УДК 517.5

М. Г. ЗАЙДЕНБЕРГ

СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ И ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ

Эта статья — вторая часть работы, первая часть которой содержится в [1][1]. Принятая в ней нумерация продолжает нумерацию в [1]; двойная ссылка [1 [n]] означает [n] в списке литературы в [1]. В первых двух пунктах § 3 доказаны теоремы пикаровского и монтелевского типа для голоморфных сечений семейств кривых. Теорема 3.1, доказательство которой опирается на «теорему о доминировании» (теорему 2.1) из первой части, служит модификацией теоремы Нишино [1 [8]]. В теоремах 3.2 и 3.3 результаты Ногучи [1 [7]] распространены на некомпактные семейства кривых. В следующей работе[2] дано применение этих теорем к доказательству некомпактной версии теоремы Манина о кривых над функциональными полями. Здесь, в пункте 3.3, с их помощью получены близкие к необходимым достаточные условия мероморфности решений функциональных уравнений. Это дает, в частности, обобщение одной теоремы И. В. Островского [2]. Кроме того, в пункте 3.3 указано положительное решение проблемы, поставленной в работе А. Э. Еременко [3].

В § 4 даны «коллективные» оценки роста голоморфных отображений произвольных комплексных пространств в квазипроективные гиперболические кривые, обобщающие классические оценки Шоттки—Ландау (1906) [7, 8] роста голоморфных в круге функций, выпускающих два значения (теорема 4.1 и следствия 4.1 — 4.4).

Автору приятно выразить свою искреннюю признательность Н. М. Бланк, Е. А. Горину, А. Э. Еременко, В. Я. Лину, И. В. Островскому, А. М. Улановскому и другим коллегам, общение с которыми и ценные указания по отдельным вопросам, затронутым во второй части, были весьма полезны.

§ 3. Гиперболичность и голоморфные сечения.

3.1. Теорема пикаровского типа для голоморфных сечений.

Определение 3.1. *Пусть $f: X \to S$ — семейство кривых* (см. *пункт*[1] *2.1*). Обобщенным голоморфным сечением *семейства f будем называть такое голоморфное отображение проколотого круга $\sigma: \Delta^* \to X$, что отображение $\rho = f \circ \sigma: \Delta^* \to S$ непостоянно и допускает голоморфное продолжение $\bar{\rho}: \Delta \to S$.*

Теорема 3.1. *Пусть $f: X \to S$ — семейство кривых общего типа*[2]*, допускающее компактификацию*[3] *$\bar{f}: \bar{X} \to \bar{S}$. Тогда каждое обобщенное голоморфное сечение $\sigma: \Delta^* \to X$ имеет голоморфное продолжение $\bar{\sigma}: \Delta \to \bar{X}$.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение в случае, когда поверхность X нормальна. Пусть ω — достаточно малый диск

[1] При ссылках на первую часть работы номер [1] опускается.

[2] *Зайденберг М. Г.* Функциональный аналог гипотезы Морделла: некомпактная версия // Изв. АН. Сер. мат. 1989, 53, № в. С. 731—752.

[3] См. определения 2.5.

в S с центром в точке $s_0 = \bar\rho(0)$. По теореме 2.1, существует семейство $g: Y \mapsto R$, мероморфно доминирующее f, и такая его компактификация $\bar g: \bar Y \mapsto \bar R$, что поверхность Y g-относительно гиперболически вложена[1] в $\bar Y$ и отображение доминирования $\Phi: Y \to X$ продолжается до мероморфного отображения $\bar\Phi$, замыкающего коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
\bar Y \arrow[r, maps to, "\bar\Phi"] \arrow[d, maps to, "\bar g"'] & \bar X \arrow[d, maps to, "\bar f"] \\
\bar R \arrow[r, maps to, "\bar\varphi"] & \bar S
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

(ср. с диаграммой (5)).

Пусть r_0— один из $\bar\varphi$-прообразов точки s_0 в R и Ω—такая односвязная окрестность точки r_0 в R, что $\bar\varphi(\Omega) = \omega$ и $\bar\varphi \mid \Omega: \Omega \to \omega$ — циклическое накрытие порядка k с ветвлением в точке r_0. Положим $\omega^* = \omega \setminus \{s_0\}$, $\Omega^* = \Omega \setminus \{r_0\}$, $X_{\omega^*} = f^{-1}(\omega^*)$, $Y_{\Omega^*} = g^{-1}(\Omega^*)$ и $\Phi_{\Omega^*} = \Phi \mid Y_{\Omega^*}$. Тогда $\Phi_{\Omega^*}: Y_{\Omega^*} \to X_{\omega^*}$ — неразветвленное голоморфное циклическое накрытие порядка k.

Так как утверждение теоремы локальное, то можно считать, что $\rho(\Delta^*) \subset \omega^*$. Пусть $\sigma_k(z) = \sigma(z^k)$ и $\rho_k(z) = \rho(z^k) = f^{\partial}\sigma_k(z)$ $(z \in \Delta^*)$. Тогда существуют голоморфные отображения $\tilde\rho_k$ и $\tilde\sigma_k$, замыкающие коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
Y_{\Omega^*} \arrow[rr, maps to, "\Phi_{\Omega^*}"] \arrow[d, maps to, "g"'] & & X_{\omega^*} \arrow[d, maps to, "f"] \\
& \Delta^* \arrow[ul, dashed, "\tilde\sigma_k"'] \arrow[ur, maps to, "\sigma_k"] \arrow[dl, dashed, "\tilde\rho_k"] \arrow[dr, maps to, "\rho_k"'] & \\
\Omega^* \arrow[rr, maps to, "\bar\varphi \mid \Omega^*"'] & & \omega^*
\end{tikzcd}
$$

В силу g-относительной гиперболической вложенности Y в $\bar Y$ можно считать, что область Y_{Ω^*} гиперболически вложена в $\bar Y$. По теореме Квак—Кобаяси—Кирнана [1[6]] существует голоморфное продолжение $\breve\sigma_k: \Delta \mapsto \bar Y$ отображения $\tilde\sigma_k$.

Положим $\bar\sigma_k = \bar\Phi \circ \breve\sigma_k$ (см. (6)). Множество точек неопределенности мероморфного отображения $\bar\sigma_k: \Delta \to \bar X$ имеет коразмерность 2, поэтому $\bar\sigma_k$ голоморфно и служит продолжением отображения σ_k. Пусть $\delta > 0$ настолько мало, что образ $\sigma(\Delta_\delta^*)$ содержится в координатной окрестности точки $x_0 = \bar\sigma_k(0)$ и вместе с ней — в ограниченной области в C^N. По теореме Римана о стирании особенностей σ продолжается до голоморфного отображения $\bar\sigma: \Delta \to \bar X$. Это завершает доказательство в случае, когда поверхность X нормальна.

---

[1] См. определение 2.6.

В общем случае рассмотрим нормализацию $\nu: \overline{X}_{\mathrm{norm}} \mapsto \overline{X}$ и нормальное семейство кривых $\tilde{f}: \overline{X}_{\mathrm{norm}} \mapsto \overline{S}$, где $\tilde{f} = \bar{f} \circ \nu$. Пусть $N(\overline{X})$ — «локус ненормальности» поверхности $\overline{X}$. Известно[1], что $N(\overline{X})$ — собственное замкнутое аналитическое множество.

В случае, когда $\sigma(\Delta^*) \subset N(\overline{X})$, обозначим через N_1 неприводимую компоненту множества $N(\overline{X})$, содержащую $\sigma(\Delta^*)$. Пусть, как и раньше, $s_0 = \bar{\rho}(0) \in S$ и $\overline{\Gamma}_{s_0}(\bar{f}) = \bar{f}^{-1}(s_0)$. Согласно определению 3.1 $\rho \neq \mathrm{const}$; отсюда, как легко видеть, следует, что $N_1 \cap \overline{\Gamma}_{s_0}(\bar{f})$ — конечное множество. Для фиксированной его окрестности $U \subset \overline{X}$ найдется такое $\delta > 0$, что $\sigma(\Delta_\delta^*) \subset U$. Остается воспользоваться теоремой Римана о стирании особенностей.

Пусть, далее, $\sigma(\Delta^*) \not\subset N(\overline{X})$. Тогда существует голоморфное отображение $\tilde{\sigma}$, замыкающее коммутативный треугольник[2]:

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\mathrm{norm}} \arrow[d, "\nu"] \\
\Delta^* \arrow[ur, dashed, mapsto, "\tilde{\sigma}"] \arrow[r, mapsto, "\sigma"'] & \overline{X}
\end{tikzcd}$$

Так как поверхность $\overline{X}_{\mathrm{norm}}$ нормальна, то в силу доказанного выше отображение $\tilde{\sigma}$ допускает голоморфное продолжение $\bar{\tilde{\sigma}}: \Delta \to \overline{X}_{\mathrm{norm}}$. Ясно, что $\bar{\sigma} = \nu \circ \bar{\tilde{\sigma}}$ — искомое голоморфное продолжение отображения σ. Теорема доказана.

Замечания. 1. Верен (с тем же доказательством) локальный вариант этой теоремы (см. замечание 1 к теореме 2.1). 2. Теорема 3.1 служит модификацией теоремы Нишино (см. [1 [8]], гл. 1, п. 2, теорема 1 и гл. II, п. 2, с. 548). В ней речь идет о продолжении обычных голоморфных сечений; доказательство, существенно отличное от приведенного здесь доказательства теоремы 3.1, дается отдельно для семейств кривых рода $\geqslant 2$, рода 1 и рода 0. В работе Т. Кицука[3] формулируется без доказательства и используется обобщение теоремы Нишино для многозначных голоморфных сечений.

Следствие. *В условиях теоремы 3.1 каждое голоморфное сечение σ: $S_0 \to X$ семейства f, заданное на открытом по Зарискому подмножестве $S_0 \subset \overline{S}$, продолжается до голоморфного сечения $\bar{\sigma}_1$: $\overline{S} \to \overline{X}$ семейства $\bar{f}$.*

Определение 3.2. *Пусть X — открытое по Зарискому подмножество компактной комплексной поверхности $\overline{X}$, R — открытое по Зарискому подмножество компактной кривой $\overline{R}$. Будем говорить, что голоморфное отображение φ: $R \to X$ аналитически*

---

[1] См. *Fisher G.* Complex analytic geometry // Lect. Notes Math. 1976. 538, гл. II. 201 p.

[2] См. loc. cit., предложение 2.28.

[3] *Kizuka T.* Analytic automorphisms and algebraic automorphisms of C^2// Tôhoku Math. J. 1979. 31, 1. P. 553—565.

вырождено, *если в $\overline{X}$ существует замкнутая кривая B, содержащая образ $\varphi(R)$.*

Предложение 3.1. *Пусть $f: X \to S$ — семейство кривых общего типа с гиперболической базой S, допускающее компактификацию $\overline{f}: \overline{X} \to \overline{S}$. Тогда любое голоморфное отображение $\varphi: R \to X$, где R — гладкая алгебраическая кривая, аналитически вырождено.*

Доказательство. Поскольку кривая $\overline{S}$ гиперболична и, следовательно, гиперболически вложена в $\tilde{S}$, то, согласно большой теореме Пикара, отображение $\rho = f \circ \varphi: R \to S$ допускает голоморфное продолжение $\overline{\rho}: \overline{R} \to \overline{S}$. Если $\overline{\rho} \equiv \mathrm{const} = s_0 \in S$, то $\varphi(R) \subset \subset \overline{\Gamma}_{s_0}(\overline{f})$, так что отображение φ аналитически вырождено. Допустим, что $\rho \neq \mathrm{const}$. Тогда в окрестности любой точки $r_0 \in \overline{R} \setminus R$ отображение φ определяет обобщенное голоморфное сечение семейства f. По теореме 3.1 φ допускает голоморфное продолжение $\overline{\varphi}: \overline{R} \to \overline{X}$. В силу теоремы Реммерта образ $B = \overline{\varphi}(\overline{R})$ — компактная кривая в $\overline{X}$. Предложение доказано.

3.2. Теоремы монтелевского типа для голоморфных сечений. Пусть X, Y — комплексные пространства. Напомним, что семейство $\mathscr{F} \subset \subset Hol(X, Y)$ называется нормальным (по Монтелю), если каждая последовательность $\{f_n\} \subset \mathscr{F}$ содержит либо сходящуюся, либо компактно расходящуюся подпоследовательность (последнее означает, что для любых компактов $P \subset X$, $Q \subset Y$ и для всех членов f_{n_k} подпоследовательности с достаточно большими номерами имеем $f_{n_k}(P) \cap Q = \varnothing$).

Далее через $H_\Omega(f)$ будем обозначать множество всех голоморфных сечений семейства кривых $f: X \to S$ над открытым подмножеством $\Omega \subset S$. Снабдим пространство $H_\Omega(f)$ компактно открытой топологией.

Теорема 3.2. *Пусть $f: X \to S$ — нормальное семейство кривых общего типа и $\overline{f}: \overline{X} \to \overline{S}$ — такая его компактификация, что горизонтальная кривая*[1] *$A_h \subset \overline{X} \setminus X$ является локально главной. Через S_0 обозначим множество всех тех точек $s_0 \in S$, что слой $\Gamma_{s_0}(f)$ семейства f гиперболичен и его замыкание в $\overline{X}$ совпадает со слоем $\overline{\Gamma}_{s_0}(\overline{f})$ семейства $\overline{f}$. Тогда семейство сечений $H_{s_0}(f)$ нормально по Монтелю.*

Доказательство. Пусть $\{\omega\}$ — некоторое счетное покрытие области S_0 относительно компактными в S_0 дисками. Нетрудно убедиться в том, что для любой области вида $X_\omega = f^{-1}(\omega) \subset \overline{X}$ выполнены условия предложения 1.2, в силу которого X_ω гиперболически вложена в $\overline{X}$. По теореме Кирнана ([1[6]], теорема 1) для голоморфных отображений произвольного комплексного пространства Z в Y справедлив аналог теоремы Монтеля; в частности, семейство $H_\omega(f)$ нормально. Отсюда легко следует утверждение теоремы.

Заметим, что в силу леммы 2.1 множество S_0 в теореме 3.2 открыто по Зарискому в $\overline{S}$. Согласно следствию из теоремы 3.1, определено

---

[1] См. определение 2.1.

естественное вложение $H_{S_0}(f) \hookrightarrow H_{\bar{S}}(\bar{f})$. Образ $H_{S_0}(f)$ при этом вложении будем обозначать через $HE_{S_0}(f)$.

Теорема 3.3. *Пусть в условиях теоремы 3.2 поверхность X f — относительно гиперболически вложена в $\bar{X}$. Тогда семейство продолжений $HE_{S_0}(f)$ нормально и, более того, относительно компактно в пространстве $H_{\bar{S}}(\bar{f})$.*

Доказательство. В силу леммы 2.3 из [1 [7]] из сходимости последовательности $\{\sigma_n\} \subset H_{S_0}(f)$ к сечению $\sigma_0 \in H_{S_0}(f)$ следует, что последовательность голоморфных продолжений $\{\bar{\sigma}_n\} \subset HE_{S_0}(f)$ сходится к продолжению $\bar{\sigma}_0 \in HE_{S_0}(f)$ в топологии пространства $H_{\bar{S}}(\bar{f})$. Остается проверить, что для любой компактно расходящейся последовательности $\{\sigma_n\} \subset H_{S_0}(f)$ существует подпоследовательность $\{\sigma_{n_k}\} \subset \subset HE_{S_0}(f)$, сходящаяся в $H_{\bar{S}}(\bar{f})$.

Пусть $\bar{S} \setminus S_0 = \{s_1, \ldots, s_m\}$ и $\{Q_l\}$ — такая возрастающая последовательность компактов в S_0, что $\bar{S} \setminus Q_l = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \omega_i^{(l)}$ — объединение дисков с центрами в точках $s_1, \ldots, s_m$ соответственно и радиусами $1/l$ в некоторой фиксированной на $\bar{S}$ римановой метрике. Фиксируем риманову метрику на $\bar{X}$; пусть V_l — окрестность горизонтальной кривой A_h радиуса $1/l$ в этой метрике. Положим $U_l = V_l \cup W_l$ и $K_l = \bar{X} \setminus U_l$, где $W_l = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \bar{f}^{-1}(\omega_i^{(l)})$.

Если последовательность $\{\sigma_n\} \subset H_{S_0}(f)$ является компактно расходящейся, то для любого $l = 1, 2, \ldots$ найдется такой номер $n(l)$, что при всех $n > n(l)$ имеем $\sigma_n(Q_l) \cap K_l = \varnothing$, т. е. $\sigma_n(Q_l) \subset V_l$. Это дает возможность выделить подпоследовательность $\{\sigma_{nk}\} \subset \{\sigma_n\}$, сходящуюся в топологии пространства $\mathrm{Hol}(S_0, \bar{X})$ к сечению $\sigma_0 \in \in H_{S_0}(\bar{f})$. Ясно, что $\sigma_0(S_0) \subset A_h$. Пусть B_h — неприводимая компонента кривой A_h, содержащая образ $\sigma_0(S_0)$. Разветвленное накрытие $\bar{f} \,|\, B_h : B_h \to \bar{S}$ допускает над S_0 сечение σ_0; значит, оно однолистно и неразветвлено. Обратное отображение $\bar{\sigma}_0 = (\bar{f} \,|\, B_h)^{-1} \in \mathrm{Hol}(\bar{S}, \bar{X})$ служит голоморфным продолжением сечения σ_0. Дословное повторение рассуждения, доказывающего лемму 2.3 в [1 [7]], показывает, что последовательность $\{\sigma_{nk}\}$ равномерно на $\bar{S}$ сходится к $\bar{\sigma}_0$. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что свойство нормальности семейства сечений $HE_{S_0}(f)$ неустойчиво относительно бимероморфных перестроек. В частности, в теореме 3.3 нельзя, вообще говоря, отказаться от условия относительной гиперболической вложенности.

Пример 3.1. *Положим $\bar{X} = \bar{\Gamma} \times CP^1$, где $\bar{\Gamma}$ — некоторая фиксированная гладкая компактная кривая рода $\geqslant 2$. Пусть $\bar{f} : \bar{X} \to \bar{S}$, где $\bar{S} = \boldsymbol{CP}^1$, и $\pi : \bar{X} \to \bar{\Gamma}$ — проекции прямого произведения на сомножители. В силу гиперболичности кривой $\bar{\Gamma}$ все голоморфные сечения* *семейства $\overline{f}$ постоянны, т. е. для каждого $\sigma \in H_{\overline{S}}(\overline{f})$ найдется такое $\gamma \in \overline{\Gamma}$, что $\sigma(s) \equiv \sigma_\gamma(s) \equiv \gamma$ при всех $s \in \overline{S}$. В частности, пространство $H_{\overline{S}}(\overline{f})$ естественно гомеоморфно кривой $\overline{\Gamma}$ и, следовательно, компактно.*

Фиксируем произвольную точку $x_0 = (\gamma_0, s_0) \in \overline{X}$. Пусть $\rho: \overline{Y} \to \overline{X}$ — σ-процесс в точке x_0 и $E = \rho^{-1}(x_0)$ — вклеенная при этом исключительная кривая. Пусть $\overline{g} = \overline{f} \circ \rho: \overline{Y} \to S$ — индуцированное семейство. Любое сечение $\tilde{\sigma} \in H_{\overline{S}}(\overline{g})$ имеет проекцию $\sigma_\gamma = \rho \circ \tilde{\sigma} \in H_{\overline{S}}(\overline{f})$. Собственный прообраз $\tilde{\sigma}_{\gamma_0}$ сечения σ_{γ_0} проходит через точку $\tilde{\sigma}_{\gamma_0}(s_0) \in E$; очевидно, что это — единственное сечение в $H_{\overline{S}}(\overline{g})$, пересекающее кривую E. Значит, $\tilde{\sigma}_{\gamma_0}$ — изолированная точка пространства $H_{\overline{S}}(\overline{g})$. Пусть $\gamma_n \to \gamma_0$ при $n \to \infty$, причем $\gamma_n \neq \gamma_0$ при $n \neq 0$. Тогда последовательность сечений $\{\tilde{\sigma}_{\gamma_n}\} \subset H_{\overline{S}}(\overline{g})$ не содержит сходящихся или компактно расходящихся подпоследовательностей.

Таким образом, в этом примере семейство $H_{\overline{S}}(\overline{g})$ не является нормальным по Монтелю. Оно квазинормально и имеет единственную иррегулярную точку s_0, — согласно терминологии Монтеля[1] это означает, что семейство $H_{S_0}(\overline{g})$, где $S_0 = \overline{S} \setminus \{s_0\}$, нормально и в то же время семейство $H_{\overline{S}}(\overline{g})$ не является нормальным ни в какой окрестности точки s_0.

3.3. Полиномиальные тождества и мероморфность. И. В. Островским в качестве следствия теоремы единственности для мер ограниченной вариации на вещественной прямой [2] (теорема 3) (в частном случае дискретных мер с носителем на $\boldsymbol{Z}$) получен такой замечательный факт.

Теорема И. В. Островского. *Пусть f и g — две голоморфные в круге с выколотым центром Δ^* функции, для которых $z = 0$ — существенно особая точка. Если функции f^3 и g^3 имеют одинаковые главные части, то $f^3 = g^3$. То же верно для любых показателей $n \geqslant 3$ (но не $n = 2$: $(f, g) = \cos z^{-1}, \; i \sin z^{-1})$).*

Легко видеть, что это утверждение не распространяется на функции, голоморфные в кольце $\varepsilon < |z| < 1$ (где $\varepsilon > 0$); достаточно взять $(f, g) = ([(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)]^{1/3}, [(z - a_4)(z - a_5)(z - a_6)])^{1/3})$, где $a_i (1 \leqslant i \leqslant 6)$ — попарно различные точки в круге Δ_ε и для кубических корней выбраны однозначные в кольце ветви.

Теорема 3.1 позволяет получить следующее обобщение этого факта.

Теорема 3.4. *Пусть семейство кривых $p: C^2 \to C$, определяемое полиномом $p \in C[x, y]$, имеет общий тип[2]. Пусть $\Gamma_{c_1}, \ldots, \Gamma_{c_k}\}$ —*

---

[1] См. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. М.: Л., 1936. 240 с., §§ 34—35.

[2] В этом случае скажем, что p — полином общего типа. Следует отметить, что любой полином $p \in \boldsymbol{C}[x, y]$ не общего типа полиномиальной заменой координат в $\boldsymbol{C}^2$ приводится к виду $p(x, y) = \varphi(x^k(x^r y + \rho(x))^n)$, где $(k, n) = 1$, $\varphi, \rho \in \boldsymbol{C}[z]$ (А. Гутвирц [1961), Х. Сайто (1972)).

набор всех не гиперболических слоев этого семейства. Пусть f и g — голоморфные в Δ^* функции, хотя бы одна из которых имеет существенную особенность в нуле. Если функция $p(f, g)$ мероморфно продолжима в точку $z = 0$, то $p(f, g) \equiv \mathrm{const} = c_0 \in \{c_1, \ldots, c_k\}$.

Замечание. Полагая в условиях теоремы $p(x, y) = x^n - y^n$, где $n \geqslant 3$, получим теорему И. В. Островского.

Доказательство. Разрешение точек неопределенности рациональной функции p на $\boldsymbol{CP}^2$ дает гладкую компактификацию $\bar{p}: \bar{X} \to \boldsymbol{CP}^1$ семейства p. Допустим, вопреки утверждению, что мероморфная в круге Δ функция $\rho(z) = p(f(z), g(z))$ не постоянна. Тогда $\sigma = (f, g): \Delta^* \to \boldsymbol{C}^2$ — обобщенное сечение семейства $\bar{p} \mid (\bar{X} \setminus A_h)$ (см. определение 3.1). По теореме 3.1 оно имеет голоморфное продолжение $\bar{\sigma}: \Delta \to \bar{X}$. Следовательно, координатные функции f и g отображения σ мероморфно продолжимы в точку $z = 0$ (действительно, координаты x и y в $\boldsymbol{C}^2$ мероморфно продолжаются на $\bar{X}$), что противоречит условию. Таким образом, $p(f, g) \equiv \mathrm{const} = c_0 \in \boldsymbol{C}$.

Если слой $\Gamma_{c_0}(p)$ гиперболичен, то он гиперболически вложен в свое замыкание $\overline{\Gamma_{c_0}(p)} \Subset \bar{X}$ (этот хорошо известный факт следует, например, из теоремы 1.1 (*в*)). Согласно большой теореме Пикара, отображение $\sigma: \Delta^* \to \overline{\Gamma_{c_0}(p)}$ голоморфно продолжается в точку $z = 0$, что вновь приводит к противоречию с условием. Значит, $c_0 \in \{c_1, \ldots, c_k\}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $p \in C[x, y]$ — такой полином, что все слои семейства $p: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ гиперболичны* (например, $p(x, y) = x^3 + y^3 + \varepsilon x$, где $\varepsilon \neq 0$). *Если для пары голоморфных в Δ^* функций f и g функция $p(f, g)$ имеет в точке $z = 0$ полюс или устранимую особенность, то каждая из функций f и g имеет в точке $z = 0$ полюс или устранимую особенность.*

Замечание. Пусть полином $p(x, y)$ квазиоднороден, т. е. $p(\lambda^k x, \lambda^l y) = \lambda^n p(x, y)$ при некоторых $k, l, n \in N$ и всех $\lambda \in C$, $(x, y) \in C^2$. Тогда $\Gamma_0(p)$ — единственный вырожденный слой семейства p. Это семейство имеет общий тип тогда и только тогда, когда *эйлерова характеристика $\chi(\Gamma_1(p))$ отрицательна*; будем считать это условие выполненным. *Для такого полинома p в условиях теоремы 3.4 функция $\rho = p(f, g)$ мероморфно продолжима в точку $z = 0$ в том и только в том случае, когда $\rho(z) \equiv 0$* (точный аналог теоремы И. В. Островского). Как заметил В. Я. Лин, это следствие из теоремы 3.4 имеет короткое независимое доказательство; приведем его здесь с любезного согласия В. Я. Лина.

Допустим, что $\rho \not\equiv 0$. Так как ситуация локальна, то замена $z \to az$ позволяет предполагать, что функция $\rho(z)$ не обращается в нуль в Δ^*. Существует такая функция $\rho_1 \in \mathrm{Hol}(\Delta^*, \boldsymbol{C}^*)$, что $\rho^n(z) = \rho(z^n)$. Рассмотрим отображение $\sigma: \Delta^* \to \boldsymbol{C}^2$, $\sigma(z) = (f(z^n)/\rho_1^k(z), g(z^n)/\rho_1^l(z))$. Имеем $p \circ \sigma \equiv 1$, так что $\sigma(\Delta^*) \in \Gamma_1(p)$. Поскольку кривая $\Gamma_1(p)$ гиперболична (и гиперболически вложена в свое проективное пополнение), то в силу большой теоремы Пикара отображение σ мероморфно продолжается в точку $z = 0$. Значит, функции f и g мероморфно продолжимы в точку $z = 0$ вопреки условию. Таким образом, $\rho(z) \equiv 0$.

Следствие 2. *Пусть $p \in \mathbf{C}[x, y]$ — полином общего типа, f и g — пара целых функций. Если $p(f, g)$ — полином, то либо f и g — полиномы, либо $p(f, g) \equiv \mathrm{const} = c_0$ и слой $\Gamma_{c_0}(p)$ не гиперболичен. В частности, если все слои полинома p гиперболичны, то имеет место первый случай.*

Замечание. В работе С. Токунага[1] имеется близкое утверждение, полученное с помощью теоремы Нишино в форме Кицука.

Следствие 3. *Полином p общего типа не имеет трансцендентных сечений, т. е. из соотношения $p(f(z), g(z)) \equiv z$, где f и g — целые функции, следует, что f и g — полиномы.*

Приведем более общее утверждение, положительно решающее проблему, сформулированную в [3] (§ 2, с. 64).

Теорема 3.5. *Пусть $p \in \boldsymbol{C}[x, y, z]$ — такой полином, что при «общих» $z \in \boldsymbol{C}$ кривые $\Gamma_z = \{p(x, y, z) = 0\} \subset \boldsymbol{C}^2_{x, y}$ неприводимы. Пусть f и g — пара мероморфных в $\boldsymbol{C}$ функций, удовлетворяющих тождеству $p(f(z), g(z), z) \equiv 0$.*

(а) *Если общая кривая Γ_z имеет род $\geqslant 2$, то функции f и g рациональны.*

(б) *Если общая кривая Γ_z гиперболична и функции f и g имеют конечное число полюсов, то эти функции рациональны.*

Доказательство. Уравнение $p = 0$ определяет аффинную поверхность $X \subset \boldsymbol{C}^3$. Положим $F = z \mid X$. Проективное замыкание $\hat{X}$ и разрешение точек неопределенности функции F на $\hat{X}$ приводят к компактификации $\overline{F}: \overline{X} \to \boldsymbol{CP}^1$ семейства F. При этом координатные функции x и y мероморфно продолжаются на $\overline{X}$. Положим $\sigma(z) = (f(z), g(z), z)$; пусть $\omega^* = \{|z| > R\}$ — «достаточно малая» проколотая окрестность точки $z = \infty$ на сфере Римана $\boldsymbol{CP}^1$. Тогда $\sigma \in H_{\omega^*}(\overline{F})$ в случае (а) и $\sigma \in H_{\omega^*}(F)$ в случае (б). Поскольку оба семейства имеют общий тип, то в силу теоремы 3.1 сечение σ имеет голоморфное продолжение $\bar{\sigma} \in H_{CP^1}(\overline{F})$. Следовательно, его координатные функции $f = x \circ \sigma$ и $g = y \circ \sigma$ мероморфно продолжаются в точку $z = \infty$, а значит, эти функции рациональны. Теорема доказана.

Замечание. Разумеется, в этой теореме условие неприводимости общей кривой Γ_z, принятое нами для упрощения формулировки, лишнее (см. абзац, следующий за определением 2.4).

3.4. О трансцендентных сечениях.

Определение 3.3. *Пусть $\bar{p}: \overline{X} \to \overline{S}$ — собственное семейство кривых (см. определение 2.2), A_h — горизонтальная кривая в $\overline{X}$, $X = \overline{X} \setminus A_h$ и $p = \bar{p} \mid X$. Пусть ω — диск в S с центром s_0, $\omega^* = \omega \setminus \{s_0\}$ и $\sigma \in H_{\omega^*}(p)$. Будем говорить, что сечение σ имеет в точке s_0* полюс (устранимую особенность), *если существует продолжение $\bar{\sigma} \in H_\omega(\bar{p})$, где $\bar{\sigma}(0) \in A_h$ (соответственно $\bar{\sigma} \in H_\omega(p)$).* В противном случае (когда сечение σ непродолжимо в точку s_0) скажем, что σ имеет существенную особенность в точке s_0.

[1] *Tokunaga S.* A condition for holomorphic map of C^2 into C^2 to be algebraic// J. Math. Soc. Japan. 1982. **34**, **2**. P. 289—292.

Определение 3.4. *Пусть семейство $\bar{p}$ в определении 3.3 компактно; пусть S_0 — открытое подмножество в S. Будем называть сечение $\sigma \in H_{S_0}(\bar{p})$* мероморфным *в S_0 сечением семейства $\bar{p}$, если $\sigma(S_0) \not\subset A_h$. Пусть S_0 открыто по Зарискому. Скажем, что σ* трансцендентно, *если оно мероморфно в S_0 и имеет существенную особенность хотя бы в одной точке $s_0 \in \bar{S} \setminus S_0$.*

Для семейств, рассматриваемых в пункте 3.3, $\bar{S} = \boldsymbol{CP}^1$, $S_0 = \boldsymbol{C}$, поверхность X аффинна и $\bar{X}$ бирационально эквивалентна ее проективному пополнению. В этой ситуации определение 3.4 согласуется с общепринятой терминологией, распространенной на набор координатных функций сечения σ.

Во всех утверждениях в пунктах 3.1 и 3.3, где речь шла о мероморфной продолжимости, рассматривались семейства общего типа. Покажем, что, как правило, условие общности типа необходимо.

Предложение 3.2. *Пусть $\bar{p}: \bar{X} \to \bar{S}$ — компактное семейство рациональных кривых и $p = \bar{p} \,|\, (\bar{X} \setminus A_h)$, где A_h — горизонтальная кривая в X. Допустим, что семейство p — не общего типа, или, что то же, что кратность разветвленного накрытия $\bar{p} \,|\, A_h : A_h \to \to S$ не превосходит 2. Пусть s_0 — произвольная точка в $\bar{S}$ и $S_0 = = \bar{S}/\{s_0\}$. Тогда*

(а) *над проколотой окрестностью точки s_0 существует обобщенное голоморфное сечение σ_0 семейства p, не продолжимое мероморфно в точку s_0;*

(б) *существует мероморфное в S_0 трансцендентное сечение σ_1 семейства p;*

(в) *в случае, когда накрытие $\bar{p} \mid A_h$ однолистно, или когда оно двулистно и кривая A_h приводима, можно считать, что сечение σ_1 имеет конечное число полюсов в S_0.*

Доказательство. В теории линейчатых поверхностей (см. [4], гл. IV)[1] устанавливается, что семейство $\bar{p}$ рациональных кривых бимероморфно эквивалентно тривиальному семейству $\bar{\pi}$: $\boldsymbol{CP}^1 \times \bar{S} \to \bar{S}$ (следствие существования разрешения особенностей $\tilde{X}$ поверхности $\bar{X}$, наличия на $\tilde{X}$ алгебраической структуры и теоремы Нетера ([4], гл. I, § 3)[2]). Для любого $\Omega \subset \bar{S}$ это дает биекцию $H_\Omega(\bar{p}) \to \to H_\Omega(\bar{\pi})$, сохраняющую существенно особые точки сечений. Поэтому можно считать, что $\bar{p} = \bar{\pi}$, — действительно, утверждения (а), (б) и (в) инвариантны относительно бимероморфной эквивалентности семейств.

(а) Утверждение этого пункта локально, так что можно считать семейство $\bar{\pi}$ заданным над кругом Δ ($s_0 = 0$); кроме того, можно считать, что накрытие $\bar{\pi} \,|\, A_h : A_h \to \Delta$ либо неразветвлено, либо $0 \in \Delta$ — единственная его точка ветвления. В первом случае биголоморфный автоморфизм семейства π превращает A_h в пару кривых $C_0 = \{0\} \times \Delta$ и $C_\infty =$

---

[1] См. также *Barth W., Peters C., Van de Ven A.* Compact complex surfaces. Berlin e. a., 1984. 304 p., гл. V, § 4.

[2] Имеется альтернативный путь: см. loc. cit.

$=\{\infty\}\times\Delta$ или в одну из них. Сечение $\sigma_0(z)=(e^{1/z},\ z)$ в этом случае является искомым. Эта же конструкция σ_0 годится в случае, когда кривая A_h приводима (над Δ); действительно, бимероморфная перестройка, нормализующая кривую A_h, возвращает к уже рассмотренной ситуации.

Обратимся, далее, к случаю, когда кривая A_h неприводима и проекция $\bar{\pi}\,|\,A_h$ двулистна с точкой ветвления $(0,\ 0)\in \boldsymbol{CP}^1\times\Delta$. Можно считать также, что $A_h\cap C_\infty=\varnothing$, так что $A_h\subset \boldsymbol{C}\times\Delta$. Естественно определена кривая B_h — поточечная полусумма ветвей кривой A_h. Она служит графиком голоморфной в Δ функции и потому является гладкой. Подвергнув семейство $\boldsymbol{C}\times\Delta\to\Delta$ автоморфизму, можно считать, что $B_h=C_0$. При этом кривая A_h преобразуется в график двузначной функции $\sqrt{f(z)}$, где $f(z)$ голоморфна в Δ, не обращается в нуль в Δ^* и $f(0)=0$. Положим $\sigma_0(u)=(e^u+\sqrt{f(u^2)},\ u^2)$ ($u\in\Delta$; для квадратного корня выбрана однозначная ветвь). Ясно, что $\sigma_0:\Delta\to\boldsymbol{C}\times\Delta$ — искомое обобщенное голоморфное сечение семейства p, не продолжимое мероморфно в точку $s_0=0$.

(б) Пусть ψ — голоморфная функция на S_0, имеющая существенную особенность в точке s_0. Тогда $\sigma_1(s)=(\psi(s),\ s)$ — искомое трансцендентное сечение семейства $\bar{p}=\bar{\pi}$.

(в) В этом случае бимероморфная перестройка семейства $\bar{p}=\bar{\pi}$ позволяет преобразовать кривую A_h в кривую $C_0\cup C_\infty$ или в C_∞. Искомым сечением служит $\sigma_1(s)=(e^{\psi(s)},\ s)$. Это завершает доказательство.

Предложение 3.3. *Пусть $\bar{p}:\bar{X}\to\bar{S}$ — компактное семейство эллиптических кривых, обладающее голоморфным сечением $\sigma_0\in H_{\bar{S}}(\bar{p})$. Пусть s_0 — произвольная точка в $\bar{S}$ и $S_0=\bar{S}\setminus\{s_0\}$. Тогда существует сечение $\sigma_1\in H_{S_0}(\bar{p})$, для которого s_0 — существенно особая точка.*

Доказательство. Напомним кратко конструкцию якобиева расслоения (см. [4], гл. VII, § 5; [5])[1]. Разрешив особенности, будем считать, что $\bar{X}$ — гладкая поверхность. Пусть F — объединение всех неприводимых компонент вырожденных слоев семейства $\bar{p}$, не пересекающих σ_0. Положим $X^*=\bar{X}\setminus F$ и $p^*=\bar{p}\,|\,X^*$. На каждом слое семейства p^* можно ввести структуру абелева многообразия, считая сечение σ_0 нулевым. Расслоение p^* с этой групповой структурой называют *якобиевым расслоением* семейства $\bar{p}$.

Пусть $C_0=\sigma_0(\bar{S})$ и голоморфное линейное расслоение $\xi:E\to\bar{S}$ является ограничением на C_0 вертикального подрасслоения касательного расслоения TX^*. Имеется естественный послойный гомоморфизм $\exp:E\to X^*$, переводящий нулевое сечение $Z\subset E$ в C_0. Отображение $\exp$ голоморфно; следовательно, $\Lambda=\exp^{-1}(C_0)$ — замкнутое аналитическое подмножество в E. Для каждой точки $s\in\bar{S}$ такой, что слой $\bar{\Gamma}_s(\bar{p})$ не вырожден, $\Lambda_s=\Lambda\cap E_s$ — подрешетка в E_s и $\exp|E_s:E_s\to\bar{\Gamma}_s(\bar{p})$ — факторизация по этой решетке.

[1] См. также *Кодаира К.* О компактных аналитических поверхностях // Математика. Сб. пер. 1962. 6 : 6. С. 3—18; п. 4.

Если $\tilde{\sigma}$ — голоморфное сечение расслоения ξ над множеством $\Omega \subset \overline{S}$, то $\sigma = \exp \tilde{\sigma} \in H_\Omega(\overline{p})$. Сужение расслоения ξ на некомпактную кривую S_0 голоморфно тривиально[1]. Голоморфные сечения тривиального расслоения $C \times S_0 \to S_0$ естественно отождествляются с голоморфными функциями на S_0. Пусть $\varphi(s)$ — ненулевая голоморфная функция на S_0 с бесконечным множеством нулей и $\tilde{\sigma}$ — соответствующее ей сечение пучка $\xi | S_0$. Так как $\tilde{\sigma}_1$ пересекает нулевое сечение Z в бесконечном множестве точек, то сечение $\sigma_1 = \exp \sigma \in H_{S_0}(\overline{p})$ бесконечно часто пересекает кривую C_0. Следовательно, σ_1 — искомое трансцендентное сечение семейства $\overline{p}$, ибо в случае, если s_0 — устранимая особенность сечения σ_1, мы имели бы в $\overline{X}$ две компактные кривые C_0 и $C_1 = \overline{\sigma_1(S_0)}$ с бесконечным числом точек пересечения и не совпадающие, что невозможно. Предложение доказано.

Замечания. 1. Приведенная конструкция может быть эффективизирована следующим образом. Известно (см. [4], гл. VII, § 6), что в условиях предложения 3.3 семейство $\overline{p}$ бимероморфно эквивалентно семейству $\overline{p}_1 : \overline{X}_1 \to \overline{S}$, где поверхность $\overline{X}_1 \subset \boldsymbol{CP}^2 \times \overline{S}$ задается в аффинных координатах уравнением

$$y^2 = 4x^3 + g_2(s)x + g_3(s), \tag{7}$$

где g_2, g_3 — мероморфные функции на $\overline{S}$ и $\overline{p}_1(x, y, s) = s$ (сечение σ_0 состоит из точек на бесконечно удаленной прямой). Легко видеть, что линейное расслоение ξ_1, соответствующее семейству $\overline{p}_1$, тривиально (это следует из того, что каждый слой $\Gamma_s(\overline{p}_1)$ в точке пересечения с C_0 касается бесконечно удаленной прямой в $\boldsymbol{CP}^2$) и отображение $\exp : \boldsymbol{C} \times \overline{S} \to \overline{X}_1$ имеет вид $\exp(u, s) = (\rho(u, s), \rho'_u(u, s))$, где $\rho(u, s)$ для общей точки $s \in \overline{S}$—функция Вейерштрасса кривой $\Gamma_s(\overline{p}_1)$. (Напомним[2], что коэффициенты $c_n(s)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ разложения $\rho(u, s) = 1/u^2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n(s) u^{2n-2}$ являются многочленами от $g_2(s)$ и $g_3(s)$). Пусть $\varphi(s)$— голоморфная в S_0 функция с бесконечным числом нулей и $\sigma_1(s) = (\rho(\varphi(s), s), \rho'_u(\varphi(s), s))$. Тогда $\sigma_1 = (x, y)$ — мероморфное в S_0 решение уравнения (7) с бесконечным числом полюсов, т. е. трансцендентное сечение семейства $\overline{p}_1$, голоморфное в S_0.

2. В частности, эта конструкция дает положительный ответ на вопрос В. Я. Лина (см. [6], гл. 2, пример 1 в пункте 5.2) о существовании мероморфных в $\boldsymbol{C}^*$ сечений аффинного семейства, определяемого дискриминантным полиномом: $27y^2 + 4x^3 + z = 0$. (В [6] указано, что это семейство не имеет сечений, голоморфных в $\boldsymbol{C}^*$; наша конструкция дает сечения, мероморфные в $\boldsymbol{C}$).

3. Каждое собственное семейство $\overline{p} : \overline{X} \to \Delta$ эллиптических кривых имеет голоморфное в некоторой проколотой окрестности Δ_ε^* $(0 < \varepsilon < 1)$

---

[1] См., например, *Форстер О.* Римановы поверхности. М., 1980. 246 с.; предложение 30.3.

[2] См. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М., 1968. 648 с., ч. 2, гл. I, § 7.

точки $z = 0$ сечение σ_1, не продолжимое голоморфно в эту точку. В случае, когда $\overline{p}$ обладает локальным сечением $\sigma_0 \in H_{\Delta\varepsilon}(\overline{p})$, сечение σ_1 строится так же, как в предложении 3.3. В противном случае, как следует из классификации Кодаира вырожденных слоев минимального семейства эллиптических кривых (см. [5]), можно считать, что $\overline{\Gamma}_0(\overline{p})$ — кратный слой. Логарифмическое преобразование Кодаира[1] заменяет слой $\overline{\Gamma}_0(\overline{p})$ не кратным, так что в полученном семействе имеется локальное голоморфное сечение $\overline{\sigma}_1$. Его прообраз $\sigma_1 \in H_{\Delta_\varepsilon^*}(\overline{p})$ — искомое сечение; действительно, оно не может быть голоморфно продолженным в точку $z = 0$, так как ни одно голоморфное сечение не пересекает кратный слой $\overline{\Gamma}_0(\overline{p})$.

4. Предложения 3.2 и 3.3 показывают, что условия теоремы 3.5 существенны. Действительно, тождество в этой теореме имеет мероморфные в $\boldsymbol{C}$ решения с бесконечным числом полюсов в случае, когда либо общие кривые Γ_z рациональны, либо являются эллиптическими кривыми и их компактифицированное семейство имеет глобальное голоморфное сечение.

5. Вопрос о существовании мероморфных в $\boldsymbol{C}$ трансцендентных сечений семейств кривых рода 0 и 1, связанный с аналогичным вопросом для семейств кривых рода $\geqslant 2$ [3], возник в переписке автора и А. Э. Еременко. А. Э. Еременко первым указал на существование таких сечений в случае рода 0 (его рассуждения основаны на лемме Тсена из теории алгебраических функций); он же обратил внимание на то обстоятельство, что функция Вейерштрасса и ее производная дают трансцендентное сечение постоянного семейства эллиптических кривых в нормальной форме (7) (где g_2 и g_3 постоянны).

6. Как уже отмечалось, теорема 3.4 обобщает лишь следствие из теоремы 3 в [2]; кажется правдоподобным, что и сама теорема 3 допускает аналогичное обобщение. Приведем его формулировку.

Гипотеза. *Пусть $p \in \boldsymbol{C}[x, y]$ — полином общего типа и μ_1, μ_2 — такие комплекснозначные борелевские меры ограниченной вариации на $\boldsymbol{R}$, что их преобразования Фурье голоморфны в $\boldsymbol{C}_+$, а их носители не содержатся ни в какой полупрямой $\boldsymbol{R}_+(a) := \{t \geqslant a\} \subset \boldsymbol{R}$. Если носитель меры $\nu = p(\mu_1, \mu_2)$ (сверточный полином) заключен в $\boldsymbol{R}_+(a)$ при некотором $a \in \boldsymbol{R}$, то $\nu = c_0\delta$, где δ — δ-мера и c_0 таково, что кривая $\Gamma_{c_0}(p) = \{p(x, y) = c_0\} \subset \boldsymbol{C}^2$ не гиперболична.*

§ 4. Функции гиперболического типа и коллективные оценки Шоттки — Ландау. Э. Ландау принадлежит уточнение теоремы Шоттки, в силу которого функции, голоморфные в единичном круге и не принимающие там значений 0 и 1, имеют коллективно экспоненциальный тип, т. е. удовлетворяют неравенствам

$$|f(z)| \leqslant c \exp \frac{\sigma}{1 - |z|},$$

где положительные константы c и σ зависят лишь от величины $|f(0)|$

---

[1] См. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М., 1982. 862 с.; с. 602—607.

(см. [7], ч. 2, гл. III, § 2 и примечание (60), с. 443; [8], § 66). «Индивидуальные» оценки такого типа в [9] (теорема 2) были распространены на линейно независимые наборы голоморфных в круге функций без нулей, чья сумма ограничена (ср. также с теоремой 2 в [2], относящейся к функциям, голоморфным в полуплоскости). В этом параграфе будут установлены коллективные оценки Шоттки — Ландау для голоморфных отображений круга (верхней полуплоскости) в гиперболические кривые[1]. Введем следующее понятие.

Определение 4.1. *Пусть* Γ — *неприводимая квазипроективная алгебраическая кривая и* φ — *регулярная функция на* Γ. *Будем говорить, что голоморфная функция* f *на комплексном пространстве* X *имеет* гиперболический тип (Γ, φ), *если кривая* Γ *гиперболична, а функция* f *допускает представление* $f = \varphi \circ F$, *где* $F \in \mathrm{Hol}\ (X, \Gamma)$.

Примером могут служить функции, выпускающие два значения 0 и 1. Каждая такая функция f имеет гиперболический тип (Γ_0, x), где Γ_0— кривая в $\boldsymbol{C}^2_{x,\,y}$ с уравнением $x(x-1)y = 1$; действительно, кривая Γ_0 изоморфна $\boldsymbol{C}^{**} := \boldsymbol{C} \setminus \{0; 1\}$ и потому гиперболична, а функция f представима в виде $f = x \circ F$, где $F := (f, [f(f-1)]^{-1})$, $F \in \mathrm{Hol}\ (X, \Gamma_0)$.

Более общо, если $\Gamma \subset \boldsymbol{C}^n$— неприводимая гиперболическая аффинная алгебраическая кривая, то координатные функции любого голоморфного отображения $F : X \to \Gamma$ имеют гиперболический тип. (Так, если $f^2 + g^3 \equiv 1$, то функция f имеет тип (Γ, x), а функция g — тип (Γ, y), где $\Gamma = \{x^2 + y^3 = 1\}$ — гиперболическая кривая в $\boldsymbol{C}^2_{x,\,y}$). В частности, это относится и к координатным функциям универсального накрывающего отображения $F : \Delta \to \Gamma$ (например, к модулярной функции при $\Gamma = \Gamma_0$).

Пусть X — связное комплексное пространство и Q — произвольное замкнутое подмножество в X. Как и прежде, через k_X будем обозначать псевдометрику Кобаяси на X. Через $F(X, Q, M, \Gamma, \varphi)$, где $M > 0$, обозначим совокупность всех голоморфных функций f на X, которые имеют гиперболический тип (Γ, φ) и для которых $|f(x)| \leqslant M$ при всех $x \in Q$.

Теорема 4.1. *Для каждого фиксированного* $\varepsilon_0 > 0$ *найдется такой показатель* $\sigma = \sigma(\Gamma, \varphi, M, \varepsilon_0)$, *что для любой функции* $f \in F(X, Q, M, \Gamma, \varphi)$ *верна оценка*

$$|f(x)| \leqslant (1 + \varepsilon_0) M \exp(\sigma \exp k_X(x, Q)). \tag{8}$$

В качестве следствий ниже будут получены коллективные оценки роста функций гиперболического типа в круге и в полуплоскости.

В доказательстве теоремы нам понадобятся следующие сведения[2]. Пусть $\Gamma_{\mathrm{norm}} = \overline{\Gamma} \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}$ — нормализация кривой Γ, где $\overline{\Gamma}$ — компактная риманова поверхность и $p_1, \ldots, p_m$ — «проколы». Каждому

---

[1] См. также *Зайденберг М. Г.* О некоторых применениях гиперболического анализа // Комплексный анализ и мат. физика. Красноярск, 1988. С. 29—38.

[2] См., например, *Кра И.* Автоморфные формы и клейновы группы. М., 1975. 296 с.; гл. II, § 2.

проколу отвечает класс сопряженности параболических элементов фуксовой группы G, действующей в верхней полуплоскости $\boldsymbol{C}_+$ и униформизирующей Γ_{norm}. Для фиксированного прокола p_j можно выбрать такую сопряженную с G фуксову группу G_j в $\boldsymbol{C}_+$, для которой $z = \infty$ — параболическая вершина, отвечающая проколу p_j, причем подгруппа стабильности точки $z = \infty$ в G_j порождена сдвигом $T(z) = z + 1$, и действие группы G в полуплоскости $\boldsymbol{C}_+(1)$ (где $\boldsymbol{C}_+(\rho) := \{Imz > \rho\}$) совпадает с действием этой подгруппы. Образ $\tilde{\omega}_j(\rho) := \pi_j(\boldsymbol{C}_+(\rho)) \subset \Gamma_{\text{norm}}$, где $\rho \geqslant 1$, при факторизации $\pi_j : \boldsymbol{C}_+ \to \boldsymbol{C}_+/G_j = \Gamma_{\text{norm}}$ — это проколотый диск в Γ_{norm} с центром в точке p_j.

Отображение нормализации $\nu : \Gamma_{\text{norm}} \to \Gamma$ является локальной изометрией в гиперболических метриках, совпадающих с метриками Кобаяси этих кривых. Положим $\omega_j(\rho) := \nu(\tilde{\omega}_j(\rho))$. Легко видеть, что если ρ достаточно велико (так что область $\omega_j(\rho)$ достаточно удалена от особых точек кривой Γ), то $\nu \mid \tilde{\omega}_j(\rho) : \tilde{\omega}_j(\rho) \to \omega_j(\rho) \subset \Gamma$ — изометрия. Решающую роль в доказательстве теоремы 4.1 играет то обстоятельство, что в пределах проколотой окрестности $\omega_j(\rho_1)$ точки p_j, где $\rho_1 > \rho$, гиперболическая метрика кривой Γ допускает двусторонние оценки (с аддитивной константой) метрикой в проколотом круге $\omega_j(\rho)$.

Лемма 4.1. *Фиксируем* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *и такое* $\rho \geqslant 1$, *что* $\nu \mid \tilde{\omega}_j(\rho) : \tilde{\omega}_j(\rho) \to \omega_j(\rho)$ — *изометрия. Тогда для любого* $\rho_1 > \rho$ *и всех* $p, q \in \omega_j(\rho_1)$ *имеют место неравенства*

$$k_\Gamma(p, q) \leqslant k_{\omega_j(\rho)}(p, q) \leqslant k_\Gamma(p, q) + \mu, \tag{9}$$

где

$$\mu = \mu(\rho, \rho_1) = \ln\left[\left(1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\rho_1 - \rho)^2}}{2(\rho_1 - \rho)^2}\right)\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}\right].$$

Доказательство. Левое неравенство является следствием включения $\omega_j(\rho) \subset \Gamma$ и нерастягиваемости метрики Кобаяси. Докажем правое. Фиксируем точки $p, q \in \omega_j(\rho_1)$ и их прообразы $\rho, \tilde{q} \in \tilde{\omega}_j(\rho_1)$. В $\boldsymbol{C}_+(\rho_1)$ найдутся прообразы $u \in \pi_j^{-1}(\tilde{p})$, $v \in \pi_j^{-1}(\tilde{q})$, принадлежащие одной и той же фундаментальной области, т. е. $|Re\,u - Re\,v| < 1$, для которых $k_{\omega_j(\rho)}(p, q) = k_{\tilde{\omega}_j}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \inf\{k_{C_+(\rho)}(\tilde{u}, \tilde{v})\} = k_{C_+(\rho)}(u, v)$ (здесь нижняя грань берется по всем точкам орбит $\{\tilde{u} = T^k u,\ \tilde{v} = T^l v\}_{k, l \in \boldsymbol{Z}}$). Отсюда

$$k_{\omega_j(\rho)}(p, q) = k_{C_+(\rho)}(u, v). \tag{10}$$

Пусть, для определенности, $\operatorname{Im} u \geqslant \operatorname{Im} v$, и пусть $\hat{v} := \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} v$ — ближайшая к u точка орицикла $L_v := \{\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} v\}$. Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} k_{C_+(\rho)}(u, v) &\leqslant k_{C_+(\rho)}(u, \hat{v}) + k_{C_+(\rho)}(\hat{v}, v) \leqslant \\ &\leqslant k_{C_+(\rho)}(u, \hat{v}) + \ln\left(1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\rho_1 - \rho)^2}}{2(\rho_1 - \rho)^2}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует неравенство

$$k_{\omega_j(\rho)}(p, q) \leqslant k_{C_+(\rho)}(u, \hat{v}) + \ln\left(1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\rho_1 - \rho)^2}}{2(\rho_1 - \rho)^2}\right). \tag{12}$$

Поскольку отображение $\nu\,|\,\tilde{\omega}_j(\rho)$ в метриках $k_{\Gamma_{\text{norm}}}$ и k_Γ является изометрией, то

$$k_\Gamma(p,\ q) = k_{\Gamma_{\text{norm}}}(\tilde{p},\ \tilde{q}) = \inf_{\tilde{v}\in G_j(v)} \{k_{C_+}(u,\ \tilde{v})\} = k_{C_+}(u,\ v_0), \tag{13}$$

где v_0 — ближайшая к u точка орбиты $G_j(v)$. Если $v_0 \in C_+(\rho)$, то $v_0 = T^k v$ при некотором $k \in \boldsymbol{Z}$ и потому $v_0 \in L_v$. В этом случае верно неравенство

$$k_\Gamma(p,\ q) = k_{C_+}(u,\ v_0) \geqslant k_{C_+}(u,\ \hat{v}). \tag{14}$$

Если $v_0 \notin C_+(\rho)$, то кратчайший геодезический сегмент в C_+, соединяющий точки u и v_0, пересекает орицикл L_v; следовательно, неравенство (14) верно и в этом случае.

Оценим правую часть в (12):

$$k_{C_+(\rho)}(u,\ \hat{v}) = \int\limits_{\operatorname{Im} v}^{\operatorname{Im} u} \frac{dy}{y-\rho} = \int\limits_{\operatorname{Im} v}^{\operatorname{Im} u} \frac{dy}{y} + \int\limits_{\operatorname{Im} v}^{\operatorname{Im} u} \frac{\rho\, dy}{y\,(y-\rho)} \leqslant \tag{15}$$

$$\leqslant k_{C_+}(u,\ \hat{v}) + \int\limits_{\rho_1}^{\infty} \frac{\rho\, dy}{y\,(y-\rho)} = k_{C_+}(u,\ \hat{v}) + \ln \frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}.$$

Окончательно из (12), (14) и (15) получим правое неравенство в (9). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть функция $\varphi \circ \nu$ на Γ_{norm} имеет полюс в каждом из проколов $p_1, \ldots, p_k$ и устранимую особенность в каждом из проколов $p_{k+1}, \ldots, p_m$. Пусть $r := (1+\varepsilon_0) M$ и $\Omega_r := \{|\xi| > r\} \subset \boldsymbol{C}$. Выберем такое $\rho = \rho(\Gamma,\ \varphi,\ M,\ \varepsilon_0) > 1$, что (i) окрестности $\omega_j(\rho)$, где $j = \overline{1,\ k}$, попарно не пересекаются;

$$(ii)\ \varphi(\omega_j(\rho)) \subset \Omega_r\ \ (j = \overline{1,\ k})\ \text{ и }\ (iii)\ \nu\,|\,\tilde{\omega}_j(\rho) : \tilde{\omega}_j(\rho) \to \omega_j(\rho)$$

является изометрией в гиперболических метриках на Γ_{norm} и Γ ($j = 1,\ k$).

Положим $\rho_1 := \rho + \varepsilon_0$. Фиксируем такое $R = R(\Gamma,\ \varphi,\ M,\ \varepsilon_0)$, что

$$(iv)\ \varphi^{-1}\,(\overline{\Omega_R}) \subset [\bigcup_{j=1}^{k} \omega_j(\rho)].$$

Фиксируем произвольную функцию $f = \varphi \circ F \in F(X,\ Q,\ M,\ \Gamma,\ \varphi)$, где $F \in \operatorname{Hol}(X,\ \Gamma)$. Пусть $x_0 \in X$ — такая точка, что $|f(x_0)| > R$, $f(x_0) = \varphi(F(x_0)) \in \Omega_R$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем в Q такую точку x_1, что $k_X(x_0,\ x_1) \leqslant k_X(x_0,\ Q) + \varepsilon/2$. Так как k_X — внутренняя псевдометрика, то существует «$\varepsilon/2$-геодезический сегмент» между точками x_0 и x_1, т. е. такой кусочно гладкий путь $\gamma : [0;\ 1] \to X$, что $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ и $l_X(\gamma) \leqslant k_X(x_0,\ x_1) + \varepsilon/2$ (здесь l_X — длина в псевдометрике k_X). Положим $x_t := \gamma(t)$. Поскольку $|f(x_1)| \leqslant M < R < |f(x_0)|$, то найдется такое $\tau \in (0;\ 1)$, что $|f(x_\tau)| = R$ и $|f(x_t)| \geqslant R$ при всех $t \in (0;\ \tau)$. Из условий (i) и (iv) следует, что точки $p_0 := F(x_0) \in \Gamma$ и $q_0 := F(x_\tau) \in \Gamma$ принадлежат одной и той же окрестности $\omega_j(\rho_1)$, где $1 \leqslant j \leqslant k$. Голоморфное отображение $\varphi \mid \omega_j(\rho) : \omega_j(\rho) \to \Omega_r$ (см. (*ii*)) является нерастягивающим по отношению к гиперболическим метрикам, поэтому

$$k_{\Omega_r}(|f(x_0)|, R) \leqslant k_{\Omega_r}(f(x_0), f(x_r)) \leqslant k_{\omega_j(\rho)}(p_0, q_0). \tag{16}$$

В силу леммы 4.1 из (16) и (9) следует неравенство

$$k_{\Omega_r}(|(x_0)|, R) \leqslant k_\Gamma(p_0, q_0) + \mu, \tag{17}$$

где $\mu = \ln\left[\left(1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)\left(1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon_0^2}}{2\varepsilon_0^2}\right)\right]$ зависит лишь от Γ, φ, M и ε_0.

Так как в псевдометриках Кобаяси k_X и k_Γ голоморфное отображение $F : X \to \Gamma$ является нерастягивающим, то $k_\Gamma(p_0, q_0) \leqslant k_X(x_0, x_\tau)$. В свою очередь,

$$k_X(x_0, x_\tau) \leqslant l_X(\gamma([0; \tau])) \leqslant l_X(\gamma([0; 1])) =$$
$$= l_X(\gamma) \leqslant k_X(x_0, x_1) + \varepsilon/2 \leqslant k_X(x_0, Q) + \varepsilon.$$

Окончательно $k_\Gamma(p_0, q_0) \leqslant k_X(x_0, Q) + \varepsilon$ (18).
Из (17) и (18) получим неравенство

$$k_{\Omega_r}(|f(x_0)|, R) \leqslant k_X(x_0, Q) + \varepsilon + \mu, \tag{19}$$

а так как здесь $\varepsilon > 0$ произвольно, то (19) верно и при $\varepsilon = 0$. Пользуясь явной формулой для метрики Пуанкаре в проколотом круге Ω_r, из (19) при $\varepsilon = 0$ получим

$$\ln\ln\frac{|f(x_0)|}{r} - \ln\ln\frac{R}{r} \leqslant k_X(x_0, Q) + \mu,$$

откуда следует неравенство (8) с показателем $\sigma = \sigma_1 := e^\mu \ln\frac{R}{r}$, зависящим лишь от Γ, φ, M и ε_0. Эта оценка получена в предположении, что $|f(x_0)| > R$. Положим в (8) $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$, где σ_2 определяется условием $(1 + \varepsilon_0)M \exp \sigma_2 = R$. Тогда неравенство (8) справедливо уже при всех $x \in X$. Показатель σ здесь зависит лишь от Γ, φ, M и ε_0 и не зависит от выбора $f \in \mathscr{F}(X, Q, M, \Gamma, \varphi)$. Это доказывает теорему.

В простейшем случае, когда $X = B^h$ — единичный шар в $\mathbf{C}^h$ и множество Q состоит из единственной точки $0 \in B^h$, из теоремы 4.1 получим такое

Следствие 4.1. *Голоморфные в шаре B^h функции гиперболического типа* (Γ, φ) *имеют коллективно экспоненциальный тип, т. е. для любой такой функции f и для любого $\varepsilon_0 > 0$ верно неравенство*

$$|f(z)| \leqslant 2(|f(0)| + \varepsilon_0) \exp \sigma \frac{1 + \|z\|}{1 - \|z\|},$$

где $z \in B^n$, а показатель σ зависит лишь от типа (Γ, φ) *и величины* $|f(0) + \varepsilon_0$.

В частности, для голоморфных в круге функций, выпускающих значения 0 и 1 (т. е. имеющих тип (Γ_0, x)), получим неравенство Шоттки — Ландау.

Пусть H — плоскость Лобачевского с естественной комплексной структурой.

С л е д с т в и е 4.2. *Если голоморфная в H функция f гиперболического типа ограничена на некотором орицикле O (соответственно, на некоторой геодезической γ), то она ограничена в любой полосе Π, заключенной между двумя орициклами, касающимися абсолюта в той же точке, что и орицикл O (соответственно, заключенной между двумя эквидистантами к γ, т.е. гиперциклами, выходящими на абсолют в той же паре точек, что и γ).*

Оценки в этом следствии имеют коллективный характер. Далее мы конкретизируем эти оценки, выбирая верхнюю полуплоскость в качестве модели плоскости Лобачевского и рассматривая в ней специальные орициклы $L_a := \{\operatorname{Im} z = a\}$, где $a > 0$, и геодезические $\Lambda_b := \{\operatorname{Re} z = b, \operatorname{Im} z > 0\}$.

С л е д с т в и е 4.3. *Фиксируем произвольное $\varepsilon_0 > 0$.*

а) *Если голоморфная в $\boldsymbol{C}_+$ функция f имеет гиперболический тип, то на любой вертикальной полупрямой $\Lambda_b (b \in \boldsymbol{R})$ она имеет порядок $\leqslant 1$, а на любой горизонтальной прямой $L_a (a > 0)$ — порядок $\leqslant 2$. Точнее, при всех b, $x \in \boldsymbol{R}$, a, $y \in \boldsymbol{R}_+$ верны неравенства*

$$|f(b+iy)| \leqslant 2(|f(b+i)| + \varepsilon_0) \exp \sigma_1 y^{\operatorname{sign}(y-1)},$$

и

$$|f(x+ia)| \leqslant 2(|f(ia)| + \varepsilon_0) \exp \sigma_2 (x^2 + a^2),$$

где $\sigma_1(\sigma_2)$ зависит лишь от типа (Γ, φ) функции f и от величины $|f(b+i)| + \varepsilon_0$ (соответственно, $|f(ia)| + \varepsilon_0$).

б) *Если к тому же функция f ограничена на мнимой полуоси Λ_0, то она ограничена в любом «угле Штольца» $\Pi_\alpha := \{\alpha < \arg z < \pi - \alpha\}$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и имеется коллективная оценка $|f(z)| \leqslant 2 M_1 \exp \hat{\sigma}_1 \cdot \left|\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \arg z\right)\right|$, где $z \in \boldsymbol{C}_+$, $M_1 := \sup\limits_{z \in \Lambda_0} |f(z)|$, а показатель $\tilde{\sigma}_1$ зависит лишь от типа (Γ, φ) функции f и от M_1.*

в) *Если в условиях пункта (а) функция f ограничена на некоторой горизонтальной прямой L_a, где $a > 0$, то она ограничена в любой полосе $\Pi(a_0, a_1) := \{a_0 < \operatorname{Im} z < a_1\}$, где $0 < a_0 < a_1$, и имеется коллективная оценка:*

$$|f(z)| \leqslant 2 M_2 \exp \hat{\sigma}_2 \left(\frac{\operatorname{Im} z}{a}\right)^{\operatorname{sing}(\operatorname{Im} z - a)},$$

где $z \in \boldsymbol{C}_+$, $M_2 := \sup\limits_{z \in L_a} |f(z)|$, а показатель $\hat{\sigma}_2$ зависит только от типа (Γ, φ) функции f и от M_2.

Доказательства следствий 4.1—4.3 основаны на теореме 4.1 и несложных оценках гиперболических расстояний в H.

Из пункта (в) следствия 4.3 вытекает такое утверждение о коллективно экспоненциальном росте.

С л е д с т в и е 4.4. *Если голоморфная в $\boldsymbol{C}_+$ функция f имеет гиперболический тип (Γ, φ), а ее модуль ограничен в полосе $\Pi(a) :=$*

$= \{0 < \operatorname{Im} z < a\}$ *константой* $M > 0$, *то* f — *функция экспоненциального типа* σ, *где* σ *зависит лишь от* Γ, φ *и* M.

Интересно было бы выяснить, обязана ли иметь экспоненциальный тип всякая функция гиперболического типа в C_+, которая непрерывна в $\overline{C}_+$ и ограничена на вещественной оси.

Список литературы: 1. *Зайденберг М. Г.* Критерии гиперболичности и семейства кривых // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1989. Вып. 52. С. 40—54. 2. *Ostrovskii L. V.* Generalization of the Titchmarsh convolution theorem and complex-valued measures uniquely determined by their restrictions to a half-line// Lect. Notes Math. 1985. 1155. P. 256—283. 3. *Еременко А. Э.* Мероморфные решения алгебраических дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1982. 37, 4. С. 53—82. 4. *Алгебраические* поверхности // Тр. МИАН. 1965. **75**. 215 с. 5. *Kodaira K.* On compact analytic surfaces // Ann. Math. 1963. **77**, **3**. P. 563—626. 6. *Зайденберг М. Г., Лин В. Я.* Теоремы конечности для голоморфных отображений // Совр. проблемы мат. Фундамент. направления. М., 1986. **9**. С. 127—196. 7. *Голубев В. В.* Однозначные аналитические функции. М., 1961. 455 с. 8. *Хейман У.* Мероморфные функции. М., 1966. 287 с. 9. *Островский И. В.* Об одном классе функций ограниченной вариации на прямой, определяемых своими значениями на полупрямой // Зап. семинаров ЛОМИ. 1979. **92**. С. 220—229.

Поступила в редколлегию 10.07.87