

НАУМ ИЛЬИЧ АХИЕЗЕР



Прошло 11 лет со дня смерти Наума Ильича Ахиезера. Ежегодно Харьковское математическое общество собирается в марте на специальное заседание, приуроченное ко дню рождения Наума Ильича и посвященное его памяти. Было прочитано уже не менее десяти докладов, освещающих различные аспекты творчества Ахиезера, его замечательные результаты в теории аппроксимации и в проблеме моментов, в решении классических экстремальных задач, в математической физике. Однако богатства, заключенные в трудах ученого, далеко не исчерпаны, об его идеях, методах и результатах можно рассказывать еще не в одном десятке докладов.

В 1928 по 1936 г. Н. И. Ахиезер опубликовал большую часть своих работ на немецком языке в советских и зарубежных журналах, причем многие из них были опубликованы в малотиражных выпусках «Трудов» и «Записок» Математических обществ Харькова и Лозаны. По этим причинам ряд фундаментальных исследований Ахиезера практически оставался недоступным современному читателю. Это обстоятельство преодолевается Харьковским математическим обществом, под эгидой которого в Издательстве «Основа» будет печататься собрание трудов Н. И. Ахиезера.

Освещение жизни, творчества и значимости математических результатов Н. И. Ахиезера давалось в юбилейных статьях в УМН (2:2 (1951), 16:4 (1961), 26:6 (1971) и в некрологе (УМН, 36:4 (1981)). Все же мы полагаем уместным, опираясь на эти источники, еще раз коснуться основных моментов математической биографии Н. И. Ахиезера, тем более, что она продолжилась и после его смерти благодаря выходу в свет написанных ученым в последние годы жизни великолепных лекционных курсов «Лекции по вариационному исчислению» и «Лекции об интегральных преобразованиях» и в высшей степени интересной историко-математической статьи о чебышевском направлении в теории функций.

Активная научная деятельность Н. И. Ахиезера началась в аспирантуре у Д. А. Граве, которую он проходил с 1925 по 1928 г. Его диссертация «Аеродинамічні досліді» (1928) носила прикладной характер в соответствии с установками Д. А. Граве. Однако из нее был получен ряд интересных чисто математических результатов, в частности формула для конформного отображения двукратно многоугольной области на круговое кольцо, впоследствии неоднократно переоткрывавшаяся. Вместе с тем уже в 1927 г. Н. И. Ахиезер начал заниматься теорией роста целых функций. Его

основные исследования и в дальнейшем были тесно связаны с комплексным анализом даже при решении вещественных задач. Проблема аналитического продолжения и конформных отображений в руках Н. И. Ахиезера нашла неожиданные приложения. Приведем два примера трудных задач, восходящих по постановке к классическим работам П. Л. Чебышева и Е. И. Золотарева и решенных Н. И. Ахиезером.

I. Найти многочлен степени n со старшим коэффициентом единица, наименее уклоняющийся от нуля на объединении двух заданных отрезков (для определенности $[-1, \alpha]$ и $[\beta, 1]$, $-1 < \alpha < \beta < 1$).

II. Найти многочлен $x^n + \sigma x^{n-1} + \rho x^{n-2} + \dots$ с заданными σ и ρ , наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Между прочим, интерес Н. И. Ахиезера к этим задачам возник в переписке с Н. Г. Чеботаревым и, возможно, этим объясняется то, что первый результат Н. И. Ахиезера в указанном направлении был опубликован в Известиях Казанского физико-математического общества (1928 г.). Он относится к задаче I, которая, как оказалось, решается в терминах автоморфных функций Шоттки. Связь этого решения на m отрезках сводится к построению функции Грина плоскости с $2m-1$ вещественными разрезами ($m-1$ из них отрезков и еще $m-1$ отрезков в лакунах между данными отрезками).

Дальнейшее развитие этих идей в 60-х годах привело Н. И. Ахиезера к решению некоторых обратных задач спектрального анализа путем сведения к проблеме Якоби обращения гиперэллиптических интегралов. Таким образом, Н. И. Ахиезеру удалось привнести важные аспекты спектральной теории, положившие основу современной теории нелинейных эволюционных уравнений математической физики, бурное развитие которой началось в 70-е годы. Здесь хочется сказать о поразительных переменах во взглядах математиков на основные ценности их науки. Если в XIX в. не более (а, может быть, и единственно) интересными считались точные решения тех или иных задач (решение алгебраических уравнений в радикалах, эффективное построение инвариантов классических групп, интегрирование в элементарных функциях и квадратурах от них, решения экстремальных задач в элементарных и специальных функциях и т. д.), то в первой половине XX в. благодаря прежде всего Гильберту возобладали абстрактная точка зрения, пренебрегающая конструктивными аспектами (и даже «конструктивист» Пуанкаре провозгласил переход от проблем решения дифференциальных уравнений к качественной теории). С абстрактной точки зрения необходимые и достаточные (нетривиальные, конечно) условия на решение важнее, чем возможность явного решения. Например, теорема Чебышева об альтернансе «интереснее, чем полученный даже с ее помощью явный ответ в той или иной задаче наилучшего приближения».

Однако во второй половине XX в. ориентация шкалы ценностей вновь изменилась! Но внутренний мир таких крупных математиков

ков, каким был Н. И. Ахиезер, не подвержен колебаниям моды. Это тем более впечатляет, что в исследованиях ученого широко использовались, например, идеи и методы функционального анализа, что особенно бросается в глаза при чтении его блестящих «Лекций по теории аппроксимации», где Н. И. Ахиезер легко переходит от общих рассмотрений в банаховых пространствах и алгебрах к тонким аналитическим исследованиям вплоть до нахождения точных констант в конструктивной теории функций. Можно предположить, что Н. И. Ахиезеру был внутренне присущ взгляд, аналогичный пушкинскому: «Все жанры хороши, кроме скучного».

Коль скоро мы затронули тему точных констант, упомянем два результата ученого, ставших классическими.

1) Рассмотрим класс C^r 2π -периодических функций $F(t)$, имеющих абсолютно непрерывную производную $F^{(r-1)}(t)$, удовлетворяющую условию Липшица с константой 1 (для простоты записи). По теореме Джексона,

$$E_{n-1}^{(tr)}[F] \leq A_r/n^r,$$

где $A_r = \text{const}$; $E_{n-1}^{(tr)}[F]$ — наименьшее равномерное отклонение от функции F тригонометрических полиномов степени $\leq n-1$.

Теорема Ахиезера — Крейна — Фавара. Пусть

$$\bar{A}_r = n^r \sup_{F \in C^r} E_{n-1}^{(tr)}[F]$$

— точная постоянная в неравенстве Джексона. Тогда

$$\bar{A}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

2) Как доказал С. Н. Бернштейн, если аналитическая функция f не превышает по модулю единицы внутри эллипса с фокусами $-1, 1$ и полусуммой осей $1/g$, то ее наилучшее приближение на $[-1, 1]$ алгебраическими полиномами степени $\leq n-1$ удовлетворяет неравенству

$$E_{n-1}^{(alg)}[f] \leq \frac{2q^n}{1-q}.$$

Теорема Н. И. Ахиезера. Пусть f — аналитическая функция внутри упомянутого эллипса, $|\operatorname{Re} f| \leq 1$, f вещественна на вещественной оси. Тогда

$$E_{n-1}^{(alg)}[f] \leq \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{q^{(2k+1)n}}{1+q^{2(2k+1)n}},$$

причем существуют функции, для которых достигается знак равенства.

Очень многое в творчестве Н. И. Ахиезера было связано с исследованиями С. Н. Бернштейна, с которым Ахиезер имел тесные научные и личные связи (Н. И. Ахиезер выполнил также огромную работу по редактированию 4-томного академического Собрания сочинений С. Н. Бернштейна).

Еще в 1924 г. С. Н. Бернштейн поставил следующую фундаментальную проблему.

Пусть на вещественной оси задана функция $\Phi(x) > 0$ такая, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\Phi(x)} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Рассмотрим класс C_Φ^0 непрерывных функций $g(x)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\Phi(x)} = 0.$$

Очевидно, все многочлены входят в C_Φ^0 . При каких условиях множество многочленов плотно в C_Φ^0 относительно равномерной нормы с весом Φ :

$$\|g\|_\Phi = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|g(x)|}{\Phi(x)}?$$

Н. И. Ахиезер и С. Н. Бернштейн решили эту проблему в 1953 г. (независимое решение получил С. Н. Мергелян в 1954 г.).

Бернштейновское направление Н. И. Ахиезер развивал также в плане аппроксимации целыми функциями конечной степени (т. е. конечного типа при первом порядке). Здесь ему удалось вновь применить свои аналитические методы для явного решения задач типа Чебышева и Золотарева. Эти методы оказались также адекватными средствами при обобщении знаменитого неравенства С. Н. Бернштейна на функции, аналитические вне некоторого замкнутого подмножества E вещественной оси. Этой важной проблеме посвящена совместная работа Н. И. Ахиезера и Б. Я. Левиной (1960 г.), где установлено, что экстремальная функция связана с конформно отображающей верхнюю полуплоскость на область типа «гребенки». Основание «гребенки» — вещественная ось — образ множества E ; зубцы, торчащие вверх, — образы дополнительных интервалов (лакун). Впоследствии «гребенка» появилась в обратных задачах спектрального анализа оператора Шредингера (В. А. Марченко — И. В. Островский, 1975). Здесь роль E играет спектр оператора, а случай конечного числа лакун («конечнозонный потенциал») является отправным.

Еще один поток работ Н. И. Ахиезера, тесно связанных с теорией экстремальных задач, — это работы об ортогональных полиномах. В 30-х годах Н. И. Ахиезер начал изучать ортогональные (с весом) многочлены на системе интервалов (в завершении этих исследований принял участие Ю. Я. Томчук — один из учеников Н. И. Ахиезера (1963)).

В связи с ортогональными многочленами значительное внимание Н. И. Ахиезер уделит проблеме моментов. Перу ученого принадлежит монография «Классическая проблема моментов» (1961), создающая яркое и цельное впечатление об этом предмете. Именно проблемой моментов был обусловлен интерес Н. И. Ахиезера к общей теории линейных операторов, для которой, по словам ученого, проблема моментов была «путеводной звездой». В теории операторов его наиболее привлекали такие вещи, как спектральные разложения и индексы дефекта. Этот материал — сердцевина книги «Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве» (1950), написанной совместно с И. М. Глазманом. По этой книге, дважды переизданной (1966; 1977—1978 — в двух томах) и переведенной на ряд языков, учились и продолжают учиться математики и физики-теоретики во многих странах мира (в частности, для автора этих строк она была первым введением в серьезную современную математику). Выход второго ее издания был приурочен к Международному конгрессу математиков в Москве (август, 1966 г.), и привезенные на конгресс сотни экземпляров книг были раскуплены со скоростью движения выстроившейся при этом очереди.

Исследования самого Н. И. Ахиезера по проблеме моментов проходили в сотрудничестве с М. Г. Крейном в период 1933—1938 гг. и относились к так называемой L -проблеме моментов А. А. Маркова, где искомый вес ограничивается априори заданной константой $L > 0$. Между прочим, с более поздней точки зрения L -проблема моментов является задачей линейного программирования (в бесконечном пространстве), а полученное в 1938 г. Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном решение в терминах двойственной задачи предвосхищало этот ставший сейчас привычным подход (кстати, наиболее эффективный с прикладной точки зрения).

Свои результаты Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн собрали в книге «О некоторых вопросах теории моментов» (Харьков, 1938 г.). В 1962 г. Американское математическое общество выпустило перевод этой книги на английском языке, сочтя, очевидно, что ее содержание за четверть века не устарело (скорее, наоборот, к этому времени оно стало особенно актуальным).

Перу Н. И. Ахиезера принадлежит более 150 работ. В прилагаемый к настоящей статье список литературы не вошли лишь несколько ранних публикаций, на которые не удалось найти точных ссылок.

Как это было принято в 30-х и 40-х годах, Н. И. Ахиезер, цитируя ту или иную работу, часто не давал полной библиографической ссылки. Список печатных работ Н. И. Ахиезера, прилагаемый к настоящей статье, удовлетворяет современным требованиям. Он был тщательно подготовлен М. Л. Содиным, которому я приношу свою благодарность.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ Н. И. АХИЕЗЕРА

1924

1. *Про одну властивість методи сумування Weierstrass'a* // Науч. зап. К. № 1. С. 72—77.
2. *К теории квадратичных форм* // Изв. Политехн. с.-х. ин-та. Вып. 19. С. 116—123. Совм. с И. Я. Штаерманом.

1925

3. *Ueber eine Anwendung der Eulerschen Transformation* // Зап. физ.-мат. отд. АН УССР. К., 1, № 4. С. 32—33.

1927

4. *Ueber die Zusammenhang zwieschen der Stormerischen Integrations method und Bernullischen Polynomen* // Зап. физ.-мат. отд. АН УССР. К. 2, № 2. С. 16—24. Совм. с И. Я. Штаерманом.
5. *Новий вивід необхідних умов належності цілої функції цілого порядку до певного типу* // Зап. физ.-мат. отд. АН УССР. К., 2, № 3. С. 29—33.
6. *Про деякі застосування сумацийної формули Poisson'a* // Зап. ин-та нар. просв. К., 2. С. 157—162.
7. *Sur les fonctions entières d'ordre entier* // Rend. Circ. Math. Palermo. 31. P. 390—393.
8. *К теории роста целых функций внутри некоторого угла* // Тр. Всерос. мат. съезда. С. 208—212.
9. *О вычислении сил, действующих на аэропланное крыло* // Тр. Всерос. мат. съезда. С. 252—254.

1928

10. *Ueber einige Funktionen die in gegebenen Intervallen am wenigsten von N abweichen* // Изв. Казан. физ.-мат. об-ва. 3, № 3. С. 1—69.
11. *Аеродинамічні досліді* // Тр. физ.-мат. отд. АН УССР. К., 7. С. 1—247.

1929

12. *Об одной задаче Е. И. Золотарева* // Изв. АН СССР. № 10. С. 919—931.

1930

13. *Нова форма остачі в Taylor' овій формулі для функцій багатьох змінних* // Зап. Нежин. ин-та нар. просв. 10. С. 223—227.
14. *Про одне узагальнення теореми Е. Landau* // Зап. Нежин. ин-та нар. просв. 10. С. 228—234.
15. *О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля* // Тр. 1-го Всесоюз. мат. съезда. С. 284—289.
16. *О некоторых полиномах наименьшего уклонения* // ДАН СССР. С. 489—494.
17. *Об экстремальных свойствах некоторых дробных функций* // ДАН СССР. С. 495—499.
18. *Asymptotische Lösung einer Aufgabe über Polynome minimaler Abweichung* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 4. С. 141—144.
19. *Ueber ein Tschebyscheffsches Extremumproblem* // Math. Ann. 104. S. 739—744.
20. *Sur les polynomes de Tschebycheff pour deux segments* // C. R. Acad. Sci. (Paris). 191. P. 754—756.
21. *Sur les proprietes asymptotiques des quelques polynomes* // C. R. Acad. Sci. (Paris). 191. P. 916—918.
22. *Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation de quelques fractions par polynomes* // C. R. Acad. Sci. (Paris). 191. P. 991—993.

1931

23. *Об асимптотических свойствах полиномов на двух интервалах* // Изв. АН СССР. № 2. С. 161—178.
24. *Об одной минимум-проблеме теории функций и о числе корней алгебраического уравнения, которые лежат внутри единичного круга* // Изв. АН СССР. № 9. С. 1169—1189.

1932

25. *Ueber asymptotische Grösse der besten Annäherung einiger rationalen Funktionen durch Polynome* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 5. С. 37—47.
26. *Ueber einige Funktionen welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, I* // Изв. АН СССР. № 9. С. 1163—1202.
27. *Аеродинаміка*. Х., ОНТВУ. 148 с. Совм. с В. И. Путятюй.

1933

28. *Ueber einige Funktionen welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, II* // Изв. АН СССР. № 3. С. 309—344.
29. *Ueber einige Funktionen welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, III* // Изв. АН СССР. № 4. С. 499—536.
30. *Ueber eine extremale Eigenschaft rationaler Funktionen* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 6. С. 39—45.
31. *Курс теорії функцій*. Елементи загальної теорії функцій комплексного змінного. Х., ОНТВУ. 290 с.

1934

32. *Ueber Jacksonschen Approximationsatz* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 8. С. 3—12.
33. *Ueber eine Eigenschaft der «elliptischen» Polynome* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 9. С. 3—8.
34. *Ueber Fouriersche Reihen beschränkter summierbaren Funktionen und ein neues Extremumproblem, I* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 9. С. 9—28. Совм. с М. Г. Крейном.
35. *Ueber Fouriersche Reihen beschränkter summierbaren Funktionen und ein neues Extremumproblem, II* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 10. С. 3—32. Совм. с М. Г. Крейном.
36. *О рядах Фурье ограниченных суммируемых функций* // Тр. II Всесоюз. мат. съезда. 2. С. 151. Совм. с М. Г. Крейном.

1935

37. *Sur une formule de quadrature de Tchebycheff* // C. R. Acad. Sci. (Paris). 200. P. 890—893. Совм. с М. Г. Крейном.
38. *Ueber eine Transformation der reellen Toeplitzschen Formen und das Momentenproblem in einem Intervalle* // (Зап. Харьк. мат. об-ва. 11. С. 21—26. Совм. с М. Г. Крейном.
39. *Bemerkung über extremale Eigenschaften einiger mit Transformation der elliptischen Funktionen zusammenhängender Brüche* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 11. С. 27—34.

1936

40. *О двух минимум-проблемах, связанных с проблемой моментов* // ДАН СССР. 10, № 9. С. 331—334. Совм. с М. Г. Крейном.
41. *Das Momentumproblem bei zusätzlichen Bedingung von A. Markoff* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 12. С. 13—36. Совм. с М. Г. Крейном.
42. *Bemerkung zur Arbeit ueber Fouriersche Reichen beschränkter summierbarer Funktionen und eine neues Extremumproblem* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 12. С. 37—40. Совм. с М. Г. Крейном.
43. *Verallgemeinerung einer Korkin-Zolotareffschen Minimum-Aufgabe* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 13. С. 3—14.

1937

44. *Об одном применении неравенства Г. Бора и Ж. Фавара* // ДАН СССР. 14, № 7. С. 419—422. Совм. с Б. М. Левитаном.
45. *О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций* // ДАН СССР. 15, № 3. С. 107—112. Совм. с М. Г. Крейном.
46. *Проблема моментів на двох інтервалах при додатковій умові А. А. Маркова* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 14. С. 47—60. Совм. с М. Г. Крейном.
47. *О наилучшем приближении одного класса непрерывных периодических функций* // ДАН СССР. 17, № 9. С. 451—454.

48. *Про теорему акад. С. Н. Бернштейна відносно квадратурної формули* П. Л. Чебишева // Журн. ин-та мат. АН УССР. К. 3. С. 75—82.
49. *Про одну теорему С. Бохнера* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 14. С. 75—80.

1938

50. *О наилучших приближениях аналитических функций* // ДАН СССР. 18. С. 241—244.
51. *О некоторых вопросах теории моментов*. Х., ОНТУ. 253 с. Совм. с М. Г. Крейном.
52. *Деякі зауваження про коефіцієнти квадратурних формул Гаусовського типу* // Тр. Одес. ун-та. 2. С. 29—38. Совм. с М. Г. Крейном.

1940

53. *Лекции по теории аппроксимации*. Х. 137 с.
54. *О построении потока, обтекающего тонкий профиль* // Сб. тр. ин-та мат. АН УССР. 4. С. 151—156.
55. *О некоторых формулах квадратур* П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. Сб. памяти акад. Граве. С. 15—28. Совм. с М. Г. Крейном.
56. *Some remarks about three papers of Verblunsky* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 16. С. 129—134. Совм. с М. Г. Крейном.
57. *О максимальных симметрических операторах в гильбертовом пространстве* / Науч. зап. Авиаци. ин-та. Х. 3, № 1. С. 3—8.

1941

58. *Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов* // Успехи мат. наук. 1. С. 126—156.

1945

59. *О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов* // Изв. АН СССР. 9. С. 275—290.
60. *Об одном предложении А. Н. Колмогорова и одном предложении М. Г. Крейна* // ДАН СССР. 50. С. 35—40.
61. *Общая теория полиномов П. Л. Чебышева* // Научное наследие П. Л. Чебышева. 1. М. С. 5—42.

1946

62. *Краткий обзор трудов П. Л. Чебышева* // П. Л. Чебышев. Избранные математические труды. М. С. 171—189.
63. *О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа* // Изв. АН СССР. 10. С. 411—428.
64. *О полиномах Б. М. Левитана* // ДАН СССР. 54. С. 3—6.
65. *Про один клас інтегральних операторів* // Сб. тр. ин-та мат. АН УССР. 8. С. 113—130.

1947

66. *Лекции по теории аппроксимации*. М. 325 с.
67. *Конструктивная теория функций в Харьковском университете и Математическом ин-те, 1917—1947* // Успехи мат. наук. 2, вып. 3. С. 158—174.
68. *Интегральные операторы с ядрами Карлемана* // Успехи мат. наук. 2, вып. 5. С. 93—131.
69. *О взвешенном приближении многочленами непрерывных на всей числовой оси функций* // ДАН СССР. 57. С. 315—318. Совм. с К. И. Бабенко.
70. *Русский математик А. А. Марков (к 25-летию со дня смерти)* // Природа. № 8. С. 76—81.

1948

71. *Элементы теории эллиптических функций*. М. 291 с.
72. *О некоторых вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси, I* // Зап. Харьк. мат. об-ва. 19. С. 21—25.
73. *К теории целых функций конечной степени* // ДАН СССР. 63. С. 475—478.

74. Андрей Андреевич Марков. Биографический очерк / А. А. Марков. Избранные труды. М. С. 9—12.
75. Примечания к книге А. А. Марков. Избранные труды. М. С. 377—390.

1949

76. Проблема моментов А. А. Маркова относительно любого числа интервалов // Укр. мат. журн. 3. С. 41—50.
77. Об интерполировании целых трансцендентных функций конечной степени // ДАН СССР. 65, № 6. С. 781—784.
78. О некоторых вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси, II // Зап. Харьк. мат. об-ва. 21. С. 5—9. Совм. с В. А. Марченко.

1950

79. О решениях степенной проблемы моментов в неопределенном случае // Зап. Харьк. мат. об-ва. 22. С. 99—106.
80. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М. 483 с. Совм. с И. М. Глазманом.

1952

81. Об интерполировании целых трансцендентных функций конечной степени // Зап. Харьк. мат. об-ва. 23. С. 5—26. Совм. с Б. Я. Левиным.
82. Доказательство правила множителей изопериметрической задачи // Зап. Харьк. мат. об-ва. 23. С. 91—93.
83. Об одном обобщении лемм Шварца и Левнера // Зап. Харьк. мат. об-ва. 23. С. 95—101. Совм. с М. Г. Крейном.
84. О целых функциях конечной степени, наименее уклоняющихся от нуля // Мат. Сб. 31. С. 415—438.
85. О целых трансцендентных функциях конечной степени, имеющих майоранту на последовательности вещественных точек // Изв. АН СССР. 16, № 4. С. 353—364.
86. Об одном семействе целых функций конечной степени и одной Чебышевской задаче // Изв. АН СССР. 16, № 5. С. 459—468.

1953

37. Обобщение теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов // ДАН СССР. 92. С. 1109—1112. Совм. с С. Н. Бернштейном.
38. О слабо весовых функциях // ДАН СССР. 93, № 6. С. 949—952.

1954

89. О наилучшем взвешенном приближении на всей числовой оси посредством целых функций конечной степени // ДАН СССР. 94. С. 983—986.
90. Об одном обобщении преобразования Фурье и теоремы Винера — Палей // ДАН СССР. 96. С. 889—892.
91. О некоторых спаренных интегральных уравнениях // ДАН СССР. 98. С. 333—336.
92. Работа Н. Я. Сонина по приближенному вычислению определенных интегралов / Н. Я. Сонин. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М. С. 219—243.

1955

93. П. Л. Чебышев и его научное наследие / П. Л. Чебышев. Избранные труды. М. С. 843—887.
94. Лекции по вариационному исчислению. М. 248 с.
95. К 90-летию со дня рождения Владимира Андреевича Стеклова // Тр. Харьк. Политехн. ин-та, сер. инж.-физ. 5, № 1. С. 3—14.
96. О теореме единственности для уравнения теплопроводности // Тр. Харьк. Политехн. ин-та, сер. инж.-физ. 5, № 1. С. 51—55.
97. Академик С. Н. Бернштейн и его работы по конструктивной теории функций. Х. 112 с.

1956

98. Харьковское математическое общество // Зап. Харьк. мат. об-ва. 24. С. 31—39.
99. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси // Успехи мат. наук. 11, вып. 4. С. 3—43.
100. Экстремальные свойства целых трансцендентных функций конечной степени. Тр. III Всесоюз. мат. съезда. 2. М. С. 25.
101. К задаче о дифракции электромагнитных волн у круглого отверстия в плоском экране // ДАН СССР. 109. С. 53—56. Совм. с А. Н. Ахиезером.
102. К теории нормальных рядов С. Н. Бернштейна / С. Н. Бернштейн. Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Х. С. 83—94.

1957

103. К теории спаренных интегральных уравнений // Зап. Харьк. мат. об-ва. 25. С. 5—31.
104. Эффективное граничное условие на поверхности раздела мультиплицирующей и замедляющей сред // Журн. техн. физ. 27. С. 822—829. Совм. с А. И. Ахиезером и Г. Я. Любарским.
105. Об обращении некоторых сингулярных интегралов // Зап. Харьк. мат. об-ва. 25. С. 191—198. Совм. с В. А. Щербиной.
106. О некоторых классах непрерывных функций, порождающих эрмитово положительные ядра // Зап. Харьк. мат. об-ва. 25. С. 205—217. Совм. с И. М. Глазманом.
107. Неравенства для производных, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна // ДАН СССР. 117. С. 735—738. Совм. с Б. Я. Левиным.
108. Борис Яковлевич Левин (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 12, вып. 2. С. 237—242. Совм. с Н. В. Ефимовым.

1960

109. О полиномах, ортогональных на дуге окружности // ДАН СССР. 130, № 2. С. 247—250.
110. Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах // ДАН СССР. 134, № 1. С. 9—12.
111. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М. С. 111—165. Совм. с Б. Я. Левиным.

1961

112. К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах / ДАН СССР. 138, № 4. С. 743—746. Совм. с Ю. Я. Томчуком.
113. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М. 310 с.
114. Одна экстремум-проблема относительно многочленов // Ann. Univ. Sci. Budapestinensis. 3—4. P. 9—14. Совм. с М. Г. Крейнсом.
115. Вклад С. Н. Бернштейна в теорию дифференциальных уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 16, вып. 2. С. 5—20. Совм. с И. Г. Петровским.
116. Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов // ДАН СССР. 141, № 2. С. 263—265.
117. Континуальный аналог многочленов, ортогональных на дуге окружности // ДАН СССР. 141, № 4. С. 769—772.
118. О некоторых формулах обращения // Зап. Харьк. мат. об-ва. 27. С. 91—95.

1962

119. Some questions in the theory of moments / Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island. 265 p. Совм. с М. Г. Крейнсом.

1963

120. Об одном уравнении Штурма—Лиувилля на полуоси // Зап. Харьк. мат. об-ва. 29. С. 44—52.

1964

21. *Континуальный аналог некоторых теорем о теплицевых матрицах* // Укр. мат. журн. 16, № 4. С. 445—462.
22. *Об уравнениях Лямэ* // Зап. Харьк. мат. об-ва, 30. С. 5—17.
23. *Ортогональные многочлены на системе интервалов и их континуальные аналоги* / Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. 2. С. 623—628.

1965

24. *Лекции по теории аппроксимации*. М. 407 с.
25. *О максимуме на луче производной от монотонной целой функции нормального типа порядка половина* // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1. С. 136—140.
26. *Экстремальные свойства целых функций экспоненциального типа* // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1. С. 111—135.
27. *The classical moment problem and some related questions in analysis*. Edinburgh, Oliver & Boyd. 253 p.
28. *Борис Моисеевич Левитан (к пятидесятилетию со дня рождения)* // Успехи мат. наук. 20, вып. 3. С. 227—234. Совм. с В. А. Марченко.

1966

29. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. 543 с. Совм. с И. М. Глазманом.

1968

30. *О континуальных аналогах многочленов, ортогональных на окружности* // Укр. мат. журн. 20, № 1. С. 3—24. Совм. с А. М. Рыбалко.

1969

1. *Замечания к статье А. М. Рыбалко «О преобразовании Фурье в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ с весом»* // Мат. физика, функцион. анализ. Тр. ФТИНТ АН УССР. 1. С. 165—172.
32. *Сергей Натанович Бернштейн, некролог* // Успехи мат. наук. 24, вып. 3. С. 211—219. Совм. с П. С. Александровым, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоровым.
33. *Израиль Маркович Глазман, некролог* // Успехи мат. наук. 24, вып. 5. С. 215—219. Совм. с Э. М. Жмудем, Ю. И. Любичем, В. А. Марченко.
34. *Алексей Васильевич Погорелов (к пятидесятилетию со дня рождения)* // Укр. мат. журн. 21, № 3. С. 354—360. Совм. с Я. П. Бланком, В. А. Марченко и Ю. А. Митропольским.

1970

135. *Элементы теории эллиптических функций*. Изд. 2-е, перераб. М. 304 с.

1971

136. *Об одном неопределенном уравнении чебышевского типа в задачах построения ортогональных систем* // Мат. физика и функцион. анализ. Тр. ФТИНТ АН УССР. 2. С. 3—14.

1973

137. *О сепаратно-аналитических функциях многих переменных и теоремах «Об острие клина»* // Успехи мат. наук. 28, вып. 3. С. 27—42. Совм. с Л. И. Ронкиным.

1976

138. *О сепаратно аналитических функциях многих переменных* // Вопросы математической физики и функционального анализа. К. С. 3—10. Совм. с Л. И. Ронкиным.

1977

139. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, 1. Х. 316 с. Совм. с И. М. Глазманом.

140. Борис Яковлевич Левин (к семидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 32, вып. 5. С. 211—213. Совм. с Н. В. Ефимовым, М. Г. Кремом, М. А. Лаврентьевым, В. А. Марченко, И. В. Островским, Б. В. Шубовым.

1978

141. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2. X. 288 с. Совм. с И. М. Глазманом.
142. К спектральной теории уравнения Ляме / Историко-математические исследования, вып. 23. С. 77—86.

1980

143. Theory of linear operators in Hilbert space. Vols. I, II. Pitman Press. 200 с. Совм. с И. М. Глазманом.

1981

144. Вариационное исчисление. X. 168 с.

1984

145. Лекции об интегральных преобразованиях. X. 120 с.

1987

146. Чебышевское направление в теории функций // Математика XIX века. С. 9—79.

1988

147. The Calculus of Variations. New York, Harwood Academic Publishers. 280 с.
148. Lectures on integral transforms American Mathematical Soc. Providence Rhode Island. 108 p.

15. И. Я.