УДК 517.9

Л. К. МАСЛОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ

При интегрировании эволюционных уравнений методом обратной задачи представляют особый интерес те случаи, когда решения получаются в замкнутом виде. Это происходит, в частности, когда соответствующий L-оператор имеет нулевой коэффициент отражения. В работе ставится и решается задача описания безотражательных якобиевых матриц в терминах их спектральных свойств. Для этого вводится модификация функции Вейля якобиевой матрицы, подобно тому, как это сделано в [1]. Основным результатом является теорема о том, что якобиева матрица безотражательна тогда и только тогда, когда ее функция Вейля рациональна.

1. Бесконечная в обе стороны матрица J с элементами

$$J_{ik}=\delta(i-k)\,a(i)+\delta(i-k+1)\,b(i-1)+\delta(i-k-1)\,b(i) \quad (1.1)$$
$$\operatorname{Im} a(n)=0, \quad b(n)>0, \quad n\in Z$$

называется якобиевой матрицей. Она определяет следующую разностную операцию на последовательности $\{\psi(n)\}_{n\in Z}$:

$$(J\psi)(n)=b(n-1)\,\psi(n-1)+a(n)\,\psi(n)+b(n)\,\psi(n+1). \quad (1.2)$$

Вронскианом двух последовательностей $\{\varphi(n)\}_{n\in Z}$ и $\{\psi(n)\}_{n\in Z}$ мы будем называть выражение $W[\varphi,\ \psi](n)=\varphi(n)\psi(n+1)-\varphi(n+1)\psi(n)$.

Для решений $\varphi(\lambda)=\varphi(\lambda,\ n)$ уравнения

$$(J\psi)(\lambda,\ n)=\lambda\psi(\lambda,\ n) \quad (1.3)$$

справедлива формула Грина [2]:

$$b(n)\,W[\varphi(\lambda),\ \varphi(\mu)](n)-b(m)\,W[\varphi(\lambda),\ \varphi(\mu)](m)=$$
$$=(\lambda-\mu)\sum_{k=n+1}^{m}\varphi(\lambda,\ k)\,\varphi(\mu,\ k), \quad (1.4)$$

откуда, в частности, вытекает, что если φ и ψ является решениями уравнения (1.3) при одном и том же λ, то выражение $b(n)\,W[\varphi,\ \psi](n)$ не зависит от n.

Дифференцируя формулу Грина по μ и полагая $\mu = \lambda$, получим

$$b(n) W[\varphi, \varphi'](n) - b(m) W[\varphi, \varphi'](m) = -\sum_{k=n+1}^{m} \varphi^2(k). \qquad (1.5)$$

Введем следующие обозначения:

$$Z_+(m) = \{n \in Z : n \geqslant m\};$$
$$Z_-(m) = \{n \in Z : n < m\}.$$

Рассмотрим разностные операции $(J_m^- \psi)(n)$ $((J_m^- \psi)(n))$, заданные а последовательностях вида $\{\psi(n)\}_{n \geqslant m}$ $(\{\psi(n)\}_{n<m})$:

$$(J_m^+ \psi)(n) = \begin{cases} (J\psi)(n) & n > m, \\ a(n)\psi(n) + b(n)\psi(n+1) & \text{при } n = m; \end{cases}$$

$$(J_m^- \psi)(n) = \begin{cases} (J\psi)(n) & n < m-1, \\ b(n-1)\psi(n-1) + a(n)\psi(n) & \text{при } n = m-1. \end{cases}$$

Ели последовательность $\{\psi(n)\}_{n \in Z}$ удовлетворяет условию $\psi(m-1) = 0$ $(\psi(m)=0)$, то

$$(J\psi)(n) = (J_m^+ \psi)(n), \quad n = m, m+1, \ldots$$
$$((J\psi)(n) = (J_m^- \psi)(n), \quad n = m-1, m-2, \ldots)$$

Рассмотрим канонические решения $P(\lambda, n)$, $Q(\lambda, n)$ уравнения), удовлетворяющие начальным условиям: $P(\lambda - 1) = 0$, $P(\lambda, 0) =$; $Q(\lambda, -1) = 1$, $Q(\lambda, 0) = 0$.

Они, очевидно, существуют, определены единственным образом линейно независимы.

Теорема Вейля—Хеллингера [2] утверждает, что при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ ществует решение ψ^+ уравнения (1.3) вида $\psi^+(\lambda, n) = m^+(\lambda) \times P(\lambda, n) + Q(\lambda, n)$, принадлежащее $l_2(Z_+)$. Кроме того, выполняется равенство:

$$-b(-1)\frac{\operatorname{Im} m^+\lambda}{\operatorname{Im}\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} |\psi^+(\lambda, n)|^2. \qquad (1.6)$$

Отметим, что функция $m^+(\lambda)$ голоморфна вне вещественной оси принимает сопряженные значения в сопряженных точках. Она тличается от канонической функции Вейля $w(\lambda)$ ([2]) множителем $-b(-1)$: $m^+(\lambda) = -b(-1)w(\lambda)$. Так как для канонической функции Вейля имеет место представление:

$$w(\lambda) = \int_R \frac{d\rho(u)}{u - \lambda},$$

де ρ — вероятностная мера, функция $m^+(\lambda)$ имеет следующее асимптотическое поведение в окрестности бесконечности:

$$m^+(\lambda) = -b(-1)w(\lambda) = \frac{b(-1)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \operatorname{Im}\lambda \to \infty. \qquad (1.7)$$

Функция Вейля $w(\lambda)$ однозначно определяет все коэффициенты матрицы J_0^+. Функция $m^+(\lambda)$ определяет также коэффициент $b(-1)$, из 1.7.

Введем решение $\psi^-(\lambda, n)$ такое, что $\psi^-(\lambda, n) \in l_2(\boldsymbol{Z}_-)$ и $\psi^-(\lambda, n) = m^-(\lambda) Q(\lambda, n) + P(\lambda, n)$. Функция $m^-(\lambda)$ также голоморфна вне вещественной оси

$$-b(-1)\frac{\operatorname{Im} m^-(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} = \sum_{k=-\infty}^{-1} |\psi^-(\lambda, k)|^2. \tag{1.8}$$

Функции $m^\pm(\lambda)$ мы будем называть функциями Вейля матрицы J на Z_+ и $\boldsymbol{Z}_-$ соответственно. Они имеют следующее асимптотическое поведение:

$$m^\pm(\lambda) = \frac{b(-1)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \operatorname{Im}\lambda \to \infty. \tag{1.9}$$

Определение. *Функцией Вейля якобиевой матрицы J на $\boldsymbol{Z}$ называется функция*

$$m(z) = \begin{cases} m^+(z + z^{-1}), & |z| < 1, \\ \dfrac{1}{m^-(z + z^{-1})}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Последовательность $\psi(z, n) = m(z) P(z + z^{-1}) + Q(z + z^{-1}, n)$ является решением уравнения (1.3) при $\lambda = z + z^{-1}$. При $|z| < 1$ она совпадает с $\psi^+(\lambda, n)$, а при $|z| > 1$ — с $(m^-(\lambda))^{-1}\psi^-(\lambda, n)$. В том случае, когда операторы $J_0^\pm$, порождаемые соответствующими матрицами в $l_2(\boldsymbol{Z}_\pm)$, являются существенно самосопряженными, решения $\psi^\pm$ определены с точностью до постоянного множителя, а функции $m^\pm$ определяются однозначно и выражаются формулами:

$$m^+(\lambda) = \frac{\psi^+(\lambda, 0)}{\psi^+(\lambda, -1)}, \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{m^-(\lambda)} = \frac{\psi^-(\lambda, 0)}{\psi^-(\lambda, -1)},$$

где $\psi^\pm$ — любые решения, принадлежащие $l_2(\boldsymbol{Z}_\pm)$.

Из формул (1.9) и определения функции $m(z)$ следует, что

$$m(z) = \frac{z}{b(-1)} + O(1) \quad \text{при } \operatorname{Im} z \to \infty,$$

$$m(z) = b(-1) z + O(z^2) \quad \text{при } z \to 0,\ \varepsilon < |\arg z| < \pi - \varepsilon.$$

Кроме того, из (1.6) и (1.8) вытекает, что $\operatorname{sgn}\operatorname{Im} m^\pm(\lambda) = -\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda$.

Далее, так как $\operatorname{Im}(z + z^{-1}) = \operatorname{Im}\left(z + \dfrac{\bar z}{|z|^2}\right) = \operatorname{Im} z(1 - |z|^{-2})$, то при $|z| < 1$ $\operatorname{sgn}\operatorname{Im} m(z) = \operatorname{sgn}\operatorname{Im} m^+(z + z^{-1}) = -\operatorname{sgn}\operatorname{Im}(z + z^{-1}) = \operatorname{sgn}\operatorname{Im} z$, а при $|z| > 1$ $\operatorname{sgn}\operatorname{Im} m(z) = -\operatorname{sgn}\operatorname{Im} m^-(z + z^{-1}) = \operatorname{sgn}\operatorname{Im}(z + z^{-1}) = \operatorname{sgn}\operatorname{Im} z$. Поэтому мнимая часть функции Вейля $m(z)$ положительна в верхней и отрицательна в нижней полуплоскости.

Сказанное позволяет сформулировать свойства функции Вейля в виде леммы:

Лемма 1.1. (*Свойства функции Вейля*):

1) *Функция Вейля $m(z)$ голоморфна вне вещественной оси $(\boldsymbol{R})$ и единичной окружности $(\boldsymbol{T})$.*

2) $\frac{\operatorname{Im} m(z)}{\operatorname{Im} z} > 0, \quad z \notin \boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{R}$,

3) $m(z) = \frac{z}{b(-1)} + O(1)$ *при* $\operatorname{Im} z \to \infty$,

4) $m(z) = b(-1)z + O(z^2)$ *при* $z \to 0, \ \varepsilon < |\arg z| < \pi - \varepsilon$.

2. *Будем якобиеву матрицу называть быстроубывающей, если*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n\,|a(n)| < \infty \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} n\,|b^2(n) - 1| < \infty.$$

Для таких матриц конечноразностное уравнение

$$(J\psi)(z, n) = (z + z^{-1})\,\psi(z, n) \tag{2.1}$$

имеет решения $e^+(z, n)$ и $e^-(z, n)$, которые голоморфны соответственно внутри и вне единичного круга и непрерывны вплоть до окружности $\boldsymbol{T}$, причем имеют место асимптотические формулы по n:

$$e^+(z, n) = \frac{z^n}{\beta^+(n)}(1 + o(1)), \quad n \to +\infty, \quad |z| \leqslant 1,$$

$$e^-(z, n) = \frac{z^n}{\beta^-(n)}(1 + o(1)), \quad n \to -\infty, \quad |z| \geqslant 1 \tag{2.2}$$

асимптотические формулы по z:

$$e^+(z, n) = \frac{z^n}{\beta^+(n)}(1 + O(z)), \quad z \to 0,$$

$$e^-(z, n) = \frac{z^n}{\beta^-(n)}(1 + O(z^{-1})), \quad z \to \infty, \tag{2.3}$$

где

$$\beta^+(n) = \prod_{k=n}^{\infty} b(k), \qquad \beta^-(n) = \prod_{k=-\infty}^{n-1} b(k).$$

Доказательство существования этих решений дано в приложении (п. 3).

Функция $e^+(z^{-1}, n)$, заданная при $|z| \geqslant 1$, очевидно, также является решением уравнения (2.1) и на окружности $|z| = 1$ она вместе с $e^+(z, n)$ образует фундаментальную систему решений этого уравнения. Поэтому на единичной окружности решение можно представить в виде их линейной комбинации:

$$e^-(z, n) = A(z)\,e^+(z, n) + B(z)\,e^+(z^{-1}, n). \tag{2.4}$$

Коэффициент $A(z)$ выражается через эти три решения следующим образом:

$$A(z) = \frac{b(n)\,W[e^-(z),\ e^+(z^{-1})](n)}{b(n)\,W[e^+(z),\ e^+(z^{-1})](n)}.$$

Заметим, что числитель и знаменатель не зависят от n, а с учетом (2.2) мы получим $b(n)\,W[e^+(z),\ e^+(z^{-1})](n) = z^{-1} - z$, откуда

$$A(z) = \frac{b(n)\,W[e^-(z),\ e^+(z^{-1})](n)}{z^{-1} - z}. \tag{2.5}$$

Числитель в выражении (2.5) является голоморфной функцией вне единичного круга, поэтому функция $A(z)$ аналитически продолжа-

ется с окружности в область $|z|>1$. Известно [3], что она имеет конечное число вещественных простых нулей $\{\varkappa_k\}_{k=1}^{N}$ ($|\varkappa_k|>1$) и, кроме того,

$$A(z)\to\frac{1}{\beta} \text{ при } z\to\infty, \text{ где } \beta=\beta^+(n)\beta^-(n)=\prod_{k=-\infty}^{+\infty} b(k).$$

Нули $\varkappa_k$ функции $A(z)$ отвечают собственным значениям $\varkappa_k+\varkappa_k^{-1}$ оператора J, поскольку при $z=\varkappa_k$ решения $e^-(z, n)$ и $e^+(z^{-1}, n)$, принадлежащие соответственно $l_2(\boldsymbol{Z}_-)$ и $l_2(\boldsymbol{Z}_+)$, линейно зависимы:

$$e^-(\varkappa_k, n)=C_k e^+(\varkappa_k^{-1}, n). \tag{2.6}$$

Полагая в формуле Грина (1.5) $\lambda=z+z^{-1}$ ($|z|>1$) и переходя к дифференцированию по z, мы получим соотношения

$$b(n)\left(e^+(z^{-1}, n)\frac{d}{dz}e^+(z^{-1}, n+1)-e^+(z^{-1}, n+1)\frac{d}{dz}e^+(z^{-1}, n)\right)=$$
$$=(z^{-2}-1)\sum_{k=n+1}^{\infty}e^+(z^{-1}, k)^2,$$
$$b(n)\left(e^-(z, n+1)\frac{d}{dz}e^-(z, n)-e^-(z, n)\frac{d}{dz}e^-(z, n+1)\right)=$$
$$=(z^{-2}-1)\sum_{k=-\infty}^{n}e^-(z, k)^2, \tag{2.7}$$

из которых, в частности, следует, что производная функции $A(z)$ в точке $\varkappa_k$ равна

$$A'(\varkappa_k)=\frac{C_k}{\varkappa_k}\|e^+(\varkappa_k^{-1}, n)\|_{l_2(Z)}, \tag{2.8}$$

так как $\varkappa_k\in\boldsymbol{R}$, решения $e^+(\varkappa_k^{-1}, k)$ и $e^-(\varkappa_k, k)$ вещественны и поэтому $e^+(\varkappa_k^{-1}, k)^2=|e^+(\varkappa_k^{-1}, k)|^2$, $e^-(\varkappa_k, k)^2=|e^-(\varkappa_k, k)|^2$.

Числа $\mu_k^2=\|e^+(\varkappa_k^{+1}, n)\|$ называются нормировочными коэффициентами.

Матрица J называется безотражательной, если $B(z)=0$ при $|z|=1$. В этом случае функция $A(z)$ продолжается во всю плоскость формулой [3]:

$$A(z)=\frac{1}{\beta}\prod_{k=1}^{N}\frac{z-\varkappa_k}{z-\varkappa_k^{-1}} \tag{2.9}$$

и равенство (2.4) принимает вид

$$e^-(z, n)=A(z)e^+(z, n). \tag{2.10}$$

Так как функция, стоящая в этом равенстве слева, голоморфна вне единичного круга, а функция, стоящая справа, голоморфна внутри круга (за исключением конечного числа точек), каждая из них является аналитическим продолжением другой.

Безотражательная матрица J однозначно восстанавливается по данным рассеяния $\{\varkappa_k, \mu_k\}_{k=1}^N$. Для этого [3] нужно найти функцию $\varphi(z, n) = \frac{z^{-n}}{\beta^+(n)} e^+(z, n)$ из соотношения

$$\varphi(z, n) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{z - \varkappa_k} \frac{\varkappa_k^{-2n+1} \varphi(\varkappa_k^{-1}, n)}{\mu_k^2}. \tag{2.11}$$

Полагая в этом уравнении $z = \varkappa_k^{-1}$, получим конечную систему линейных уравнений для значений $\varphi(\varkappa_k^{-1}, n)$ функции $\varphi(z, n)$ в точках $\varkappa_k^{-1}$, решив которую, восстановим функцию φ во всей плоскости. Поскольку $e^+(z, n)$ удовлетворяет уравнению (2.1), функция $\varphi(z, n)$ удовлетворяет уравнению

$$zb^2(n-1)\varphi(z, n-1) + a(n)\varphi(z, n) + z^{-1}\varphi(z, n+1) = (z+z^{-1})\varphi(z, n),$$

из которого $a(n)$ и $b(n)$ вычисляются по коэффициентам разложения функции φ в ряд Тейлора в нуле [3].

Лемма 2.1. *Пусть J — безотражательная матрица Якоби. Тогда соответствующие решения $e^\pm(z, n)$ могут быть представлены в виде:*

$$e^+(z, n) = \frac{z^n}{\beta^+(n)} \prod_{k=1}^{N} \frac{1 - z\lambda_k^{-1}(n)}{1 - z\varkappa_k^{-1}}, \tag{2.12}$$

$$e^-(z, n) = \frac{z^n}{\beta^-(n)} \prod_{k=1}^{N} \frac{z - \lambda_k(n)}{z - \varkappa_k^{-1}},$$

где $\{\lambda_k(n)\}_{k=1}^{\infty}$, $n \in \mathbf{Z}$ — некоторый набор различных вещественных чисел.

Доказательство. Из уравнения (2.11) следует, функция $e^+(z, n)$ рациональна и имеет вид

$$e^+(z, n) = z^n \beta^+(n) \frac{T_N(z, n)}{\prod_{k=1}^{N} (z - \varkappa_k)},$$

где $T_N(z) = z^N + C_{N-1}(n) z^{N-1} + \dots + C_0(n)$ — полином степени N с вещественными коэффициентами. Обозначим его нули $\lambda_k(n)$. Тогда

$$e^+(z, n) = z^n \beta^+(n) \prod_{k=1}^{N} \frac{z - \lambda_k(n)}{z - \varkappa_k}, \tag{2.13}$$

откуда сразу из соотношений (2.9) и (2.10) следует, что функция $e^-(z, n)$ имеет требуемый вид. Сравнивая далее представление (2.13) с асимптотической формулой (2.3) для $e^+(z, n)$ при $z \to 0$, будем иметь

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k(n)}{\varkappa_k} = \frac{1}{\beta^+(n)^2}. \tag{2.14}$$

Это позволяет преобразовать выражение (2.13) к требуемому виду.

Покажем, что числа λ_k вещественны и попарно различны. Если $|\lambda_k| < 1$, то $e^+(\lambda_k, n) \in l_2(\boldsymbol{Z}_+)$, и поэтому величина $\lambda_k(n) + \lambda_k^{-1}(n)$ есть собственное значение матрицы J_{n+1}^+. Значит, все числа $\lambda_k(n)$, лежащие внутри единичного круга, вещественны и различны. То же, очевидно, можно утверждать и относительно чисел $\lambda_k(n)$, лежащих вне круга, так как в этом случае величины $\lambda_k(n) + \lambda_k^{-1}(n)$ будут собственными значениями матрицы J_n^-. Если $|\lambda_k| = 1$, то поскольку полином T имеет вещественные коэффициенты, $0 = e^+(\lambda_k, n) = e^+(\bar{\lambda}_k, n) = e^+(\lambda_k^{-1}, n)$, откуда следует, что $e^+(\lambda_k, n)$ и $e^+(\bar{\lambda}_k, n)$ — линейно зависимые решения уравнения (2.1). Пусть $e^+(\lambda_k, n) = C \times \times e^+(\bar{\lambda}_k, n)$. Тогда, в силу (2.2),

$$\left(\frac{\lambda_k}{\bar{\lambda}_k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} C, \quad |\lambda_k| = 1,$$

что возможно лишь при $\lambda_k = \pm 1$. Вещественность чисел λ_k доказана.

Остается показать, что полином $\mathrm{T}(z)$ не может иметь кратных нулей, равных ± 1. Дифференцируя уравнение (2.1) по z, получим

$$J \frac{d}{dz} e^+(z, n) = (z + z^{-1}) \frac{d}{dz} e^+(z, n) + (1 - z^{-2}) e^+(z, n).$$

Отсюда видно, что при $z = \pm 1$, функция $\frac{d}{dz} e^+(z, n)$ также является решением уравнения (2.1). Предположим, что $e^+(z, n) = 0$ и одновременно $\frac{d}{dz} e^+(z, n) = 0$ при $z = \pm 1$. Тогда решения $e^+(z, n)$ и $\frac{d}{dz} e^+(z, n)$ линейно зависимы. С другой стороны, из (2.2) вытекает, что

$$\frac{d}{dz} e^+(z, n) = \frac{nz^n}{\beta^+(n)} (1 + o(1)), \quad n \to \infty, \ |z| < 1 + \varepsilon.$$

(Дифференцирование асимптотики законно, так как нами уже доказано представление (2.12), в котором $|\varkappa_k| > 1$). Поэтому при $z = \pm 1$ решение $e^+(z, n)$ ограничено, а $\frac{d}{dz} e^+(z, n)$ — неограничено, что противоречит линейной зависимости этих решений.

Следствие 2.1. *Функция Вейля безотражательной якобиевой матрицы есть рациональная дробь вида:*

$$m(z) = zb(-1) \prod_{j=1} \frac{1 - z\lambda_j^{-1}(0)}{1 - z\lambda_j^{-1}(-1)} = \frac{z}{b(-1)} \prod_{j=1}^{N} \frac{z - \lambda_j(0)}{z - \lambda_j(-1)}. \quad (2.15)$$

Доказательство. Поскольку коэффициенты матрицы J ограничены, операторы $J_0^\pm$, порождаемые матрицами $J_0^\pm$ в $l_2(\boldsymbol{Z}_\pm)$, ограничены, и, следовательно, являются самосопряженными. Решения $e^+(z, n)$ и $e^-(z, n)$ принадлежат соответственно $l_2(\boldsymbol{Z}_+)$ при $|z| < 1$ и $l_2(\boldsymbol{Z}_-)$ при $|z| > 1$. Поэтому из формул (1.10) и определения функции Вейля следует, что

$$m(z) = \begin{cases} m^+(z + z^{-1}) = \dfrac{e^+(z, 0)}{e^+(z, -1)}, & |z| < 1 \\[2mm] \dfrac{1}{m^-(z + z^{-1})} = \dfrac{e^-(z, 0)}{e^-(z, -1)}, & |z| > 1. \end{cases}$$

одставляя сюда выражения (2.12), получим, что

$$m(z)=zb(-1)\prod_{j=1}^{N}\frac{1-z\lambda_j^{-1}(0)}{1-z\lambda_j^{-1}(-1)}\quad(|z|<1),$$

$$m(z)=\frac{z}{b(-1)}\prod_{j=1}^{N}\frac{z-\lambda_j(0)}{z-\lambda_j(-1)}\quad(|z|>1).$$

о из (2.14) следует, что

$$\prod_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k(0)}{\lambda_k(-1)}=b^2(-1). \tag{2.16}$$

ткуда видно, что эти выражения совпадают, поэтому имеет место .15).

Раскладывая функцию Вейля в сумму простых дробей, с учетом ойства 4) функции Вейля (лемма 1.1), получаем

$$m(z)=\frac{1}{b(-1)}\left(z+\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j}{z-\lambda_j(-1)}\right), \tag{2.17}$$

$$\alpha_k=\lambda_k(-1)\frac{\prod_{j=1}^{N}(\lambda_k(-1)-\lambda_j(0))}{\prod_{j\neq k}(\lambda_k(-1)-\lambda_j(-1))}. \tag{2.18}$$

Из того, что $m(z)$ есть функция Неванлинны (т. е. ее мнимая сть положительна в верхней и отрицательна в нижней полуплоссти), следует, что $\alpha_k<0$.

Занумеруем числа $\lambda_r(0)$ и $\lambda_r(-1)$ в порядке возрастания. Условися и в дальнейшем такую нумерацию обозначать индексом r. оскольку в других случаях мы будем упорядочивать эти числа по зрастанию величин $\lambda_k+\lambda_k^{-1}$.

Из неравенств $\alpha_k<0$ следует, что

$$\begin{gathered}\lambda_1(0)<\lambda_1(-1)<\lambda_2(0)<\cdots<\lambda_s(0)<\lambda_s(-1)<0,\\ 0<\lambda_{s+1}(-1)<\lambda_{s+1}(0)<\cdots<\lambda_N(-1)<\lambda_N(0).\end{gathered} \tag{2.19}$$

Действительно, если $\alpha_k<0$, то на вещественной оси функция $m(x)$ монотонно растет:

$$\frac{d}{dx}m(x)=\frac{1}{b(-1)}\left(1+\sum_{j=1}^{N}\frac{-\alpha_j}{(x-\lambda_j(-1))^2}\right)>0.$$

Кроме того, $m(\pm\infty)=\pm\infty$ и $m(x)$ имеет простой нуль в нуле. Поэтому ее нули $\lambda_1(0),\ \ldots,\ \lambda_s(0),\ 0,\ \lambda_{s+1}(0),\ \ldots,\ \lambda_N(0)$ и полюсы $\lambda_1(-1),\ \ldots,\ \lambda_s(-1),\ \lambda_{s+1}(-1),\ \ldots,\ \lambda_N(-1)$ перемежаются.

Еще раз подчеркнем, что числа $\lambda_k(n)+\lambda_k^{-1}(n)$ являются собственными значениями матриц J_{n+1}^{+} при $|\lambda_k|<1$, и собственными значениями матрицы J_n^{-} при $|\lambda_k|>1$. Набор чисел $\{\lambda_r(0),\lambda_r(-1)\}_{r=1}^{N}$

однозначно определяет функцию Вейля (коэффициент $b(-1)$) определяется соотношением (2.16)), а следовательно, и матрицу J. Этот набор мы будем называть спектральными данными безотражательной матрицы Якоби.

Тот факт, что спектральные данные являются нулями и полюсами функции Неванлинны $m(z)$, накладывает на них условие перемежаемости (2.19), необходимость которого была доказана выше. В теореме 2.1 будет доказано, что это условие достаточно для того, чтобы числа $\{\lambda_r(0),\ \lambda_r(-1)\}_{r=1}^{N}$ были спектральными данными некоторой безотражательной матрицы.

Выясним взаимосвязь спектральных данных и данных рассеяния.

Лемма 2.2. *Для всех $n \in \boldsymbol{Z}$ числа $\lambda_k(n)$ можно упорядочить так, что будут выполняться неравенства*:

$$\varkappa_1 + \varkappa_1^{-1} < \lambda_1(n) + \lambda_1^{-1}(n) \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_s + \varkappa_s^{-1} \leqslant \lambda_s(n) + \lambda_s^{-1}(n) \leqslant -2$$
$$2 \leqslant \lambda_{s+1}(n) + \lambda_{s+1}^{-1}(n) \leqslant \varkappa_{s+1} + \varkappa_{s+1}^{-1} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N(n) + \lambda_N^{-1}(n) < \varkappa_N + \varkappa_N^{-1}. \tag{2.20}$$

При этом для всех n кроме некоторого конечного множества K имеют место строгие неравенства.

Если для некоторого номера j в (2.20) имеет место равенство и $\varkappa_j = \lambda_j(n)$, то найдется такой номер j', что $\lambda_{j'}^{-1} = \varkappa_j$ и обратно, если для некоторого j $\lambda_j^{-1} = \varkappa_j$, то найдется номер j', такой, что $\lambda_j = \varkappa_j$.

Доказательство. Пусть $K \subset \boldsymbol{Z}$ — множество тех точек n, в которых для некоторого $z = \varkappa_k$ или $z = \pm 1$ выполнено $e^+(z^{-1}, n) \times e^-(z, n) = 0$.

Предположим, что множество K бесконечно. Это означало бы, что найдется такая подпоследовательность $n_j \to \pm\infty$ и число z, равное одному из $\varkappa_k$ или ± 1, для которых одновременно выполняются равенства: $e^+(z^{-1}, n_j)\, e^-(z, n_j) = 0$. Если $z = \pm 1$, то отсюда следует равенство нулю каждого из сомножителей, так как $e^-(z, n)$ и $e^+(z, n)$ имеют одинаковые корни. Если $z = \varkappa_k$, то равенство нулю каждого из сомножителей следует из соотношения (2.6). Если $n_j \to -\infty$, то это противоречит асимптотике $e^-(z, n)$, а если $n_j \to +\infty$, это противоречит асимптотике $e^+(z, n)$. Следовательно, множество K конечно.

Для доказательства неравенств (2.20) рассмотрим поведение функции

$$f(x) = \frac{e^-(x, n)\, e^+(x^{-1}, n)}{A(x)\,(x^{-1} - x)}$$

при $|x| \geqslant 1$, $x \in \boldsymbol{R}$. Все нули числителя в этом выражении принадлежат множеству $\{\lambda_k,\ \lambda_k^{-1}\}_{k=1}^{N}$, а знаменатель имеет простые нули в точках $\{\varkappa_k\}_{k=1}^{N}$ и ± 1. Кроме того, $f(\mp\infty) = \pm 0$, $f(\mp 1) = \pm\infty$.

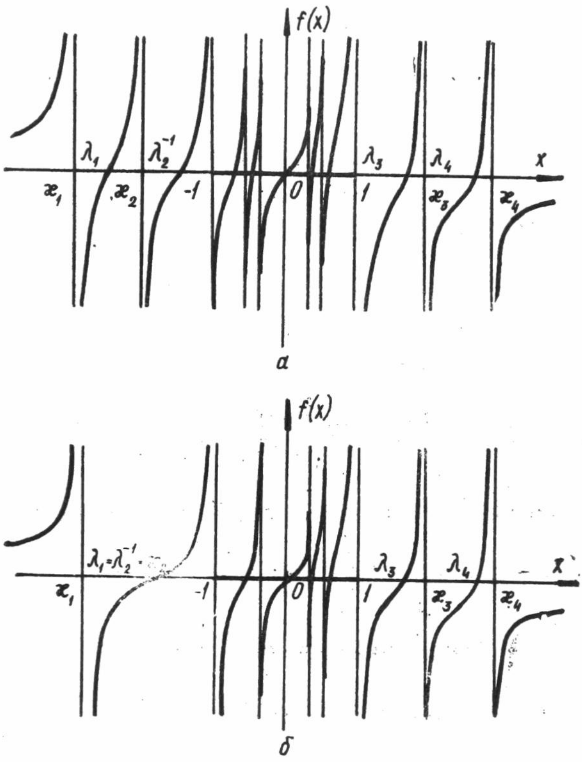
Покажем, что при $|x| > 1$ функция $f(x)$ возрастает на интервалах непрерывности: $f'(x) > 0$. Действительно, из (2.5) вытекает:

$$\frac{1}{f(x)} = b(n)\left(\frac{e^+(x^{-1}, n+1)}{e^+(x^{-1}, n)} - \frac{e^-(x, n+1)}{e^-(x, n)}\right),$$

а из формул (2.7) мы имеем

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)}=(x^{-2}-1)\left(\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\widetilde{\infty}} e^{+}(x^{-1},\, k)^{2}}{e^{+}(x^{-1},\, n)^{2}}+\frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{n} e^{-}(x,\, k)^{2}}{e^{-}(x,\, n)^{2}}\right)<0,\ |x|>1.$$

Поэтому при $n\notin K$ график функции $f(x)$ имеет такой вид, как показано на рисунке, *а*. В этом случае в (2.20) имеют место строгие неравенства. Если же $n\in K$ и одно из чисел $\{\lambda_k, \lambda_k^{-1}\}_{k=1}^{N}$ совпадает с одним из $\varkappa_k$, то в силу (2.6) обязательно найдется другое число из этого набора, равное $\varkappa_k^{-1}$. При этом $\varkappa_k$ будет двукратным корнем функции $e^{-}(x, n)e^{+}(x^{-1}, n)$ и однократным корнем функции $f(x)$ (рисунок, *б*)). Такая ситуация невозможна при $x=\varkappa_1$ и $x=\varkappa_N$, так как



Взаимное расположение спектральных данных χ и данных рассеяния λ

функция $f(x)$ монотонно растет и положительна (отрицательна) при $x\to-\infty$ ($x\to+\infty$). Таким образом, неравенства (2.20) имеют место при всех $n\in \mathbb{Z}$.

Договоримся обозначать через $\hat{z}$ выражение $\hat{z}=z+z^{-1}$. За етим, что

$$(1-za)(1-z^{-1}a)=a(a-\hat{z}). \tag{2.21}$$

Упорядочим числа λ_k в порядке неубывания величин $\hat{\lambda}_k$. Поскольку все числа λ_k различны, равенство $\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_{k+1}$ может выполняться, только если $\lambda_k = \lambda_{k+1}^{-1}$. При этом, согласно лемме 2.2, возможны следующие случаи: $\hat{\lambda}_{k-1} = \varkappa_k = \hat{\lambda}_k = -2$ или $2 < \hat{\lambda}_k = \varkappa_k = \hat{\lambda}_{k+1}$. Будем считать, что индексу k соответствует значение $\lambda_k = \varkappa_k$, а индексу k' — значение $\lambda_{k'}^{-1} = \varkappa_k$, где $k' = k-1$ или $k' = k+1$ соответственно. Таким образом, мы делаем упорядочение величин $\hat{\lambda}_k$ однозначным, даже если среди них есть равные.

Лемма 2.3. *Полиномы*

$$P(w) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{N} (w - \hat{\varkappa}_j), \quad P_0(w) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{N} (w - \hat{\lambda}_j(-1))$$

связаны между собой соотношением

$$P(w) = P_0(w)\left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)\,(w - \hat{\lambda}_j(-1))}\right),$$

где числа α_k определены формулами (2.17).

Доказательство. Согласно формуле (2.5)

$$z^{-1} - z = b(-1)\, W[e^+(z),\ e^+(z^{-1})](-1) =$$
$$= b(-1)\, e^+(z, -1)\, e^+(z^{-1}, -1)\left(\frac{e^+(z^{-1}, 0)}{e^+(z^{-1}, 1)} - \frac{e^+(z, 0)}{e^+(z, -1)}\right) =$$
$$= b(-1)\, e^+(z, -1)\, e^+(z^{-1}, -1)\,(m(z^{-1}) - m(z)).$$

Подставим сюда выражения (2.12) для $e^+(z, -1)$:

$$z^{-1} - z = \frac{b(-1)}{\beta^+(-1)^2} \prod_{j=1}^{N} \frac{(1 - z\lambda_j^{-1}(-1))\,(1 - z^{-1}\lambda_j^{-1}(-1))}{(1 - z\varkappa_j^{-1})\,(1 - z^{-1}\varkappa_j^{-1})}\,(m(z^{-1}) - m(z)).$$

Воспользовавшись (2.14) и (2.21), упростим последнее соотношение:

$$z^{-1} - z = b(-1) \prod_{j=1}^{N} \frac{\hat{z} - \hat{\lambda}_j(-1)}{\hat{z} - \hat{\varkappa}_j}\,(m(z^{-1}) - m(z)).$$

Заметим, что согласно определению чисел α_k

$$b(-1)\,(m(z^{-1}) - m(z)) = z^{-1} - z + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\alpha_j}{z^{-1} - \lambda_j(-1)} - \frac{\alpha_j}{z - \lambda_j(-1)}\right) =$$
$$= (z^{-1} - z)\left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)\,(\hat{z} - \hat{\lambda}_j(-1))}\right).$$

Следовательно,

$$1 = \prod_{j=1}^{N} \frac{\hat{z} - \hat{\lambda}_j(-1)}{\hat{z} - \hat{\varkappa}_j}\left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)\,(\hat{z} - \hat{\lambda}_j(-1))}\right),$$

откуда вытекает утверждение леммы.

Лемма 2.4. *Пусть* $\{\lambda_k(0), \lambda_k(-1)\}_{k=1}^N$ — *спектральные данные некоторой безотражательной матрицы. Тогда нормировочные коэффициенты вычисляются по формулам:*

$$\mu_k^2 = \varkappa_k^3 \frac{\prod_{j\neq k}(\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} \prod_{j=1}^N \frac{\varkappa_k^{-1} - \lambda_j(-1)}{\varkappa_k - \lambda_j(-1)} \tag{2.22}$$

в случае, если $\varkappa_k \neq \lambda_j^{\pm 1}$ *при всех* $j = \overline{1, N}$ *или*

$$\mu_k^2 = \varkappa_k \frac{\prod_{j\neq k}(\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} \left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k(-1)}\right)^{-1} \left(\frac{\alpha_{k'}}{\lambda_{k'}(-1)}\right) \frac{\prod_{j\neq k'} (\varkappa_k^{-1} - \lambda_j(-1))}{\prod_{j\neq k} (\varkappa_k - \lambda_j(-1))}, \tag{2.23}$$

если $\lambda_k = \varkappa_k = \lambda_{k'}^{-1}$.

Доказательство. Из равенств (2.6), (2.8) и (2.9) следует:

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\beta} \prod_{j=1}^N \frac{z - \varkappa_j}{z - \varkappa_j^{-1}}\bigg|_{z=\varkappa_k} = \frac{\mu_k^2}{\varkappa_k} \frac{e^-(\varkappa_k, n)}{e^+(\varkappa_k^{-1}, n)},$$

если $e^+(\varkappa_k^{-1}, n) \neq 0$. Отсюда, с учетом (2.12), получаем

$$\frac{1}{\beta} \frac{\prod_{j\neq k}(\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} = \frac{\mu_k^2}{\varkappa_k} \left(\frac{\varkappa_k^n}{\beta^-(n)} \prod_{j=1}^N \frac{\varkappa_k - \lambda_j(n)}{\varkappa_k - \varkappa_j^{-1}}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\beta^+(n)}{\varkappa_k^{-n}} \prod_{j=1}^N \frac{1 - \varkappa_k^{-1}\varkappa_j^{-1}}{1 - \varkappa_k^{-1}\lambda_j^{-1}(n)}\right).$$

Пользуясь соотношением (2.14), перепишем это равенство в виде

$$\mu_k^2 = \varkappa_k^{-2n+1} \frac{\prod_{j\neq k}(\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} \prod_{j=1}^N \frac{\varkappa_k^{-1} - \lambda_j(n)}{\varkappa_k - \lambda_j(n)},$$

при $n = -1$ это и есть в точности (2.22)

Пусть $\lambda_k(-1) = \varkappa_k = \lambda_{k'}^{-1}(-1)$. Мы имеем $e^+(\varkappa_k^{-1}, n) = 0$ и $e^-(\varkappa_k, n) = 0$ при $n = -1$. Но тогда эти равенства наверняка не выполняются в соседней точке $n = 0$. Поэтому

$$\mu_k^2 = \varkappa_k \frac{\prod_{j\neq k}(\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} \prod_{j=1}^N \frac{\varkappa_k^{-1} - \lambda_j(0)}{\varkappa_k - \lambda_j(0)}.$$

Остается заметить, что

$$\prod_{j=1}^N \frac{\varkappa_k^{-1} - \lambda_j(0)}{\varkappa_k - \lambda_j(0)} = \prod_{j=1}^N \frac{\lambda_{k'}(-1) - \lambda_j(0)}{\lambda_k(-1) - \lambda_j(0)} =$$

$$= \left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k(-1)}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha_{k'}}{\lambda_{k'}(-1)}\right)\frac{\prod\limits_{j\neq k'}(\varkappa_k^{-1}-\lambda_j(-1))}{\prod\limits_{j\neq k}(\varkappa_k-\lambda_j(-1))},$$

откуда вытекает (2.23).

Теорема 2.1. *Для того чтобы набор* $\{\lambda_r^*(-1), \lambda_r^*(0)\}_{r=1}^N$ *вещественных чисел был спектральными данными безотражательной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\lambda_1^*(0)<\lambda_1^*(-1)<\lambda_2^*(0)<\cdots<\lambda_s^*(0)<\lambda_s^*(-1)<0;$$
$$0<\lambda_{s+1}^*(-1)<\lambda_{s+1}^*(0)<\cdots<\lambda_N^*(-1)<\lambda_N^*(0).$$

Доказательство. Необходимость была доказана выше (см. (2.19)).

Достаточность. Пусть $\{\lambda_k^*(-1), \lambda_k^*(0)\}_{k=1}^N$ — набор чисел, удовлетворяющих условию теоремы. Будем считать, числа $\hat{\lambda}_k^*(-1)$ упорядочены по возрастанию. Рассмотрим полином $P^*(w)=R^*(w)\,R^*(w)$, где

$$P_0(w)=\prod_{j=1}^N(w-\hat{\lambda}_j^*(-1));$$

$$R^*(w)=1+\sum_{j=1}^N\frac{\alpha_j^*}{\lambda_j^*(-1)(w-\lambda_j^*(-1))};$$

$$\alpha_k^*=\lambda_k^*(-1)\frac{\prod\limits_{j=1}^N(\lambda_k^*(-1)-\lambda_j^*(0))}{\prod\limits_{j\neq k}(\lambda_k^*(-1)-\lambda_j^*(-1))}.$$

Легко убедиться, что в силу условия теоремы $\alpha_k^*<0$. Поэтому $R^*(\lambda_k^*\pm 0)=\pm\infty$, при $\lambda_k<0$ и $R^*(\hat{\lambda}_k^*\pm 0)=\mp\infty$ при $\lambda_k>0$ и, кроме того, $R^*(\pm\infty)=1$.

Если числа $\lambda_j^*(-1)$ попарно различны, то они являются простыми полюсами функции $R^*(w)$. Последняя меняет знак на интервалах $(-\infty, \lambda_1^*)$, $(\lambda_1^*, \hat{\lambda}_2^*)$, ..., $(\lambda_{s-1}^*, \lambda_s^*)$; $(\lambda_{s+1}^*, \hat{\lambda}_{s+2}^*)$, ..., $(\lambda_N^*, +\infty)$ $(0\in(\hat{\lambda}_s^*, \hat{\lambda}_{s+1}^*)$, причем, поскольку $R(x)$ имеет ровно N нулей, то на каждом из этих интервалов лежит ровно один ее нуль, причем однократный. Если же $\hat{\lambda}_k(-1)=\lambda_{k'}(-1)=\varkappa$, то $\varkappa$ будет двукратным корнем полинома $P_0^*(w)$ и однократным корнем полинома $P^*(w)$. Отсюда следует, что полином $P^*(w)$ имеет N вещественных простых нулей (обозначим их $\varkappa_k$), и выполняются неравенства

$$\varkappa_1<\lambda_1^*(-1)\leqslant\cdots\leqslant\varkappa_s\leqslant\lambda_s^*(-1)\leqslant-2,$$
$$2\leqslant\hat{\lambda}_{s+1}^*(-1)\leqslant\varkappa_{s+1}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_N^*(-1)<\hat{\varkappa}_N. \qquad (2.24)$$

Пусть $\varkappa_k$ — те корни уравнения $\hat{\varkappa}_k = \varkappa + \varkappa^{-1}$, которые по модулю больше единицы. Положим

$$\mu_k^2 = \varkappa_k^3 \frac{\prod\limits_{j \neq k} (\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod\limits_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} \prod_{j=1}^N \frac{\varkappa_k^{-1} - \lambda_j^*(-1))}{\varkappa_k - \lambda_j^*(-1))} \tag{2.25}$$

в случае, если λ_k^* не совпадает ни с одним из $\varkappa_k$, или

$$\mu_k^2 = \varkappa_k \frac{\prod\limits_{j \neq k} (\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod\limits_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} \left(\frac{\alpha_k^*}{\lambda_k^*(-1)}\right)^{-1} \left(\frac{\alpha_{k'}^*}{\lambda_{k'}^*(-1)}\right) \frac{\prod\limits_{j \neq k'} (\varkappa_k^{-1} - \lambda_j^*(-1))}{\prod\limits_{j \neq k} (\varkappa_k - \lambda_j^*(-1))}, \tag{2.26}$$

если $\varkappa_k = \lambda_k^*(-1)$ и $\varkappa_k^{-1} = \lambda_{k'}(-1)$.

Используя неравенства (2.24) и отрицательность чисел α_k^*, легко доказать, что определенные таким образом числа μ_k^2 положительны. Поэтому набор данных $\{\varkappa_k, \mu_k^2\}_{k=1}^N$ является данными рассеяния некоторой безотражательной матрицы Якоби. Докажем, что соответствующие ей спектральные данные $\lambda_k(0)$ и $\lambda_k(-1)$ совпадают с первоначально заданным набором $\lambda_k^*(0)$, $\lambda_k^*(-1)$.

Рассмотрим полиномы следующего вида:

$$T(z) = \prod_{k=1}^N (z - \lambda_k(-1)) \quad \text{и} \quad T^*(z) = \prod_{k=1}^N (z - \lambda_k^*(-1)).$$

Для любого $\varkappa_k$ $(k = \overline{1, N})$

$$\mu_k^2 T(\varkappa_k) = \varkappa_k^3 \frac{\prod\limits_{j \neq k} (\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod\limits_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} T(\varkappa_k^{-1}). \tag{2.27}$$

Действительно, если $\varkappa_k$ не совпадает ни с одним из $\lambda_j^{\pm 1}(-1)$, то равенство (2.27) следует из (2.22). Если же $\lambda_k(-1) = \lambda_k^{-1}(-1) = \varkappa_k$, то правая и левая части этого равенства обращаются в нуль. Аналогичным образом из (2.25) получается соотношение

$$\mu_k^2 T^*(\varkappa_k) = \varkappa_k^3 \frac{\prod\limits_{j \neq k} (\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod\limits_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} T^*(\varkappa_k^{-1}). \tag{2.28}$$

Из (2.27) и (2.28) вытекает тождество:

$$T(z)\, T^*(z^{-1}) \equiv T^*(z)\, T(z^{-1}). \tag{2.29}$$

Действительно, функция $U(z) \stackrel{\text{def}}{=} T(z)\, T^*(z^{-1}) - T^*(z)\, T(z^{-1})$ может быть представлена в виде $U(z) = (z^{-1} - z)\, P_{N-1}(z + z^{-1})$, где $P_{N-1}(\hat{z})$ — некоторый полином степени $N-1$ от z. С другой стороны, $U(\varkappa_k) = 0$ и, следовательно, $P(\varkappa_k) = 0$ при $k = \overline{1, N}$. Поэтому $P_{N-1}(\hat{z}) \equiv 0$ и $U(z) \equiv 0$.

Исходя из (2.29) и пользуясь неравенствами (2.24) и (2.20) докажем теперь, что $\lambda_k(-1) = \lambda_k^*(-1)$, т. е. $T(z)$ и $T^*(z)$ имеют одина-

ковые корни. Доказательство проведем по индукции для $k = \overline{1, s}$, т. е. для отрицательных λ. Примем для λ_k^* такой же принцип нумерации, как для λ_k, т. е. если $\lambda_j^* < \lambda_k^*$, то $j < k$, а если $\hat{\lambda}_{k-1}^* = \varkappa_k = \hat{\lambda}_k^*$, то $(\lambda_{k-1}^*)^{-1} = \varkappa_k = \lambda_k^*$. Мы имеем из (2.24) и (2.20); $\varkappa_1 < \lambda_1 \leqslant \varkappa$ и $\varkappa_1 < \lambda_1^* \leqslant \varkappa$, где $\varkappa = \varkappa_2$ или $\varkappa = -2$. Тогда либо имеют место одновременно оба равенства: $\lambda_1 = \varkappa$ и $\hat{\lambda}_1^* = \varkappa$, либо одно из них не выполнено. В первом случае $\lambda_1^{-1} = (\lambda_1^*)^{-1} = \varkappa_2 = \lambda_2 = \lambda_2^*$ при $\varkappa = \varkappa_2$ или $\lambda_1 = \lambda_1^* = -1$ при $\varkappa = -2$. Во втором случае из неравенства $\hat{\lambda}_1 < \varkappa\,(\lambda_1^* < \varkappa)$ следует, что $T^*(\lambda_1)\,T(\lambda_1^{-1}) = 0$, $T(\lambda_1^{-1}) \neq 0$ $(T(\lambda_1^*) \times T^*(\lambda_1^{*-1}) = 0$, $T(\lambda_1^{*-1}) \neq 0)$ и, значит, $T^*(\lambda_1) = 0\,(T(\lambda_1^*) = 0)$. Пусть равенства $\lambda_j = \lambda_j^*$ доказаны для отрицательных $\lambda_j\,(j = \overline{1, k-1})$. Отметим, что если $\lambda_{k-1} = \varkappa_k$, то сразу получим $\lambda_{k-1} = \varkappa_k = \lambda_k$, и $\lambda_{k-1} = \varkappa_k = \hat{\lambda}_k^*$, откуда $\lambda_{k-1}^{-1} = \varkappa_k = \lambda_k = \lambda_k^*$. Поэтому нуждается в рассмотрении только ситуация, когда

$$\lambda_{k-1} < \varkappa_k < \lambda_k \leqslant \varkappa, \quad \lambda_{k-1} < \varkappa_k < \lambda_k^* \leqslant \hat{\varkappa},$$

где $\varkappa = \varkappa_{k+1}$ или $\varkappa = -2$. Имеем две возможности: $\hat{\lambda}_k = \varkappa = \hat{\lambda}_k^*$ (и тогда $\lambda_k^{-1} = \varkappa = (\lambda_k^*)^{-1}$) или $\lambda_k < \varkappa\,(\lambda^* < \varkappa)$. Во втором случае $T^*(\lambda_k)\,T(\lambda_k^{-1}) = 0$, $T(\lambda_k^{-1}) \neq 0$ $(T(\lambda_k^*)\,T^*(\lambda_k^{*-1}) = 0$, $T^*(\lambda_k^{*-1}) \neq 0)$ и, значит, $T^*(\lambda_k) = 0\,(T(\lambda_k^*) = 0)$.

Наконец, все доказательство для положительных λ проводится аналогично, начиная с λ_N.

Мы показали, что $\lambda_j(-1) = \lambda_j^*(-1)$.

Положим

$$\alpha_k = \lambda_k(-1)\,\frac{\prod\limits_{j=1}^{N}(\lambda_k(-1) - \lambda_j(0))}{\prod\limits_{j\neq k}(\lambda_k(-1) - \lambda_j(-1))}.$$

Тогда, по лемме 2.3,

$$\prod_{j=1}^{N}(w - \hat{\varkappa}_j) = \prod_{j=1}^{N}(w - \hat{\lambda}_j(-1))\left(1 + \sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)\,(w - \lambda_j(-1))}\right).$$

С другой стороны, по построению,

$$\prod_{j=1}^{N}(w - \varkappa_j) = \prod_{j=1}^{N}(w - \lambda_j^*(-1))\left(1 + \sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j}{\lambda_j^*(-1)\,(w - \lambda_j^*(-1))}\right).$$

Так как равенства $\lambda_j(-1) = \lambda_j^*(-1)$ уже доказаны, из двух последних соотношений следует, что

$$1 + \sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j^*}{\lambda_j(-1)\,(w - \lambda_j(-1))} = 1 + \sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)\,(w - \lambda_j(-1))}.$$

В случае $\hat\lambda_k(-1) \neq \hat\lambda_j(-1)$ $(j \neq k)$, отсюда следует, что $\alpha_k = \alpha_k^*$. Если $\lambda_k(-1) \neq \lambda_{k'}^{-1}(-1)$, то

$$\frac{\alpha_k}{\lambda_k(-1)} + \frac{\alpha_{k'}}{\lambda_{k'}(-1)} = \frac{\alpha^*}{\lambda_k(-1)} + \frac{\alpha_{k'}^*}{\lambda_{k'}(-1)},$$

а согласно (2.23) и (2.26)

$$\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k(-1)}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha_{k'}}{\lambda_{k'}(-1)}\right) = \left(\frac{\alpha_k^*}{\lambda_k^*(-1)}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha_{k'}}{\lambda_{k'}(-1)}\right).$$

Следовательно, и в этом случае $\alpha_k = \alpha_k^*$ и $\alpha_{k'} = \alpha_{k'}^*$. По определению чисел α_k и α_k^* и с учетом равенств $\lambda_j(-1) = \lambda_j^*(-1)$, $\alpha_j = \alpha_j^*$ $(j = \overline{1, N})$ мы получаем

$$\prod_{j=1}^{N}(\lambda_k(-1) - \lambda_j^*(0)) = \prod_{j=1}^{N}(\lambda_k(-1) - \lambda_j(0)) \ (k = \overline{1, N}),$$

поэтому полиномы

$$S_N(z) \overset{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{N}(z - \lambda_j(0)) = z^N + c_{N-1}z^{N-1} + \cdots + c_0 \text{ и}$$

$$S_N^*(z) \overset{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{N}(z - \lambda_j^*(0)) = z^N + c_{N-1}^*z^{N-1} + \cdots + c_0^*$$

совпадают в N точках. Следовательно, $S_N(z) = S_N^*(z)$, откуда $\lambda_j(0) = \lambda_j^*(0)$ $(j = \overline{1, N})$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Для того чтобы произвольная матрица Якоби была безотражательной, необходимо и достаточно, чтобы ее функция Вейля была рациональна.*

Доказательство. Необходимость доказана в следствии 2.1. *Достаточность.* Пусть функция Вейля некоторой матрицы J рациональна. Тогда из свойств функции Вейля (лемма 1.1) следует, что, во-первых, $m(z)$ — функция Неванлинны, а во-вторых, $\lim\limits_{z\to 0}\frac{m(z)}{z} = \lim\limits_{z\to\infty}\frac{z}{m(z)} = C$. Последнее позволяет представить функцию $z^{-1}m(z)$ в виде отношения двух полиномов одинаковой степени. Пусть $\lambda_k^*(0)$ и $\lambda_k^*(-1)$ — их нули. Тогда

$$m(z) = zC\prod_{j=1}^{N}\frac{1 - z\lambda_j^{*-1}(0)}{1 - z\lambda_j^{*-1}(-1)} = Cz\prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j^*(-1)}{\lambda_j^*(0)}\prod_{j=1}^{N}\frac{z - \lambda_j^*(0)}{z - \lambda_j^*(-1)}$$

и

$$C = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{m(z)} = \frac{1}{C}\prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j^*(0)}{\lambda_j^*(-1)} \Rightarrow C^2 = \prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j^*(0)}{\lambda_j^*(-1)}.$$

Из того, что $m(z)$ — функция Неванлинны, следует, что, ее нули $\{\lambda_k^*(0)\}_{k=1}^N \cup \{0\}$ и полюсы $\{\lambda_k^*(-1)\}_{k=1}^N$ вещественные, простые и перемежаются. Значит, набор чисел $\{\lambda_r(-1), \lambda_r(0)\}_{r=1}^N$ удовлетворяет

условию теоремы 2.1 и поэтому является спектральными данными безотражательной матрицы. Функция Вейля этой матрицы совпадает с $m(z)$.

Замечание. Из доказательства видно, что верно утверждение: для того, чтобы некоторая рациональная функция $m(z)$ была функцией Вейля, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Im} m(z) \operatorname{Im} z > 0$ ($\operatorname{Im} z \neq 0$) и $\lim\limits_{z\to 0} \frac{m(z)}{z} = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{z}{m(z)} = C > 0$.

3. Приложение [1].

При изучении спектральных свойств оператора Штурма—Лиувилля на полуоси и на всей оси эффективным техническим средством являются операторы преобразования [4]. В этом приложении строится дискретный оператор преобразования для якобиевых матриц. Роль ядра оператора преобразования здесь будет играть бесконечная треугольная матрица. Кроме этого, даются оценки для элементов матрицы преобразования через элементы исходной якобиевой матрицы. В качестве следствия будет доказано существование решений $e^{\pm}(z, n)$.

Рассмотрим конечноразностное уравнение:

$$b(n-1)\psi(n-1) + b(n)\psi(n+1) + a(n)\psi(n) = (z + z^{-1})\psi(n), \tag{3.1}$$

где $b(n) > 0$ и коэффициенты $a(n)$ достаточно быстро стремятся к нулю, а $b(n)$ — к единице при $n \to \pm\infty$.

Сделав замену

$$\psi(n) = \frac{\varphi(n)}{\beta^{+}(n)}, \quad \beta^{+}(n) = \prod_{k=n}^{\infty} b(n),$$

приведем уравнение (4.1) к виду: $\varphi(n-1) + b^2(n)\varphi(n+1) + a(n)\varphi(n) = (z + z^{-1})\varphi(n)$. Полагая $f(n) = a(n)\varphi(n) + (b^2(n) - 1) \times \varphi(n+1)$, получим:

$$\varphi(n-1) + \varphi(n+1) - (z + z^{-1})\varphi(n) = -f(n). \tag{3.2}$$

Если $a(n) = 0$, $b(n) = 1$ при $|n| > N$, то $f(n) = 0$ при $|n| > N$ и уравнение (3.2) становится однородным: $\varphi(n-1) + \varphi(n+1) - (z + z^{-1})\varphi(n) = 0$. Последнее, очевидно, имеет решения z^n и z^{-n}. Это позволяет предположить, что существует решение уравнения (3.2), имеющее вид:

$$\varphi(n) = z^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} K(n, m) z^m. \tag{3.3}$$

Считая правую часть $-f(n)$ уравнения (3.2) известной, мы можем записать формальное частное решение неоднородного уравнения следующим образом:

$$\varphi(n) = z^n - \sum_{k=n+1}^{\infty} f(n+k) S(k), \quad S(k) = \frac{z^k - z^{-k}}{z - z^{-1}}.$$

---

[1] К сожалению, мы не нашли в литературе строгого доказательства существования решений $e^{\pm}(z, n)$ и поэтому для полноты изложения приводим его здесь.

Подставляя выражение (3.3) в это уравнение, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} K(n, n+m) z^m = -\sum_{k=1}^{\infty} a(n+k)\left(z^k + z^k \sum_{m=1}^{\infty} K(n+k, m+n+k) z^m\right) \times$$
$$\times S(k) - \sum_{k=1}^{\infty} (b^2(n+k)-1)\left(z^{k+1} + z^{k+1} \sum_{m=1}^{\infty} K(n+k+1,\right.$$
$$\left. m+n+k+1) z^m\right) S(k).$$

Раскладывая $S(k)$ по степеням z, перемножая соответствующие ряды и приравнивая коэффициенты, получим

$$K(n, n+2l) = -\sum_{k=n+l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} a(k-j) K(k-j, k+j-1) -$$
$$- \sum_{k=n+l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l-1} (b^2(k-j-1)-1) K(k-j, k+j) - \sum_{k=n+l}^{\infty} (b^2(k)-1),$$
$$K(n, n+2l+1) = \sum_{k=n+l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} a(k-j) K(k-j, k+j) -$$
$$- \sum_{k=n+l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} (b^2(k-j)-1) K(k-j+1, k+j+1) - \sum_{k=n+l+1}^{\infty} a(k).$$

Сделав в этих соотношениях подстановку:

$$K_1(n, j) = K(n-j, n+j+1),$$
$$K_2(n, j) = K(n-j, n+j)$$

и заменяя $n+l$ на n, мы приходим к следующей системе рекуррентных формул:

$$K_2(n, l) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} a(k-j) K_1(k-1, j-1) -$$
$$- \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l-1} (b^2(k-j-1)-1) K_2(k, j) - \sum_{k=n}^{\infty} (b^2(k)-1), \quad (3.5)$$
$$K_1 = (n, l) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} a(k-j) K_2(k, j) -$$
$$- \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} (b^2(k-j)-1) K_1(k, j-1) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a(k). \quad (3.6)$$

Поясним последнее утверждение. Полагая $l=0$ в (3.5), имеем:

$$K_1(n, 0) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} a(k).$$

Теперь если при всех $n \in Z$ известны коэффициенты $K_1(n, j)$ для $j = 0, 1, \ldots, l-1$ и известны $K_2(n, j)$ для $j = 1, \ldots, l-1$, то можно вычислить $K_2(n, l)$, пользуясь (3.5) и $K_2(n, j)$, пользуясь (3.6). При этом, если для всех $n \in Z$ соответствующие ряды будут сходиться, мы будем говорить, что система (3.5)—(3.6) разрешима.

Для того чтобы получить оценки элементов $K_i(n, l)$ $(i = 1, 2)$, нам потребуется одно простое утверждение, которое мы приведем без доказательства.

Лемма 3.1. *Пусть $q(n)$ — последовательность неотрицательных чисел, такая, что* $\sum^{\infty} nq(n) < \infty$, $Q(n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} q(k)$. *Тогда 1) ряд* $\sum^{\infty} Q(n)$ *сходится; 2) ряд* $\sum q(n) \exp Q(n)$ *сходится и имеет место оценка*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} q(k) \exp Q(k) \leqslant \exp Q(n) - 1.$$

Пользуясь леммой 3.1, получим теперь нужные нам неравенства для $K_i(n, l)$.

Пусть

$$\sum^{\infty} k\,|a(k)| < \infty \ \text{и} \sum^{\infty} k\,|b^2(k) - 1| < \infty. \tag{3.7}$$

Введем обозначения

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a(k)| \stackrel{\text{def}}{=} q(n) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} q(k) \stackrel{\text{def}}{=} Q(n),$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} |b^2(k) - 1| \stackrel{\text{def}}{=} p(n) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} p(k) \stackrel{\text{def}}{=} P(n).$$

В силу условий (3.7) последовательности q, $Q(n)$ и p, $P(n)$ определены при всех n. Кроме того, они монотонно не возрастают и стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Лемма 3.2. *Если коэффициенты $a(n)$ и $b(n)$ удовлетворяют условию (3.7), то система рекуррентных формул (3.5)—(3.6) разрешима и имеет место оценка:*

$$|K_i(n, l)| \leqslant (q(n) + p(n)) \exp(Q(n - l) + P(n - l)) \quad i = 1, 2. \tag{3.8}$$

Для доказательства применим индукцию по l. При $l = 0$ имеем

$$|K_1(n, 0)| = \Big|\sum_{k=n}^{\infty} a(k)\Big| \leqslant q(n).$$

Пусть оценка (3.8) доказана для $K_1(n, j)$ при $j = 0, \ldots, l - 1$ и для $K_2(n, j)$ при $j = 1, \ldots, l - 1$ $(n \in Z)$. Тогда $|K_2(n, l)| \leqslant$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} |a(k - j)|\,(q(k - 1) + p(k - 1)) \times$$

$$\times \exp(Q(k - j) + P(k - j)) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l-1} |b^2(k - j - 1) - 1| \times$$

$$\times (q(k) + p(k)) \exp(Q(k - j) - P(k - j)) + p(n) \leqslant$$

$$\leqslant (q(n) + p(n)) \sum_{k=n+1}^{\infty} q(k - l) \exp(Q(k - l) + P(k - l)) +$$

$$+ (p(n + 1) + q(n + 1)) \sum_{k=n+1}^{\infty} p(k - l) \exp(Q(k - l + 1) + P(k - l + 1)) +$$

$$+ p(n) \leqslant (q(n) + p(n)) \sum_{k=n+1}^{\infty} (q(k - l) + p(k - l)) \times$$

$$\times \exp(Q(k - l) + P(k - l)) + p(n)$$

и по лемме 3.1, $|K_2(n, l)| \leqslant (q(n)+p(n))(\exp(Q(n-l)+P(n-l)-1)+$ $+p(n) \leqslant (q(n)+p(n))\exp(Q(n-l)+P(n-l))$.

Точно так же получается неравенство $K_1(n, l) \leqslant (q(n)+p(n)) \times$ $\times \exp(Q(n-l)+P(n-l))$.

Делая обратную замену в (3.8), получим

$$|K(n, m)| \leqslant q\left(\left[\frac{n+m}{2}\right]\right)+p\left(\left[\frac{n+m}{2}\right]\right)\exp(Q(n)+P(n)). \qquad (3.9)$$

Из этих оценок и из условий (3.9) видно, что все формально записанные ряды сходятся в круге $|z| \leqslant 1$ и поэтому представление (3.3) имеет место в этом круге. Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 3.1. *При условиях (3.7) и $|z| \leqslant 1$ уравнение (3.1) имеет решение вида*

$$\psi(z, n) = \frac{1}{\beta^+(n)}\left(z^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} K(n, m) z^m\right),$$

$$\beta^+(n) = \prod_{k=1}^{\infty} b(k), \qquad (3.10)^*$$

где элементы матрицы K удовлетворяют неравенству (3.9).

Следствие. *Пусть J — быстроубывающая якобиева матрица на $\mathbf{Z}$, т. е.*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n|a(n)| < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} n|b^2(n)-1| < \infty.$$

Тогда уравнение $(J\psi)(z, n) = (z+z^{-1})\psi(z, n)$ имеет решения $e^+(z, n)$ и $e^-(z, n)$, голоморфные соответственно внутри и вне единичного круга, непрерывные вплоть до его границы, причем

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{|z|\leqslant 1}\left|e^+(z, n) - \frac{z^n}{\beta^+(n)}\right| = 0,$$

$$\lim_{n\to-\infty}\sup_{|z|\geqslant 1}\left|e^-(z, n) - \frac{z^n}{\beta^-(n)}\right| = 0,$$

$$\lim_{z\to 0}\sup_{n>N}\left|z^{-n-1}\left(e^+(z, n) - \frac{z^n}{\beta^+(n)}\right)\right| < \infty,$$

$$\lim_{z\to\infty}\sup_{n<N} z^{-n+1}\left(e^-(z, n) - \frac{z^n}{\beta^-(n)}\right)\Big| < \infty,$$

где

$$\beta^+(n) = \prod_{k=n}^{\infty} b(k), \qquad \beta^-(n) = \prod_{k=-\infty}^{n-1} b(k).$$

---

* Сходимость ряда $\sum^{\infty} k|b^2(k)-1|$ уже означает абсолютную сходимость бесконечного произвеедения $\beta^+(n) = \prod_{k=n}^{\infty} b(k)$.

Существование решения $e^+(z, n)$ вытекает непосредственно из теоремы 3.1. Рассмотрим матрицу J' с коэффициентами $a'(n) = a(-n)$, $b'(n) = b(-n-1)$. Тогда для $\psi(n) = \psi'(n)$ $(J'\psi') = (z + z^{-1})\psi \leftrightarrow J\psi = (z + z^{-1})\psi$. Для доказательства существования решения $e^-(z, n)$ достаточно теперь применить теорему 3.1 к матрице J' и заменить z на z^{-1}.

Список литературы: 1. *Марченко В. А.* Задача Коши для уравнения КдФ с неубывающими начальными данными // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. К., 1990. С. 168—213. 2. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961. 310 с. 3. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М., 1980. 320 с. 4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. К., 1977. 332 с.

Поступила в редколлегию 10.12.90