УДК 517.521.8

Н. В. ТРЕТЬЯК

ОДНО СВОЙСТВО МАТРИЦЫ БОРЕЛЯ

В настоящей заметке доказывается, что для произвольной последовательности (ρ_k) неотрицательных чисел условия

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-x}\frac{x^k}{k!}\rho_k = 0 \text{ и } \sum_{k\in J_x}\rho_k = o(\sqrt{x})\ (x\to\infty),$$

где $J_x = [x-\sqrt{x}; x+\sqrt{x}]$, эквивалентны. Это утверждение позволяет конкретизировать для метода суммирования Бореля некоторые общие результаты Н. А. Давыдова [2, 3] о частичных пределах первого рода и суммируемости последовательности к крайней точке ее ядра.

Пусть $x > 0$ и $u_k = u_k(x) = e^{-x}\frac{x^k}{k!}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Известно [1, с. 251], что

1) наибольшим из u_k является u_M, где $M = [x]$, при целом x имеется два наибольших члена u_M и u_{M-1};

2) $u_{k-1} \leqslant u_k$ для $k \leqslant M$ и $u_k > u_{k+1}$ для $k > M$;

3) если $k = M + h$ и $0 < \delta < 1$, то

$$\sum_{|h| > \delta x} u_k(x) = O(e^{-\gamma x}), \tag{1}$$

где $\gamma = \frac{1}{3}\delta^2$;

4) если $k = M + h$, $\frac{1}{2} < \xi < \frac{2}{3}$ и $|h| < x^{\xi}$, то

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi M}}\, e^{-\frac{h^2}{2M}}\left(1 + O\left(\frac{|h|+1}{x}\right) + O\left(\frac{|h|^3}{x^2}\right)\right). \tag{2}$$

Из формулы (2), очевидно, вытекают асимптотические равенства:

$$u_M(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\,(x \to \infty), \tag{3}$$

$$u_{[x \pm \sqrt{x}]}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi e x}}\,(x \to \infty). \tag{4}$$

Пусть $h > -x$. Рассмотрим отношение $\frac{u_k(x)}{u_k(x+h)} = e^h\left(\frac{x}{x+h}\right)^k = \omega(x, k, h)$. Если $x > 0$, $-x < h < 0$, $m \in N$, то $\omega(x, k, h) < \omega(x, k+m, h)$ и

$$u_k(x) = u_k(x+h)\,\omega(x, k, h) < u_k(x+h)\,\omega(x, k+m, h), \tag{5}$$

Если же $x > 0$, $h > 0$, $m \in N$, $m < k$, то $\omega(x, k, h) < \omega(x, k-m, h)$ и

$$u_k(x) = u_k(x+h)\,\omega(x, k, h) < u_k(x+h)\,\omega(x, k-m, h). \tag{6}$$

Вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть $t > 0$. Если $0 \leqslant h < t$, то*

$$e^h\left(\frac{t}{t+h}\right)^{t+h} \leqslant e^{-\frac{h^2}{2t} + \frac{h^3}{2t^2}}. \tag{7}$$

Если $-t < h \leqslant 0$, то

$$e^h\left(\frac{t}{t+h}\right)^{t+h} \leqslant e^{-\frac{h^2}{2t}}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $0 \leqslant h < t$. Тогда в силу неравенства

$$(t+h)\left(-\frac{h}{t} + \frac{h^2}{2t^2} - \frac{h^3}{3t^3} + \cdots\right) \leqslant -h - \frac{h^2}{2t} + \frac{h^3}{2t^2}$$

получим

$$e^h\left(\frac{t}{t+h}\right)^{t+h} = e^{h-(t+h)\ln\left(1+\frac{h}{t}\right)} \leqslant e^{-\frac{h^2}{2t} + \frac{h^3}{2t^2}}.$$

Пусть $-t<h\leqslant 0$. В силу неравенства

$$(t+h)\left(-\frac{h}{t}+\frac{h^2}{2t^2}-\frac{h^3}{3t^3}+\cdots\right)\leqslant(t+h)\left(-\frac{h}{t}+\frac{h^2}{2t^2}-\frac{h^3}{3t^3}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{h}{t}+\frac{h^2}{t^2}-\cdots\right)=(t+h)\left(-\frac{h}{t}+\frac{h^2}{2t^2}-\frac{h^3}{3t^2(t+h)}\right)=$$
$$=-h-\frac{h^2}{2t}+\frac{h^3}{6t^2}\leqslant-h-\frac{h^2}{2t}$$

получаем

$$e^h\left(\frac{t}{t+h}\right)^{t+h}=e^h\,e^{-(t+h)\ln\left(1+\frac{h}{t}\right)}\leqslant e^{-\frac{h^2}{2t}}.$$

Лемма 2. *Пусть* $0<\delta<1$. *Для последовательности* (ρ_k) *неотрицательных чисел условия*

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)\rho_k=0 \text{ и } \lim_{x\to\infty}\sum_{(1-\delta)x<k<(1+\delta)x}u_k(x)\rho_k=0$$

эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{(1-\delta)x<k<(1+\delta)x}u_k(x)\rho_k=0$ и $\varepsilon>0$ — произвольно. Возьмем столь большое x^*, чтобы $e^{-\frac{1}{2}x^*\delta^2(1-\delta)+\delta}<\frac{1}{2}$ и для всех $x>x^*$ выполнялось неравенство $\sum\limits_{(1-\delta)x<k<(1+\delta)x}u_k(x)\rho_k<\frac{\varepsilon}{5}$. По выбранному x^* найдем $x^{**}>x^*$ такое, что для всех $x>x^{**}$ будет $\sum\limits_{k<x^*}u_k(x)\rho_k<\frac{\varepsilon}{5}$. Пусть $x>x^{**}$. Бесконечный промежуток $[x^*;+\infty[$ покроем полусегментами $T_i=[x_i;\ x_{i-1}[$ $(i=1,2,\ldots,m;\ x^*\in T_m)$, $T'_j=[x'_{j-1};\ x'_j[$ $(j=1,2,\ldots)$, где $x_i=(1-\delta)^i x$, $x'_j=(1+\delta)^j x$. Учитывая (5) и (6), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)\rho_k\leqslant\sum_{k<x^*}u_k(x)\rho_k+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k\in T_i}u_k(x_{i-1})\,\omega(x,\ k,\ x_{i-1}-x)\rho_k+$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in T'_j}u_k(x'_{j-1})\,\omega(x,\ k,\ x'_{j-1}-x)\rho_k\leqslant\sum_{k<x^*}u_k(x)\rho_k+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\Big(\omega_i\sum_{k\in T_i}u_k(x_{i-1})\rho_k\Big)+\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\omega'_j\sum_{k\in T'_j}u_k(x'_{j-1})\rho_k\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{5}\left(1+\sum_{i=1}^{m}\omega_i+\sum_{j=1}^{\infty}\omega'_j\right),\ \text{где } \omega_i=\omega(x,\ [x_{i-1}],\ x_{i-1}-x),$$
$$\omega'_j=\omega(x,\ [x'_{j-1}],\ x'_{j-1}-x).$$

Используя (7) и (8), оценим сверху $\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ и $\frac{\omega'_{j+1}}{\omega'_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$:

$$\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} \leqslant \frac{\omega(x, [x_i], x_i - x)}{\omega(x, [x_i], x_{i-1} - x)} \leqslant e^{x_i - x_{i-1}} \left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right)^{x_i} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{1}{2}(1-\delta)^{i-1} x\delta^2} \leqslant e^{-\frac{1}{2}\delta^2 x^*} < \frac{1}{2};$$

$$\frac{\omega'_{j+1}}{\omega'_j} \leqslant \frac{\omega(x, [x'_j], x'_j - x)}{\omega(x, [x'_j], x'_{j-1} - x)} \leqslant e^{x'_j - x'_{j-1}} \left(\frac{x'_{j-1}}{x'_j}\right)^{x'_j} \frac{x'_j}{x_{j-1}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{\frac{1}{2}(1+\delta)^{j+1}\delta^2(1-\delta)x} (1+\delta) \leqslant e^{-\frac{1}{2}\delta^2(1-\delta)x^*} e^{\delta} < \frac{1}{2}.$$

Учитывая полученные оценки, находим, что

$$\frac{\varepsilon}{5}\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{\infty} \omega'_j\right) < \frac{\varepsilon}{5}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k}\right) = \varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Последовательность* (ρ_k) *неотрицательных чисел суммируется методом Бореля к нулю тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k \in J_x} u_k(x)\rho_k = 0.$$

Доказательство. Учитывая лемму 2, достаточно установить импликацию $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{k\in I_x} u_k(x)\rho_k = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{(1-\delta)x \leqslant k \leqslant (1+\delta)x} u_k(x)\rho_k = 0$, где $0 < \delta < 1$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Выберем x^* столь большим, чтобы для всех $x > x^*$ выполнялись условия $\sum\limits_{k\in I_x} u_k(x)\rho_k < \varepsilon$ и $\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1-\delta}{12}$. По выбранному x^* найдем $x^{**} = (1-\delta)^{-1}x^*$. Пусть $x > x^{**}$. Покроем сегмент $[(1-\delta)x, (1+\delta)x]$ промежутками $T_i = [x - ih; x - (i-1)h[$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $T'_j = [x + (j-1)h; x + jh[$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$, $T'_m = [x + (m-1)h; x + mh]$, где $h = \sqrt{(1-\delta)x}$ и $(1-\delta)x \in T_m$, $(1+\delta)x \in T'_m$.

Учитывая (5) и (6), получим

$$\sum_{(1-\delta)x \leqslant k \leqslant (1+\delta)x} u_k(x)\rho_k \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{k\in T_i} u_k(x-(i-1)h)\,\omega(x, k, -(i-1)h)\rho_k +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k\in T'_j} u_k(x+(j-1)h)\,\omega(x, k, (j-1)h)\rho_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\omega_i \sum_{k\in T_i} u_k(x-(i-1)h)\rho_k\right) + \sum_{j=1}^{m} \left(\omega'_j \sum_{k\in T'_j} u_k(x+(j-1)h)\rho_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{m} \omega'_j\right), \text{ где } \omega_i = \omega(x, [x-(i-1)h], -(i-1)h),$$

$$\omega'_j = \omega(x, [x+(j-1)h], (j-1)h)\ (i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Используя (7) и (8), оценим сверху $\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}$ и $\frac{\omega'_{j+1}}{\omega'_j}$:

$$\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} \leqslant \frac{\omega(x, [x-ih], -ih)}{\omega(x, [x-ih], -(i-1)h)} = e^{-h}\left(\frac{x-(i-1)h}{x-ih}\right)^{[x-ih]} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{h^2}{2(x-(i-1)h)}} \leqslant e^{-\frac{1}{2}(1-\delta)};$$

$$\frac{\omega'_{j+1}}{\omega'_j} \leqslant \frac{\omega(x, [x+jh], jh)}{\omega(x, [x+jh], (j-1)h)} = e^{h}\left(\frac{x+(j-1)h}{x+jh}\right)^{[x+jh]} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{h^2}{2(x+(j-1)h)} + \frac{h^3}{2(x+(j-1)h)^2}}\left(1+\frac{h}{x}\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{1-\delta}{4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{-\frac{1-\delta}{4} + \frac{3}{2\sqrt{x}}} \leqslant e^{-\frac{1-\delta}{8}}.$$

Используя полученные оценки, находим, что

$$\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}\omega_i + \sum_{j=1}^{m}\omega'_j\right) \leqslant \varepsilon\left(\left(1-e^{-\frac{1-\delta}{2}}\right)^{-1} + \left(1-e^{-\frac{1-\delta}{8}}\right)^{-1}\right).$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность* (ρ_k) *неотрицательных чисел суммировалась методом Бореля к нулю, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k\in J_x}\rho_k = 0.$$

В справедливости теоремы 1 убеждаемся, принимая во внимание лемму 3 и асимптотические равенства

$$\min_{k\in I_x} u_k(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi e x}} \quad (x\to\infty),$$

$$\max_{k\in I_x} u_k(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \quad (x\to\infty).$$

Следствие. *Для возрастающей последовательности* (k_i) *натуральных чисел* $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_{k_i}(x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\sigma_x = 0$, *где* σ_x — *количество членов последовательности* (k_i), *попадающих в сегмент* I_x.

Утверждение 1. Если возрастающая последовательность (k_i) натуральных чисел удовлетворяет условию $i = o\left(\sqrt{k_i}\right)$ $(i\to\infty)$, то

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} u_{k_i}(x) = 0.$$

Доказательство. Обозначим через $k_{i(x)}$ последний член последовательности (k_i), попавший в сегмент I_x. По условию $\frac{i(x)}{\sqrt{k_{i(x)}}} \to 0$ $(x \to \infty)$. Так как $\sigma_x \leqslant i(x)$ и $x - \sqrt{x} \leqslant k_{i(x)} \leqslant x + \sqrt{x}$, то $\frac{\sigma x}{\sqrt{x}} \to 0$ $(x \to \infty)$.

Пусть B — матрица Бореля. В качестве следствий утверждения 1 и теоремы 1 сформулируем ряд утверждений, касающихся B-частичных пределов первого рода и суммируемости последовательности к крайней точке ее ядра матрицей Бореля. Эти утверждения конкретизируют некоторые общие результаты, полученные Н. А. Давыдовым в работах [2, 3] для произвольных положительных T-матриц.

Утверждение 2. Если в некоторую δ-окрестность конечного частичного предела α последовательности (s_k) попадают лишь члены $s_{k_i^{(\delta)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, причем $i = o\left(\sqrt{k_i^{(\delta)}}\right)$ $(i \to \infty)$, то α — B-частичный предел первого рода.

Теорема 2. *Для того чтобы конечный частичный предел α последовательности (s_k) был B-частичным пределом первого рода, необходимо и достаточно, чтобы существовала δ-окрестность точки α такая, что множество всех членов (s_k), попавших в эту окрестность (пусть это будут члены $s_{k_i^{(\delta)}}$, $i = 1, 2, \ldots$), таково, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sigma_x}{\sqrt{x}} = 0$, где σ_x — количество членов последовательности $(k_i^{(\delta)}$, содержащихся в сегменте I_x.*

Теорема 4. *Если в некоторую R-окрестность бесконечно удаленной точки комплексной плоскости попадают лишь члены $s_{k_i^{(R)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, причем $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum\limits_{k_i^{(R)} \in I_x} |s_{k_i^{(R)}}| = 0$, то бесконечно удаленная точка является B-частичным пределом первого рода последовательности (S_k).*

Теорема 5. *Для того чтобы матрица Бореля суммировала расходящуюся последовательность (s_k) к крайней точке ξ ее ядра, необходимо и достаточно, чтобы в любую δ-окрестность точки ξ попадали члены $s_{k_i^{(\delta)}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, причем*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sigma_x}{2\sqrt{x}} = 1 \text{ и } \lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{m_i^{(\delta)}}(x)\, s_{m_i^{(\delta)}} = 0,$$

где σ_x — количество членов последовательности $(k_i^{(\delta)})$, принадлежащих сегменту I_x, $\{m_i^{(\delta)}\} = \{0, 1, 2,\} \diagdown \{k_i^{(\delta)}\}$.

Список литературы: 1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., 1951. 504 с. 2. *Давыдов Н. А.* О ядре в смысле Кноппа регулярного преобразования // Изв. вузов. Математика. 1983. № 2 (249). С. 30—40. 3. *Давыдов Н. А.* Критерии суммируемости расходящейся последовательности к крайней точке ее ядра регулярной положительной матрицей // Укр. мат. журн. 1984. 36, № 3. С. 292—297.

Поступила в редколлегию 01.07.86