УДК 519.48

Т. А. АХИЕЗЕР

О ТРЕУГОЛЬНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛЕМ

Статья посвящена классификации квадратичных форм от n-переменных над произвольным полем K относительно группы треугольных преобразований.

1. Предположим, что char $K \neq 2$. Согласно классической теореме (метод Якоби) каждая квадратичная форма, матрица которой имеет ненулевые угловые миноры, может быть приведена к диагональному виду некоторым треугольным преобразованием. Естественно возникает вопрос о классификации квадратичных форм относительно группы треугольных преобразований в общем случае.

Введем несколько определений.

Носителем матрицы A называется матрица, полученная из A заменой на единицу всех ее ненулевых элементов.

Матрица называется *мономиальной*, если она совпадает со своим носителем и в любых ее строке и столбце имеется не более одного ненулевого элемента.

Будем говорить, что квадратичная форма $f(\xi)$ имеет *канонический вид*, если $f(\xi) = d(\xi) + h(\xi)$, где $d(\xi)$ — квадратичная форма с диагональной матрицей, $h(\xi)$-квадратичная форма с мономиальной матрицей, не содержащая квадратов переменных, причем $d(\xi)$ и $h(\xi)$ не содержат общих переменных.

Теорема 1. *Всякая квадратичная форма некоторым невырожденным треугольным преобразованием может быть приведена к каноническому виду.*

Доказательство теоремы 1 (индукция по числу переменных) является некоторой модификацией метода Лагранжа. Пусть имеется форма $f(\xi) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j \; (\alpha_{ij} = \alpha_{ji})$. Если $\alpha_{11} \neq 0$, то, положив $\eta_1 = \xi_1 + \alpha_{11}^{-1} \sum\limits_{i=2}^{n} \alpha_{1i}\xi_i$, $\eta_i = \xi_i \; (i = 2, \ldots, n)$, мы приведем f к виду $\alpha_{11}\eta_1^2 + \varphi(\eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Если $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{1\nu-1} = 0$, $\alpha_{1\nu} \neq 0$, то $f(\xi) = 2\xi_1 \sum\limits_{j=\nu}^{n} \alpha_{1j}\xi + \varphi(\xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Положим $\eta_\nu = \sum\limits_{j=\nu}^{n} \alpha_{1j}\xi_j$, $\eta_i = \xi_i \; (i \neq \nu)$, тогда f примет вид

$2\eta_1\eta_\nu + \psi(\eta_2, \ldots, \eta_n) = 2\eta_1\eta_\nu + 2\sum_{\substack{i=2\\ i\neq\nu}}^{n} \beta_{\nu i}\eta_\nu\eta_i + \beta_{\nu\nu}\eta_\nu^2 + \chi(\eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_{\nu-1}, \eta_{\nu+1}, \ldots, \eta_n)$. Сделаем замену $\zeta_1 = \eta_1 + \sum_{\substack{i=2\\ i\neq\nu}}^{n} \beta_{\nu i}\eta_i + \frac{\beta_{\nu\nu}}{2}\eta_\nu$, $\zeta_i = \eta_i \ (i = 2, \ldots, n)$. Форма примет вид $2\zeta_1\zeta_\nu + \chi(\zeta_2, \ldots, \zeta_{\nu-1}, \zeta_{\nu+1}, \ldots, \zeta_n)$. Таким образом, в обоих случаях задача свелась к меньшему числу переменных.

Теорема 2. *Если две квадратичные формы имеют канонический вид и треугольно эквивалентны, то их мономиальные части совпадают, а диагональные эквивалентны с помощью диагональной невырожденной матрицы.*

Доказательство. Пусть квадратичные формы f_1 и f_2 с матрицами A_1 и A_2 имеют канонический вид и эквивалентны. Это означает, что найдется невырожденная треугольная (для определенности верхнетреугольная) матрица $T = (\tau_{ij})_{i,j=1}^{n}$ такая, что $T'A_1T = A_2$. Следовательно, $T'A_1 = A_2T^{-1}$. Обозначим $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ стандартный базис в пространстве n-мерных столбцов. Матрицы $T'A_1$ и A_2T^{-1} можно рассматривать как матрицы линейных операторов в пространстве столбцовых векторов, причем $T'A_1e_i = A_2T^{-1}e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ **(1)**.

Исследуем это равенство при $i = 1$. $A_2T^{-1}e_1 = A_2\tau_{11}^{-1}e_1 = \tau_{11}^{-1}A_2e_1$. Следовательно, $A_2e_1 = \tau_{11}T'A_1e_1$. Если $A_1e_1 = 0$, то $A_2e_1 = 0$. Если $A_1e_1 = \alpha e_1$, то $A_2e_1 = \tau_{11}\alpha T'e_1 = \tau_{11}\alpha\sum_{i=1}^{n}\tau_{1i}e_i$. Из того, что A_2 — матрица формы, имеющей канонический вид, следует, что $A_2e_1 = \tau_{11}^2\alpha e_1$. Если $A_1e_1 = e_i \ (i \neq 1)$, то $A_2e_1 = \tau_{11}T'e_i = \tau_{11}\sum_{k=i}^{n}\tau_{ik}e_k$; $\tau_{11}\tau_{ii} \neq 0$. Отсюда вытекает, что $A_2e_1 = e_i$.

Поскольку A_1 — матрица формы, имеющей канонический вид, то, кроме этих трех рассмотренных выше случаев, других быть не может. Предположим, что для $i = 1, \ldots, k-1$ имеет место одно из трех утверждений: 1) $A_1e_i = A_2e_i = 0$; 2) $A_1e_i = \alpha e_i$, $A_2e_i = \tau_{ii}^2\alpha e_i$; 3) $A_1e_i = A_2e_i = e_j \ (i \neq j)$.

Покажем, что при $i = k$ также имеет место одно из трех утверждений, сформулированных выше. Воспользуемся равенством (1) $T'A_1e_k = A_2T^{-1}e_k = A_2[\tau_{kk}^{-1}e_k + L(e_1, \ldots, e_{k-1})]$, где $L(e_1, \ldots, e_{k-1})$ — линейная комбинация векторов $e_1, \ldots, e_{k-1}$. Отсюда следует, что $A_2e_k = \tau_{kk}T'A_1e_k + L(A_2e_1, \ldots, A_2e_{k-1})$ (2)
1) Если $A_1e_k = 0$, то равенство (2) означает, что или $A_2e_k = 0$. или A_2e_k линейно выражается через $A_2e_1, \ldots, A_2e_{k-1}$. Последнее невозможно: из того, что A_2 — матрица квадратичной формы,

имеющей канонический вид, следует, что ее ненулевые столбцы линейно независимы. Следовательно, $A_2 e_k = 0$. 2) Если $A_1 e_k = \alpha e_k$, то $A_2 e_k = \tau_{kk} T' \alpha e_k + L(A_2 e_1, \ldots, A_2 e_{k-1}) = \tau_{kk}^2 \alpha e_k + L(e_{k+1}, \ldots$ $\ldots, e_n) + L(A_1 e_1, \ldots, A_1 e_{k-1})$. $L(A_1 e_1, \ldots, A_1 e_{k-1})$ не содержит e_k. Следовательно, $A_2 e_k = \tau_{kk}^2 \alpha e_k$. 3) Если $A_1 e_k = e_j \, (k \neq j)$, то (2) примет вид $A_2 e_k = \tau_{kk} T' e_j + L(A_1 e_1, \ldots, A_1 e_{k-1}) =$ $= \tau_{kk} \tau_{jj} e_j + L(e_{j+1}, \ldots, e_n) + L(A_1 e_1, \ldots, A_1 e_{k-1})$. $L(A_1 e_1, \ldots$ $\ldots, A_1 e_{k-1})$ не содержит e_j, $\tau_{kk} \tau_{jj} \neq 0$. Следовательно, $A_2 e_k =$ $= e_j$. Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие. *Пусть поле K алгебраически замкнуто. Тогда каждая квадратичная форма треугольным невырожденным преобразованием может быть приведена к мономиальной форме, которая определена однозначно.*

2. Рассмотрим формы над полем характеристики 2.

Теорема 3. *Всякая квадратичная форма невырожденным треугольным преобразованием может быть приведена к виду*

$f(\xi) = d(\xi) + h(\xi)$ $(\divideontimes)$, где $d(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \xi_i^2$; $\quad h(\xi) = \xi_{k_1} \xi_{l_1} + \cdots$ $\cdots + \xi_{k_M} \xi_{l_M}$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_M$, $k_i < l_i \, (i = 1, \ldots, M)$.

Доказательство. Пусть $f(\xi) = \sum\limits_{i \leqslant j} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j$. Если $\alpha_{12} = \cdots$ $\cdots = \alpha_{1\nu-1} = 0$, $\alpha_{1\nu} \neq 0$, то положим $\eta_\nu = \alpha_{1\nu} \xi_\nu + \cdots + \alpha_{1n} \xi_n$, $\eta_i = \xi_i$ при $i \neq \nu$. Тогда f примет вид $d(\eta) + \eta_1 \eta_\nu + \varphi(\eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_n) = d(\eta) + \eta_1 \eta_\nu + \sum\limits_{i=2}^{\nu-1} \beta_{i\nu} \eta_i \eta_\nu + \sum\limits_{i=\nu}^{n} \beta_{\nu i} \eta_\nu \eta_i + \Psi(\eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_{\nu-1}, \eta_{\nu+1}, \ldots, \eta_n)$, где $d(\eta)$ — диагональная форма. Сделаем замену $\zeta_1 = \eta_1 + \sum\limits_{i=2}^{\nu-1} \beta_{i\nu} \eta_i + \sum\limits_{i=\nu}^{n} \beta_{\nu i} \eta_i$, $\zeta_i = \eta_i \, (i = 2, \ldots$ $\ldots, n)$. Квадратичная форма примет вид $d(\zeta) + \zeta_1 \zeta_\nu + \Psi(\zeta_2, \ldots$ $\ldots, \zeta_{\nu-1}, \zeta_{\nu+1}, \ldots, \zeta_n)$. Задача свелась к меньшему числу переменных.

Теорема 4. *Если две квадратичные формы имеют вид $(\divideontimes)$ и треугольно эквивалентны, то их внедиагональные части совпадают.*

Доказательство. Пусть $f^{(i)}(\xi) = d^{(i)}(\xi) + h^{(i)}(\xi)$ $(i = 1, 2)$ имеют вид $(\divideontimes)$. $T = (\tau_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — невырожденная треугольная матрица такая, что $f^{(1)}(T\eta) = f^{(2)}(\eta)$. Тогда $h^{(1)}(T\eta)$ также имеет вид $(\divideontimes)$. Точнее, $h^{(1)}(T\eta) = h^{(2)}(\eta) + d(\eta)$, где $d(\eta)$ — некоторая диагональная форма.

Пусть $h^{(1)}(\xi) = \xi_{k_1} \xi_{l_1} + \cdots + \xi_{k_M} \xi_{l_M}$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_M$, $k_i <$ $< l_i \, (i = 1, \ldots, M)$.

Введем матричные обозначения:

$$\begin{pmatrix}\xi_{k_1}\\ \vdots\\ \xi_{k_M}\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}\eta_{k_1}\\ \vdots\\ \eta_{k_M}\end{pmatrix}+N\begin{pmatrix}\eta_{l_1}\\ \vdots\\ \eta_{l_M}\end{pmatrix}+R\begin{pmatrix}\eta_{m_1}\\ \vdots\\ \eta_{m_{n-2M}}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\xi_{l_1}\\ \vdots\\ \xi_{l_M}\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}\eta_{k_1}\\ \vdots\\ \eta_{k_M}\end{pmatrix}+L\begin{pmatrix}\eta_{l_1}\\ \vdots\\ \eta_{l_M}\end{pmatrix}+S\begin{pmatrix}\eta_{m_1}\\ \vdots\\ \eta_{m_{n-2M}}\end{pmatrix}.$$

K, L, N, Q — матрицы размера $M\times M$. R, S — матрицы размера $M\times(n-2M)$. $\{m_1, \ldots, m_{n-2M}\}=\{1, \ldots, n\}\setminus\{k_1, \ldots, k_M, l_1, \ldots, l_M\}$. Из того, что преобразование треугольное, невырожденное и $k_1<k_2<\cdots<k_M$, следует, что K — невырожденная верхнетреугольная матрица. Поскольку $k_i<l_i\ (i=1, \ldots, M)$, то Q — верхнетреугольная с нулевой диагональю. $L=(\lambda_{ij})_{i,j=1}^{M}$; $\lambda_{ii}\neq 0$; $\lambda_{ij}\lambda_{ji}=0$ при $i\neq j$. Действительно, пусть $i<j$. Если $l_i<l_j$, то $\lambda_{ji}=0$. Если $l_j<l_i$, то $\lambda_{ij}=0$. Очевидно, что L — невырожденная матрица.

1) $h^{(1)}(T\eta)$ содержит билинейную форму вида $\sum\alpha_{ij}\eta_{k_i}\eta_{l_j}$ с матрицей $K'L+Q'N$ (штрихом обозначаем транспонирование) и квадратичную форму вида $\sum\beta_{ij}\eta_{k_i}\eta_{k_j}$ с матрицей $K'Q$. Обозначим K_i', Q_i' $(i=1, \ldots, M)$ — строки матриц K', Q'. Q_i, L_i, $N_i\ (i=1, \ldots, M)$ — столбцы матриц Q, L, N. Тогда $\alpha_{ij}=K_i'L_j+Q_i'N_j$; $\beta_{ij}=K_i'Q_j$. Очевидно, что форма $\sum\alpha_{ij}\eta_{k_i}\eta_{e_j}+\sum\beta_{ij}\eta_{k_i}\eta_{k_j}$ имеет вид (✳) $\alpha_{11}=K_1'L_1+Q_1'N_1=K_1'L_1=\varkappa_{11}\lambda_{11}\neq 0$. Следовательно, $\alpha_{1j}=0\ (j=2, \ldots, M)$; $\beta_{1j}=\beta_{j1}\ (j\neq 1$;

α) $\alpha_{1j}=K_1'L_j+Q_1'N_j=K_1'L_j=0\ (j>1)$. Получаем $e_1'L_j=0\ (j>1)$[1].

β) $K_1'Q_j=\beta_{1j}=\beta_{j1}=K_j'Q_1=0\ (j\neq 1)$; $K_1'Q_1=0$. Следовательно, $K_1'Q=0$, т. е. $e_1'Q=0$. Учитывая вид Q, получаем $Q_2=0$.

Предположим, что при $i=1, \ldots, m-1$ имеет место следующее утверждение: $\alpha_{ii}\neq 0$; $Q_{i+1}=0$; $e_i'L_j=0$ при $j>i$. Вычислим $\alpha_{mm}=K_m'L_m+Q_m'N_m=K_m'L_m$. $e_1'L_m=\cdots=e_{m-1}'L_m=0$, поэтому $K_m'L_m=\varkappa_{mm}\lambda_{mm}\neq 0$. Следовательно, $\alpha_{mj}=0$ при $j>m$, $\beta_{mj}=\beta_{jm}\ (j\neq m)$.

α) $\alpha_{mj}=K_m'L_j+Q_m'N_j=K_m'L_j=\varkappa_{mm}e_mL_j=0$.

Получили, что $e_m'L_j=0$ при $j>m$.

---

[1] В дальнейшем через $\{e_i'\}_{i=1}^{n}$ обозначаем стандартный базис в пространстве строк.

β) $K'_m Q_j = \beta_{mj} = \beta_{jm} = K_j Q_m = 0$ при $j \neq m$, $K'_m Q_m = 0$. Следовательно, $K'_m Q = 0$, но $e'_1 Q = \dots = e'_{m-1} Q = 0$. Таким образом, получаем, что $e'_m Q = 0$. Учитывая вид Q, заключаем, что $Q_{m+1} = 0$.

Итак, доказано следующее: $\alpha_{ii} \neq 0$; $Q_i = 0$; $e'_i L_j = 0$ при $j > i$ $(i = 1, \dots, M)$. Первое означает, что $h^{(1)}(T\eta)$ содержит $\sum_{i=1}^{M} \eta_{k_i}\eta_{l_i}$. Второе означает, что матрица $Q = 0$. Третье означает, что L — нижнетреугольная матрица. Кроме того, матрицы K и L связаны соотношением $K'L = I$.

2) $h^{(1)}(T\eta)$ содержит билинейную форму вида $\sum \alpha_{ij}\eta_{k_i}\eta_{m_j}$ с матрицей $K'S$. Из предыдущего ясно, что все коэффициенты этой формы нулевые, т. е. $K'S = 0$. Матрица K невырожденная, следовательно, $S = 0$.

3) $h^{(1)}(T\eta)$ содержит билинейную форму вида $\sum \alpha_{ij}\eta_{l_i}\eta_{m_j}$ с матрицей $L'R$. Аналогично предыдущему заключаем, что $L'R = 0$. Матрица L невырожденная, следовательно, $R = 0$.

4) $h^{(1)}(T\eta)$ содержит квадратичную форму вида $\sum \alpha_{ij}\eta_{l_i}\eta_{l_j}$ с матрицей $N'L$. Из предыдущих результатов следует, что $N'L$ — симметричная матрица.

Итак, 1) — 4) мы доказали, что $h^{(1)}(T\eta) = h^{(1)}(\eta) + \sum_{i=1}^{M} d_i\eta_{l_i}^2$ (3), где d_i $(i = 1, \dots, M)$ — диагональные элементы матрицы $N'L$. Теорема 4 доказана.

Из проведенного доказательства вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма. *Пусть $f^{(1)}(\xi) = d^{(1)}(\xi) + h(\xi)$ треугольным невырожденным преобразованием приводится к виду $f^{(2)}(\eta) = d^{(2)}(\eta) + h(\eta)$, где $h(\xi) = \xi_{k_1}\xi_{l_1} + \dots + \xi_{k_M}\xi_{l_M}$, $k_1 < k_2 < \dots < k_M$, $k_i < l_i$ $(i = 1, \dots, M)$. Тогда*

$$\begin{pmatrix} \xi_{k_1} \\ \vdots \\ \xi_{k_M} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \eta_{k_1} \\ \vdots \\ \eta_{k_M} \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} \eta_{l_1} \\ \vdots \\ \eta_{l_M} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_{l_1} \\ \vdots \\ \xi_{l_M} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \eta_{l_1} \\ \vdots \\ \eta_{l_M} \end{pmatrix}.$$

K — невырожденная верхнетреугольная матрица, L — невырожденная нижнетреугольная матрица. $K'L = I$, $N'L$ — симметричная матрица.

Над алгебраически замкнутым полем можно указать более точный канонический вид, который определен однозначно.

Определение. *Будем говорить, что квадратичная форма f имеет* ***канонический вид,*** *если выполняется одно из следующих условий:*

(α) $f(\xi)=h(\xi)$; (β) $f(\xi)=h(\xi)+\xi_r^2$; (γ) $f(\xi)=h(\xi)+\xi_{k_{m_1}}^2+\cdots+\xi_{k_{m_s}}^2$; ($\delta$) $f(\xi)=[h(\xi)+\xi_{k_{m_1}}^2+\cdots+\xi_{k_{m_s}}^2]+\xi_r^2$, где $h(\xi)=\xi_{k_1}\xi_{l_1}+\cdots+\xi_{k_M}\xi_{l_M}$, $k_1<k_2<\cdots<k_M$, $k_i<l_i$ $(i=1,\ldots,M)$. Кроме того, в случаях (γ) и (δ) $\{m_1, m_2, \ldots, m_s\}\subset\{1,\ldots,M\}$, $k_{m_1}<k_{m_2}<\cdots<k_{m_s}<r$, $l_{m_1}<l_{m_2}<\cdots l_{m_s}$.

Теорема 5. *Всякую квадратичную форму над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 можно привести к каноническому виду.*

Доказательство. Всякая диагональная форма приводится к одному квадрату. Пусть $\alpha_{11}\neq 0$ тогда $\alpha_{11}\xi_1^2+\cdots+\alpha_{nn}\xi_n^2=(\sqrt{\alpha_{11}}\xi_1+\cdots+\sqrt{\alpha_{nn}}\xi_n)^2=\eta_1^2$.

Рассмотрим квадратичную форму $a\xi_1^2+\xi_1\xi_2+b\xi_2^2$. Если $a\neq 0$, то, положив $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{a}}\eta_1$; $\xi_2=\sqrt{a}\eta_2$, мы приведем эту форму к виду $\eta_1^2+\eta_1\eta_2+q\eta_2^2$ $(q=ab)$. Рассмотрим квадратное уравнение $x^2+x+q=0$. Пусть α_1, α_2 — его корни. Тогда $\alpha_1+\alpha_2=1$; $\alpha_1\alpha_2=q$ или $\alpha_2=1+\alpha_1$; $q=\alpha_1+\alpha_1^2$. Сделаем замену $\eta_1=\zeta_1+\alpha_1\zeta_2$; $\eta_2=\zeta_2$. Форма примет вид $\zeta_1^2+\alpha_1^2\zeta_2^2+\zeta_1\zeta_2+\alpha_1\zeta_2^2+q\zeta_2^2=\zeta_1^2+\zeta_1\zeta_2$. Если $a=0$, то, положив $\xi_1+b\xi_2=\eta_1$; $\xi_2=\eta_2$, мы приведем форму к виду $\eta_1\eta_2$.

Рассмотрим произвольную форму, имеющую вид ($\divideontimes$) $f(\xi)=d(\xi)+h(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}\xi_i^2+\sum_{i=1}^{M}\xi_{k_i}\xi_{l_i}$, $k_1<k_2<\cdots<k_M$, $k_i<l_i$ $(i=1,\ldots,M)$. Из приведенных выше рассуждений следует, что треугольным невырожденным преобразованием $f(\xi)$ можно привести к виду

$$[h(\eta)+\sum_{i=1}^{M}\delta_i\eta_{k_i}^2]+\delta\eta_r^2, \tag{4}$$

где $\delta_1,\ldots,\delta_M$, δ равны 0 или 1, причем если $\delta=1$, то $\delta_i=0$ при $k_i>r$. Будем считать, что исходная форма $f(\xi)$ имеет вид (4).

1) Если $\delta_1=\cdots=\delta_M=\delta=0$, то имеем случай α.

2) Если $\delta_1=\cdots=\delta_M=0$, $\delta=1$, то имеем случай β.

3) Если $\delta_1=\cdots=\delta_{m-1}=0$, $\delta=1$, $r<k_m$, то легко видеть, что f имеет тип (β).

4) Если $\delta_1=\cdots=\delta_{m-1}=0$, $\delta_m=1$, $\delta=0$, то $f(\xi)=\sum_{i=1}^{M}\xi_{k_i}\xi_{l_i}+\xi_{k_m}^2+\sum_{i=m+1}^{M}\delta_i\xi_{k_i}^2$. Обозначим $I(m)=\{i=m+1,\ldots,M\mid l_i<l_m\}$. Сделаем замену $\xi_{k_m}=\eta_{k_m}+\sum_{i\in I(m)}\delta_i\eta_{k_i}$, $\xi_{l_i}=\eta_{l_i}+\delta_i\eta_{l_m}$ при $i\in I(m)$, остальные $\xi_j=\eta_j$. Нетрудно прове-

рить, что при такой замене $\sum_{i=1}^{M} \xi_{k_i}\xi_{l_i}$ перейдет в $\sum_{i=1}^{M} \eta_{k_i}\eta_{l_i}$. Что касается всей квадратичной формы f, то она примет вид

$$\sum_{i=1}^{M} \eta_{k_i}\eta_{l_i} + \eta_{k_m}^2 + \sum_{\substack{i=m+1 \\ l_m<l_i}}^{M} \delta_i \eta_{k_i}^2 .$$

Продолжая этот процесс, мы за конечное число шагов сумеем привести f к виду γ.

5) Если $\delta_1 = \cdots = \delta_{m-1} = 0$; $\delta_m = \delta = 1$, $r > k_m$, то $f(\xi) = [h(\xi) + \xi_{k_m}^2 + \sum_{\substack{i=m+1 \\ k_i<r}}^{M} \delta_i \xi_{k_i}^2] + \xi_r^2$. Повторив рассуждения пункта 4), f можно привести к виду δ. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Если две формы $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ имеют канонический вид и треугольно эквивалентны, то они совпадают*[1].

Доказательство. Пусть квадратичные формы $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ имеют канонический вид и треугольно эквивалентны, т. е. существует невырожденная верхнетреугольная матрица $T = (\tau_{ij})_{i,j=1}^{n}$ такая, что $f^{(1)}(T\eta) = f^{(2)}(\eta)$. Из теоремы 4 следует, что внедиагональные части форм $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ совпадают. Пусть внедиагональная часть формы $f^{(1)}(\xi)$ равна $h(\xi) = \xi_{k_1}\xi_{l_1} + \cdots + \xi_{k_M}\xi_{l_M}$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_M$, $k_i < l_i$ $(i = 1, \ldots, M)$. В соответствии с определением канонического вида рассмотрим четыре случая.

α) $f^{(1)}(\xi) = h(\xi)$. Тогда $f^{(2)}(\eta) = h(\eta) + \sum_{i=1}^{M} d_i \eta_{l_i}^2$ в силу (3). Из того, что $f^{(2)}(\eta)$ имеет канонический вид, следует, что $d_i = 0$ $(i = 1, \ldots, M)$ и $f^{(2)}(\eta) = h(\eta)$.

β) $f^{(1)}(\xi) = h(\xi) + \xi_r^2$. В этом случае $f^{(2)}(\eta) = h(\eta) + \sum_{i=1}^{M} d_i \eta_{l_i}^2 + \sum_{i=r}^{n} \tau_{ri}^2 \eta_i^2$. Из того, что $f^{(2)}(\eta)$ имеет канонический вид, следует, что $\sum_{i=1}^{M} d_i \eta_{l_i}^2 + \sum_{i=r}^{n} \tau_{ri}^2 \eta_i^2 = \eta_r^2$, а значит, $f^{(2)}(\eta) = f^{(1)}(\eta)$.

γ) $f^{(1)}(\xi) = h(\xi) + \xi_{k_{m_1}}^2 + \cdots + \xi_{k_{m_s}}^2$, $\{m_1, \ldots, m^s\} \subset \{1, \ldots, M\}$, $k_{m_1} < k_{m_2} < \cdots < k_{m_s}$, $l_{m_1} < l_{m_2} < \cdots < l_{m_s}$. $f^{(2)}(\eta)$ эквивалентно $f^{(1)}(\xi)$ и также имеет канонический вид. Таким образом, здесь выполняются условия леммы. Легко видеть, что матрицы K и L можно считать унитреугольными. Заметим также, что неравенство $l_{m_1} < l_{m_2} < \cdots < l_{m_s}$ влечет за собой $\lambda_{m_i m_j} = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, s)$ (5).

[1] Здесь не требуется алгебраическая замкнутость поля.

Замечание. В частном случае $l_1 < l_2 < \cdots < l_M$ из (5) следует, что матрица L единичная. Поскольку $K'L = I$, то K тоже единичная. Следовательно, в этом случае всякая форма, имеющая вид (4), является полным инвариантом.

Вернемся к общему случаю. Очевидно, что $f^{(2)}(\eta)$ имеет тип (γ). Из вида преобразования и формулы (3) следует, что $\eta^2_{k_{m_1}}$ входит в $f^{(2)}(\eta)$, а $\eta^2_{k_i}$ при $i < m_1$ не входит в $f^{(2)}(\eta)$. Пусть i диагональных слагаемых в формах $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ совпадают при некотором $i \geqslant 1$, а в $(i+1)$-м слагаемом имеется расхождение. Это можно записать так: $f^{(1)}(\xi) = h(\xi) + \xi^2_{k_{m_1}} + \cdots + \xi^2_{k_{m_i}} + \xi^2_{k_t} + \ldots$; $f^{(2)}(\eta) = h(\eta) + \eta^2_{k_{m_1}} + \cdots + \eta^2_{k_{m_i}} + \eta^2_{k_{m_{i+1}}} + \ldots$; $m_1 < m_2 < \cdots \cdots < m_i < m_{i+1}$, $m_i < t$, $m_{i+1} \neq t$; $l_{m_1} < l_{m_2} < \cdots < l_{m_i} < l_{m_{i+1}}$, $l_{m_i} < l_t$. Не ограничивая общности, можем считать, что $m_{i+1} < t$.

Пусть $K = (\varkappa_{rs})^M_{r;\, s=1}$; $L = (\lambda_{rs})^M_{r,\, s=1}$ (см. лемму). Из того, что $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ имеют описанный выше вид, следует, что при $j = 1, \ldots \ldots, i$ $\varkappa_{m_1 r} + \cdots + \varkappa_{m_j r} = 0$ $(m_j < r < m_{j+1})$ **(6)**; $\varkappa_{m_1 m_{i+1}} + \cdots \cdots + \varkappa_{m_i m_{i+1}} = 1$ **(7)**.

Пусть, как и ранее, K'_r $(r = 1, \ldots, M)$ — строки матрицы K', L_s $(s = 1, \ldots, M)$ — столбцы матрицы L. Поскольку $K'L = I$, то $K'_r L_s = \delta_{rs}$ $(r, s = 1, \ldots, M)$ **(8)**. Используя (5), (6) и (8), докажем, что при $j = 1, \ldots, i$ имеет место $\lambda_{rm_1} + \cdots + \lambda_{rm_j} = 0$ $(m_j < r < m_{j+1})$ **(9)**. 1) Покажем, что (9) выполняется при $j = 1$. Рассмотрим систему равенств $K'_r L_{m_1} = 0$ $(m_1 < r < m_2)$. $K'_r L_{m_1} = \sum\limits_{\alpha=m_1}^{r} \varkappa_{\alpha r}\lambda_{\alpha m_1}$. Используя (6), получим $\sum\limits_{\alpha=m_1+1}^{r} \varkappa_{\alpha r}\lambda_{\alpha m_1} = 0$ $(m_1 < r < m_2)$. Эту систему равенств можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных λ_{rm_1} $(m_1 < r < m_2)$. Матрица этой системы треугольная с единичной диагональю. Следовательно, $\lambda_{rm_1} = 0$ $(m_1 < r < m_2)$. 2) Предположим, что равенство (9) имеет место при $j = 1, \ldots, g-1$ $(g \leqslant i)$. Рассмотрим систему $K'_r(L_{m_1} + \cdots + L_{m_g}) = 0$ $(m_g < r < m_{g+1})$. $K'_r(L_{m_1} + \cdots + L_{m_g}) = \sum\limits_{\alpha=m_1}^{r} \varkappa_{\alpha r}\lambda_{\alpha m_1} + \cdots + \sum\limits_{\alpha=m_g}^{r} \varkappa_{\alpha r}\lambda_{\alpha m_g} = (\varkappa_{m_1 r} + \cdots + \varkappa_{m_g r}) + \sum\limits_{\alpha=m_1+1}^{r} \varkappa_{\alpha r}\lambda_{\alpha m_1} + \cdots + \sum\limits_{\alpha=m_g+1}^{r} \varkappa_{\alpha r}\lambda_{\alpha m_g}$. Используя (5), (6) и сделанные предположения, получим

$$\sum_{\alpha=m_g+1}^{r} \varkappa_{\alpha r}(\lambda_{\alpha m_1} + \cdots + \lambda_{\alpha m_g}) = 0 \quad (m_g < r < m_{g+1}).$$

Последнюю систему равенств можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $\lambda_{rm_1} + \cdots + \lambda_{rm_g} (m_g < r < m_{g+1})$. Матрица этой системы треугольная с единичной диагональю. Следовательно, $\lambda_{rm_1} + \cdots + \lambda_{rm_g} = 0$ $(m_g < r < m_{g+1})$. Итак, мы доказали, что при $j = 1, \ldots, i$ имеет место (9).

Рассмотрим равенство $K'_{m_{i+1}}(L_{m_1} + \cdots + L_{m_i}) = 0$. Левую часть можно представить в виде $(\varkappa_{m_1 m_{i+1}} + \cdots + \varkappa_{m_i m_{i+1}}) +$

$$+ \sum_{\alpha=m_1+1}^{m_{i+1}} \varkappa_{\alpha m_{i+1}} \lambda_{\alpha m_1} + \cdots + \sum_{\alpha=m_i+1}^{m_{i+1}} \varkappa_{\alpha m_{i+1}} \lambda_{\alpha m_i}.$$

Используя (5), (7) и (9) получаем, что $K'_{m_{i+1}}(L_{m_1} + \cdots + L_{m_i}) = 1$. Полученное противоречие означает, что $f^{(1)}(\xi) = f^{(2)}(\xi)$.

δ) $f^{(1)}(\xi) = [h(\xi) + \xi^2_{k_{m_1}} + \cdots + \xi^2_{k_{m_s}}] + \xi^2_r$, где $\{m_1, \ldots, m_s\} \subset \{1, \ldots, M\}$, $k_{m_1} < k_{m_2} < \cdots < k_{m_s} < r$, $l_{m_1} < l_{m_2} < \cdots < l_{m_s}$. $f^{(2)}(\eta)$ эквивалентно $f^{(1)}(\xi)$ и имеет канонический вид. Очевидно, что $f^{(2)}(\eta)$ содержит η^2_r и имеет тип δ. Повторив рассуждения, проведенные в пункте γ, мы получим, что $h(\xi) + \xi^2_{k_{m_1}} + \cdots + \xi^2_{k_{m_s}}$ в результате преобразования перейдет в $h(\eta) + \eta^2_{k_{m_1}} + \cdots + \eta^2_{k_{m_s}}$. Следовательно, $f^{(1)}(\eta) = f^{(2)}(\eta)$. Теорема 6 полностью доказана.

Поступила в редколлегию 07.01.82.