\infty, \infty)$, и сходимость к $F(t, 0, \sigma_0)$ равномерна на каждом компакте вещественной оси. Кроме того, полагая в неравенстве $\sigma = 0{,}5|t| + \sigma_0$ и замечая при этом, что $\sigma_0 > 2\alpha$, получаем верную при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и не зависящую от α оценку

$$|F(t, \alpha, \sigma_0)| \leqslant L(0{,}5|t| + \sigma_0). \quad (39)$$

Наконец, так как $F(t, \alpha, \sigma_0) = 0$ при $|t| \leqslant 2(\sigma_0 - \alpha)$, то

$$F(t, 0, \sigma_0) = 0 \quad (|t| \leqslant 2\sigma_0). \quad (40)$$

Лемма 6. *Если матрица* $\Omega(x)$ *удовлетворяет неравенству* (6) *и* $\operatorname{Im} z > C_2$, *то в правой части формулы* (36) *можно сделать предельный переход по* $\alpha \to 0$, *т. е.*

$$\psi(z, x) - \psi(z, x, \sigma_0) = i\omega(z, x) \int_{2\sigma_0}^{\infty} e^{izt} F(t, 0, \sigma_0)\, dt, \tag{41}$$

где $0 \leqslant x \leqslant \sigma_0$ *и*

$$|F(t, 0, \sigma_0)| \leqslant C(\sigma_0)(|t| + 2\sigma_0)\, e^{C_2|t|}. \tag{41'}$$

Доказательство. Из определения функций $\alpha(\sigma)$, $L(\sigma)$ и неравенства (6) следует, что $\sqrt{\sigma} \cdot \alpha(\sigma) \leqslant e^{C_1 + C_2\sigma}$, $L(\sigma) \leqslant 6(2 + |q(0)|)^2 \times (\sigma + 1)\, e^{2(C_1 + C_2\sigma)}$, откуда согласно (39) вытекает оценка

$$|F(t, \alpha, \sigma_0)| \leqslant C(\sigma_0)(|t| + 2\sigma_0)\, e^{C_2|t|} \tag{42}$$

$(C(\sigma_0) = 15(2 + |q(0)|)^2 e^{2C_1 + C_2\sigma_0})$, позволяющая при $\operatorname{Im} z > C_2$ сделать предельный переход по $\alpha \to 0$ под знаком интеграла в формуле (36). Поэтому

$$\lim_{\alpha\to 0} \left(\frac{z\alpha}{\sin z\alpha}\right)^2 \int_0^{\infty} e^{izt} F(t, \alpha, \sigma_0)\, dt = \lim_{\alpha\to 0} \int_0^{\infty} e^{izt} F(t, \alpha, \sigma_1)\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{izt} F(t, 0, \sigma_1)\, dt = \int_{2\sigma_0}^{\infty} e^{izt} F(t, 0, \sigma_1)\, dt,$$

так как согласно (40) $F(t, 0, \sigma_0) = 0$ при $|t| < 2\sigma_0$.

Неравенство (41′) вытекает из допредельных неравенств (42).

Перейдем теперь к доказательству равенства (12).

Пусть выполнено неравенство (6), $\operatorname{Im} z > C_2$ и $|z| > 3Q(0, \sigma_0)$. Тогда согласно (22), (41) при всех $x \in [0, \sigma_0]$ выполняется неравенство

$$|e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))| \leqslant |e^{-izx}(\psi(z, x, \sigma_0) - \psi_0(z, x))| +$$
$$+ |e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi(z, x, \sigma_0))| \leqslant 6|z|^{-1} Q(0, \sigma_0) +$$
$$+ e^{\operatorname{Im} zx} |\omega(z, x)| \left| \int_{2\sigma_0}^{\infty} e^{izt} F(t, 0, \sigma_0)\, dt \right|.$$

Далее, так как $Q(0, \sigma_0) \geqslant \int_0^{\sigma_0} |V(t)|\, dt = P(\sigma_0)$, то согласно (9), (10) при $x \in [0, \sigma_0]$

$$|E(z, x)| \leqslant 4(1 + |z|^{-1} |\Omega(0)|)\, e^{\operatorname{Im} zx}$$

и, тем более,

$$\sup_{0 < x < \sigma_0} e^{|\operatorname{Im} zx|} |\omega(z, x)| \leqslant 4(1 + |z|^{-1} |\Omega(0)|)\, e^{2\operatorname{Im} z\sigma_0},$$

а согласно (41′)

$$\left| \int_{2\sigma_0}^{\infty} e^{izt} F(t, 0, \sigma_0)\, dt \right| \leqslant C(\sigma_0) \int_{2\sigma_0}^{\infty} e^{-\operatorname{Im} zt} (t + 2\sigma_0)\, e^{C_2 t}\, dt =$$

$$= C(\sigma_0)(4\sigma_0 + (\operatorname{Im} z - C_2)^{-1})\, e^{-2\sigma_0(\operatorname{Im} z - C_2)} (\operatorname{Im} z - C_2)^{-1}.$$

Сопоставляя полученные неравенства, находим, что

$$\sup_{0<x<\sigma_0} |e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))| \leqslant 6|z|^{-1} Q(0, \sigma_0) +$$

$$+ 4C(\sigma_0)(1 + |z|^{-1}|\Omega(0)|)(4\sigma_0 + (\operatorname{Im} z - C_2)^{-1}) e^{2\sigma_0 C_2} (\operatorname{Im} z - C_2)^{-1}$$

и, значит,

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \sup_{\operatorname{Im} z \geqslant \Lambda} (\sup_{0<x<\sigma_0} |e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))|) = 0.$$

Так как здесь $\sigma_0 > 0$ произвольно, то тем самым формула (12), а вместе с ней и основная теорема доказаны.

Список литературы: 1. *Марченко В. А.* Асимптотика по спектральному параметру решений Вейля уравнений Штурма — Лиувилля // Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1989. 170, № 17. С. 184—206. 2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М., 1970. 671 с. 3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. К., 1977. 331 с.

Поступила в редколлегию 14.12.90