УДК 517.947

В. А. ЗОЛОТАРЕВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

I. В работе [1] построены функциональные модели коммутирующей системы операторов. Относительно системы $\{A_k\}$, действующей в гильбертовом пространстве H, предполагается, что

а) $(A_k)_I H \subseteq (A_1)_I H$, $(\forall k)$, $2i(A_k)_I = A_k - A_k^*$;

б) $(A_1)_I \geqslant 0$.

Кроме того, будем считать, что $(A_1)_I H$ — конечномерно.

Пусть $z_t = \exp(i \sum t_k A_k)$, а система $\{A_k\}$ является простой. Тогда функциональная модель полугруппы z_t запишется в следующем виде:

$$\tilde{z}_t = P_{P_S} \begin{bmatrix} e^{i(\delta_t y + \gamma_{1,t}^-)} & 0 \\ 0 & e^{i(\sigma_t y + \gamma_{1,t}^+)} \end{bmatrix} \Bigg|_{P_S}, \tag{1}$$

где $t \in K$ — выпуклый острый конус в R^n, а гильбертово пространство P_S, в котором действует модель, имеет вид

$$P_S = \left\{ \begin{bmatrix} f_- \\ f_+ \end{bmatrix} \in L^2 \begin{pmatrix} I & \tilde{S}^* \\ \tilde{S} & I \end{pmatrix}; \begin{matrix} f_- + \tilde{S}^* f_+ \in H_+^2(E) \\ \tilde{S} f_- + f_+ \in H_-^2(E) \end{matrix} \right\}$$

$$(\sigma_t = \sum t_k \sigma_k;\ \gamma_{1,k}^{\pm} = \sum t_k \gamma_{1,k}^{\pm};\ \sigma_k = \sigma_k^*;\ \gamma_{1,k}^{\pm} = (\gamma_{1,k}^{\pm})^*).$$

Через $H_{\pm}^2(E)$ обозначены пространства Харди E-значных функций, отвечающих полуплоскостям $C_{\pm}$, а через $\tilde{S}(y)$ обозначена характеристическая функция оператора A_1.

II. Обозначим через Q алгебраическую кривую в C^n:

$$Q = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in C^n;\ Q_{1,k}(\lambda_1, \lambda_k) = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}, \tag{2}$$

где

$$Q_{1,k}(\lambda_1, \lambda_k) = \det[\sigma_k \lambda_1 - \sigma_1 \lambda_k + \gamma_{1,k}^-].$$

Характеристическая функция $\tilde{S}(y)$ удовлетворяет условиям сплетаемости:

$$\tilde{S}(y)(\sigma_k y + \gamma_{1,k}^-) = (\sigma_k y + \gamma_{1,k}^+)\tilde{S}(y),\ (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Здесь мы ограничимся случаем $n = 2$. Обозначим через $h^{\pm}(P)$ вектор

$$h^{\pm}(P) \in \ker(\sigma_2 \lambda_1 - \sigma_1 \lambda_2 + \gamma_{1,2}^{\pm}), \tag{3}$$

где $P = (\lambda_1, \lambda_2) \in Q$, т. е. $h^{\pm}(P)$ — собственные вектора линейных пучков,

$$(\sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{1,2}^{\pm}) h^{\pm}(P) = \lambda_2 h^{\pm}(P),$$

которые мы будем нормировать условием $h_r^{\pm}(P)=1$ ($h_r^{\pm}(P)$ — «r-я» компонента $h^{\pm}(P)$).

Нетрудно показать, что число полюсов векторов-функций $h^{\pm}(P)$ равно $N=g+r-1$ (g — род $\boldsymbol{Q}$, $r=\dim E$).

Выделим на римановой поверхности $\boldsymbol{Q}$ правильные аналоги полуплоскостей $\boldsymbol{C}_{\pm}$ и вещественной оси $\boldsymbol{R}$. В силу функциональной модели (1) классы Харди $H_{\mp}^2(E)$ соответствуют полуплоскостям $\pm\operatorname{Im}\lambda_1>0$, и, значит, естественно определить

$$\boldsymbol{Q}_{\pm}=\{P\in\boldsymbol{Q};\ \pm\operatorname{Im}\lambda_1(P)>0\},\ \boldsymbol{Q}_0=\partial\boldsymbol{Q}_{\pm}.$$

Будем называть $\boldsymbol{Q}_0$ разрезами поверхности $\boldsymbol{Q}$. В силу самосопряженности $\sigma_2\lambda_1+\gamma_{1,2}^{\pm}$, $\lambda_1\in\boldsymbol{R}$ особенности $h^{\pm}(P)$ (3) лежат на $\boldsymbol{Q}_0$.

Каждую из вектор-функций $f(\lambda_1)\in L^2(\boldsymbol{R},\ E)$ ($\lambda_1\in\boldsymbol{R}$) разложим по ортогональному базису собственных векторов $h^+(P_k)$ (3) ($P_k=(\lambda_1,\ \lambda_2^k(\lambda_1))\in\boldsymbol{Q}$), $f(\lambda_1)=\sum h^+(P_k)\cdot\|h^+(P_k)\|_E^{-2}\cdot g(P_k)$, скалярные функции $g(P_k)$ имеют вид $g(P_k)=\langle f(\lambda_1),\ h^+(P_k)\rangle_E$ (здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$, как и $\|\cdot\|_E$, в смысле евклидового пространства E). Определим гильбертово пространство:

$$L^2(h^+,\ d\lambda_1)=\left\{f(P)=h^+(P)\cdot\|h^+(P)\|_E^{-2}\,g(P);\ \int\limits_{\mathbf{Q}_0}\|f(P)\|_E^2\,d\lambda_1<\infty\right\},$$

где $h^+(P)$ — собственный вектор (3) пучка $\sigma_2\lambda_1+\gamma_{1,2}^{+}$, а $g(P)$ — скалярная, измеримая на $\boldsymbol{Q}_0$ функция, имеющая такие же особенности, что и $h^+(P)$ (с учетом кратности), причем

$$\int\limits_{\mathbf{Q}_0}|g(P)|^2\,\frac{d\lambda_1}{\|h(P)\|^2}<\infty.$$

Через $H_{\mathbf{Q}_{\pm}}^2(h^+,\ d\lambda_1)$ обозначим пространства Харди, образованные функциями из $L_{\mathbf{Q}_0}^2(h^+,\ d\lambda_1)$, скалярные компоненты которых $g(P)$ голоморфно продолжаемы в области $\boldsymbol{Q}_{\pm}$. Аналогично определяются пространства $L_{\mathbf{Q}_0}^2(h^-,\ d\lambda)$ и $H_{\mathbf{Q}_{\pm}}^2(h^-,\ d\lambda_1)$.

Из свойств сплетаемости следует

$$S^*(\lambda_1)\,h^*(P)=\theta(P)\,h^-(P), \tag{4}$$

где $P=(\lambda_1,\ \lambda_2)\in\boldsymbol{Q}_0$, а $\theta(P)$ — скалярная на $\boldsymbol{Q}_0$ функция, которая благодаря нормировке $h^{\pm}(P)$ легко вычисляется. Из (4) следует, что $\theta(P)=\langle S^*(\lambda_1)\,h^+(P),\ h^-(P)\rangle\cdot\|h^-(P)\|_E^{-2}$ и, кроме того, $\theta(P)$ равна «r-й» компоненте вектора $S^*(\lambda_1)\,h^+(P)$.

Теорема. *Пусть* $\dim E=r<\infty$, $\sigma_1=I_E$, $\operatorname{rank}\sigma_2=l$, $n=2$ *и кривая* $\boldsymbol{Q}$ в $\boldsymbol{C}^2$ *неособая. Тогда на* $\boldsymbol{Q}$ *существуют векторные поля* $h^+(P)$ *с неспециальными дивизорами полюсов* $D_{\pm}$, $\deg D_{\pm}=g+r-1$ ($P=(\lambda_1,\ \lambda_2)\in\boldsymbol{Q}$), *что функциональная модель простой коммутативной системы* A_1, A_2 *(для которой имеют место а), б)) имеет вид*

$$\mathring{A}_k f(P)=P_{\overset{\circ}{H}}\lambda_k(P)\,f(P),\ (k=1,\ 2), \tag{5}$$

где $\lambda_1(P)$ и $\lambda_2(P)$ имеют на Q_0 r и l полюсов (с учетом кратности) соответственно; $f(P) \in \mathring{H}$. Модельное пространство $\mathring{H}$ имеет вид

$$\mathring{H} = \left\{ f(P) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix};\ \begin{matrix} f_1 \in H^2_{Q_\pm}(h^-,\ d\lambda_1) \ominus \theta(P) H^2_{Q_\pm}(h^-,\ d\lambda_1) \\ f_2 \in \Delta(P) L^2_{Q_\pm}(h^-,\ d\lambda_1) \theta\Delta(P) H^2_{Q_\pm}(h^-,\ d\lambda_1) \end{matrix} \right\}, \quad (6)$$

где $\Delta^2(P) = 1 - \theta(P)\theta^*(P) = 1 - |\theta(P)|^2,\ P \in Q_0$.

III. **Пример 1.** *Пусть* $\dim E = 2$ *и*

$$\sigma_1 = I_E,\ \sigma_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix},\ \gamma = \gamma^{\pm}_{1,2} = \begin{bmatrix} n & m \\ \overline{m} & n \end{bmatrix},$$

$a > 0$; $n \in R$, $m \in C$). *Кривая* Q (2) *имеет вид*

$$(n - \lambda_2)^2 - a^2\lambda_1^2 = |m|^2. \quad (7)$$

Точками ветвления будут $\lambda_2 = h \pm |m|$, т. е. кривая (7) является двулистной римановой поверхностью рода $g = 0$, полученной из двух λ_2 листов C, склеенных крест-накрест вдоль разрезов $(-\infty,\ n - |m|] \cup [n + |m|,\ \infty)$. Так как $a \operatorname{Im} \lambda_1 = \operatorname{Im} \sqrt{(n - \lambda_2)^2 - |m|^2}$ может менять знак лишь на разрезах, то Q_+ и Q_- — первый и второй из листов Q, а Q_0 — упомянутые выше разрезы. Для (7) $l = r = 2$. Униформизируем (7) при помощи функций

$$\lambda_1(u) = -\frac{|m|}{a} \operatorname{ctg} u;\ \lambda_2(u) = n - \frac{|m|}{\sin u}, \quad (8)$$

где $u \in \Gamma$; фундаментальная область $\Gamma = \{u \in C;\ \operatorname{Re} u \in [0;\ 2\pi]\}$. Группу F порождают сдвиги $u \to u + 2\pi$. Так как $\operatorname{Im} \lambda_1 = \frac{|m|}{2a} \frac{\operatorname{sh}(2 \operatorname{Im} u)}{|\sin u|^2}$, то $\Gamma_\pm = \{u \in \Gamma;\ \pm \operatorname{Im} u > 0\}$, $\Gamma_0 = \{u \in \Gamma;\ \operatorname{Im} u = 0\}$. Собственные вектора пучка $(\sigma_2\lambda_1 + \gamma) h = \lambda_2 h$ имеют вид

$$h = h^\pm = \begin{bmatrix} \frac{m}{\lambda_2 - a\lambda_1 - h} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{i\psi} \operatorname{ctg} \frac{u}{2} \\ 1 \end{bmatrix};\ (\psi = \arg m), \quad (9)$$

полюс h (он один $N = 1$) расположен в точке $u = 0$. Так как $d\lambda_1(u) = |m|\, du / a \sin^2 u$, то

$$L^2_{\Gamma_0}(h,\ d\lambda_1) = \left\{ f = h(u) \cdot g(u) \cdot \|h(u)\|^{-2};\ \int_0^{2\pi} |g(u)|^2 \frac{du}{\cos^2 \frac{u}{2}} < \infty \right\},$$

где h имеет вид (9); $g(u)$ — скалярная функция на $[0;\ 2\pi]$; $g(u + 2\pi) = g(u)$ и имеющая нуль в точке π. Пространства Харди $H^2_{\Gamma\pm}(h,\ d\lambda_1)$ образуют такие $f \in L^2_{\Gamma_0}(h,\ d\lambda_1)$, скалярная компонента которых допускает голоморфное продолжение в полуполосы $\Gamma_\pm$.

Функции $\lambda_k(u)$ (8) имеют по 2 одинаковых простых полюса в точках 0 и π. Функциональную модель (полагая для простоты $\theta(u)$ внутренней) реализуем формулами (5) в пространстве

$$H^2_{\Gamma_+}(h, d\lambda_1) \ominus \theta(u) H^2_{\Gamma_+}(h, d\lambda_1).$$

Отметим, что множители типа Бляшке для скалярной 2π-периодической функции $\theta(u)$ имеют вид

$$\frac{\sin(u - \overline{u_k})}{\sin(u - u_k)} \cdot \frac{\sin u_k}{\sin \overline{u_k}},$$

где $u_k \in \Gamma_-$. Функция $\theta(u)$, наследуя особенности $S(\lambda_1)$, приобретает также простой полюс в точке $u = 0$, ибо, если $S_{i,j}(\lambda_1)$ — матричные элементы $S(\lambda_1)$, то $\theta(u) = S_{2,2}(\lambda_1(u)) - e^{i\psi} \operatorname{ctg}\frac{u}{2} S_{2,1} \times \times (\lambda_1(u))$.

Пример 2. *Предположим, что* $\dim E = 3$ *и*

$$\sigma_1 = I_E,\ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \gamma = \gamma^{\pm}_{1,2} = \begin{bmatrix} -k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & k^{-1} - 2 \end{bmatrix},$$

где $a > 0$; $k \in (0, 1)$; $b = \sqrt{2(k^{-1} - 1)}$. Кривая третьего порядка $\boldsymbol{Q}$ (2) имеет вид

$$k^2 a^2 \lambda_1^2 (1 - \lambda_2) = (1 + \lambda_2)(1 - k^2 \lambda_2^2). \tag{10}$$

Полагая $\zeta = ka\lambda_1(1 - \lambda_2)$, приходим к алгебраической кривой Лежандра [2]:

$$\zeta^2 = (1 - \lambda_2^2)(1 - k^2 \lambda_2^2). \tag{11}$$

Двулистная риманова поверхность (11) рода $g = 1$ образуется при клеивании «крест-накрест» двух λ_2 плоскостей $\boldsymbol{C}$ вдоль разрезов $(-\infty, k^{-1}] \cup [-1, 1] \cup [k^{-1}, \infty)$. Так как

$$ka \operatorname{Im} \lambda_1 = \operatorname{Im} \sqrt{\frac{1 + \lambda_2}{1 - \lambda_2}(1 - k^2 \lambda_2^2)}$$

меняет знак лишь на разрезах, то областям $\boldsymbol{Q}_+$ и $\boldsymbol{Q}_-$ отвечает один из листов римановой поверхности $\boldsymbol{Q}$, а $\boldsymbol{Q}_0 = \partial \boldsymbol{Q}_\pm$ совпадает с разрезами на $\boldsymbol{R}$. Очевидно, что $r = 3$, $l = 2$, $g = 1$. На (11) существует единственный ($g = 1$) абелев дифференциал первого рода [2]:

$$\omega = \frac{d\lambda_2}{\sqrt{(1 - \lambda_2^2)(1 - k^2 \lambda_2^2)}}, \tag{12}$$

что позволяет посредством эллиптического интеграла

$$u(P) = \int_{P_0}^{P} \omega,\ (P,\ P_0 \in \boldsymbol{Q}), \tag{13}$$

установить конформное отображение между (11) и прямоугольником, $\Gamma = \{u \in \boldsymbol{C};\ \mathrm{Re}\, u \in [-2K,\ 2K],\ \mathrm{Im}\, u \in [-iK',\ iK']\}$, с надлежащим отождествлением сторон, где $P_0 = (0,\ 1)$, а $4K$ и $2iK$ — периоды замкнутого дифференциала ω (12). Обращение эллиптического интеграла (13) приводит к униформизации кривой (11) в терминах функций Якоби [2]: $\zeta = sn'u$, $\lambda_2 = snu$, а отсюда и кривой (10)

$$\lambda_1(u) = \frac{sn'u}{ka(1 - snu)};\ \lambda_2(u) = snu. \tag{14}$$

Функция $\lambda_2(u)$ имеет $l = 2$ простых полюса в точках $u = iK'$, $2K + iK'$, а $\lambda_1(u)$ — $r = 3$ простых полюса $ka\lambda_1(u) = \zeta(u - iK') + \zeta(u - 2K - iK') - 2\zeta(u - K)$, где $\zeta(u)$ — дзета-функция Вейерштрасса [2].

Собственные вектора пучка $(\sigma_2 \lambda_1 + \gamma) h = \lambda_2 h$ имеют вид

$$h = \begin{bmatrix} \dfrac{ka\lambda_1}{1 + k\lambda_2} \\ \dfrac{b}{\lambda_2 - 1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{sn'u}{(1 - snu)(1 + ksnu)} \\ \dfrac{b}{snu - 1} \\ 1 \end{bmatrix};\ P = (\lambda_1,\ \lambda_2). \tag{15}$$

Вектор h имеет полюс второго порядка в точке $\lambda = 1$ и первого порядка — в $\lambda_2 = -K^{-1}$, $(N = 3)$, что соответствует значениям $u = K$ и $u = -K + iK'$ соответственно. Изоморфизм (13) переводит $\boldsymbol{Q}_+$ в прямоугольник $\Gamma_+ = \{u \in \Gamma;\ \mathrm{Im}\, u \in (0,\ iK')\}$, при этом $\Gamma_0 = \partial\Gamma_+ = \{u \in \Gamma;\ \mathrm{Im}\, u = 0\} \cup \{u \in \Gamma;\ \mathrm{Im}\, u = iK'\}$. Фундаментальную группу F порождают сдвиги $u \to u + 4K$, $u \to u + 2iK'$. Гильбертово пространство

$$L^2_{\Gamma_0}(h,\ d\lambda_1) = \left\{f = h(u) \cdot \| h(u) \|^{-2} g(u);\ \int_{\Gamma_0} | g(u) |^2 m(u)\, du < \infty\right\},$$

где $m(u)\, du = d\lambda_1(u)/\| h(u) \|^2$ — абелев дифференциал, —

$$\frac{d\lambda_1}{\| h(P) \|^2} = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{1 - \lambda_2}{1 + \lambda_2} \cdot \frac{1 + k\lambda_2}{1 - k\lambda_2}} = \frac{ksn'u}{(1 + snu)(1 - ksnu)}\, du.$$

Скалярная функция $g(u)$ обращается в нуль при $u = K + iK'$, $(\lambda_2 = -1)$, $u = K\ (\lambda_2 = K^{-1})$. Функциональная модель реализуется в (6), где $h(u)$ имеет вид (15), а операторы (5) являются операторами «умножения» на эллиптические функции (14).

Зная матричные элементы $s(\lambda_1)$, получим, что

$$\theta(P) = s_{3,1}(\lambda_1) \frac{ka\lambda_1}{1 + k\lambda_2} + s_{3,2}(\lambda_1) \frac{b}{\lambda_2 - 1} + s_{3,3}(\lambda_1)$$

и, значит, $\theta(P)$ «будет иметь» особенности в точках $\lambda_1 = 1$, $-k^{-1}$.

Список литературы: 1. *Золотарев В. А.* Модельные представления коммутативных систем линейных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1988. 22, № 1. С. 66—68. 2. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960. 159 с. 3. *Павлов Б. С.* Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов // Тр. седьмой зимн. шк. Дрогобыч. М., 1976. 99 с.

Поступила в редколлегию 12.03.90