УДК 517.98

Б. А. РУБШТЕЙН

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА С УСЛОВИЕМ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ

В работе рассматривается задача о сохраняющем меру траекторном изоморфизме счетных эргодических групп преобразований с квазиинвариантной мерой. Для различных классов аппроксимативно конечных групп решение этой задачи было получено в [1—3].

Ниже вводится класс групп автоморфизмов пространства с мерой, обладающих свойством почти периодичности (ПП). Эти группы занимают промежуточное положение между группами автоморфизмов, содержащими меру (см. [1]) и группами со свойством условной почти периодичности (УПП), описанными в [3].

1. Траекторный изоморфизм и условие (ПП). Пусть G — счетная эргодическая подгруппа группы всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}X$ пространства Лебега (X, m), $mX = 1$. Через $\Theta(G)$ обозначается разбиение на траектории $Gx = \{gx, g \in G\}$, $x \in X$ группы G и $[G] = \{g \in \mathrm{Aut}X:$

$g(Gx) = Gx$ п. в.$\}$ полная группа группы G. Две такие группы автоморфизмов G_1 и G_2 пространств (X_1, m_1) и (X_2, m_2) соответственно называются траекторно изоморфными с сохранением меры $((G_1, m_1) \sim (G_2, m_2))$, если $S\Theta(G_1) = \Theta(G_2)$ (или $S[G_1]S^{-1} = [G_2]$) и $Sm_1 = m_2$ для некоторого изоморфизма $S: X_1 \to X_2$.

Пусть $M(G)$ — фактор, построенный по G с помощью конструкции Кригера [4]. (Если G действует свободно, то $M(G)$ — скрещенное произведение $L^\infty(X, m)$ на G. Через φ_m обозначается точное нормальное состояние на факторе $M(G)$, определяемое мерой m. Очевидно, из соотношения $(G_1, m_1) \sim (G_2, m_2)$ следует изоморфизм пар $(M(G_1), \varphi_{m_1}) \sim (M(G_2), \varphi_{m_2})$. Обратное, вообще говоря, не верно, если группы G_1 и G_2 не являются аппроксимативно конечными [5].

Будем говорить, что (G, m) удовлетворяет условию почти периодичности (ПП), если существует счетное подмножество $\Gamma \subset]0, +\infty[$ такое, что $\frac{dm(gx)}{dm(x)} \in \Gamma$ для всех $g \in G$ и почти всех $x \in X$. В этом случае обозначим через $\Gamma(G, m)$ совокупность всех $\alpha \in \Gamma$, для которых $m\left\{x \in X: \frac{dm(gx)}{dm(x)} = \alpha\right\} > 0$ при некотором $g \in G$ и через $\tilde{\Gamma}(G, m)$ — счетную подгруппу группы положительных чисел $\boldsymbol{R}_+^*$, порожденную $\Gamma(G, m)$. Понятно, что свойство (ПП) является инвариантом сохраняющего меру траекторного изоморфизма.

Нетрудно проверить, что условие (ПП) означает, что состояние φ_m на факторе $M(G)$ является почти периодическим (в смысле [6] п. 3.7), т. е. модулярный оператор Δ_{φ_m} состояния φ_m имеет полный набор собственных векторов; при этом точечный спектр оператора Δ_{φ_m} совпадает с $\Gamma(G, m)$.

Если при условии (ПП) группа $[G, m] \equiv \{g \in [G]: gm = m\}$ эргодическая, то говорят, что G содержит меру m (см. [1]). С другой стороны, условие (ПП) влечет более слабое свойство условной периодичности, введенное автором в [3].

2. Частичные действия. Обозначим через $U(X)$ множество всех частичных изоморфизмов пространства Лебега (X, m), т.е. множество изоморфизмов $u: A \to B$, где $A \subset X$, $B \subset X$, $mA > 0$, $mB > 0$ и $u(A) = B$. Для таких u положим $E(u) = A$, $F(u) = B$. В $U(X)$ определим естественные операции: $u \to u^{-1}$, $u \in U(X)$, а также $(u, v \to u \circ v$, если $m(F(v) \cap E(u)) > 0$. Введем на $U(X)$ частичный порядок, полагая $u \leqslant v$, если $E(u) \subset E(v)$ и $u = v|_{E(u)}$.

Частичным действием (ч. д.) счетной группы $\tilde{\Gamma}$ на (X, m) назовем отображение $\delta: \Gamma_\delta \ni a \to \delta(a) \in U(X)$ подмножества $\Gamma_\delta \subset \tilde{\Gamma}$, удовлетворяющее условиям: 1. $\Gamma_\delta \in e$ и $\delta(e) = Id_X$, где e — единица группы $\tilde{\Gamma}$ и Id_X — тождественный автоморфизм; 2. если $a \in \Gamma_\delta$, то $a^{-1} \in \Gamma_\delta$ и $\delta(a^{-1}) = \delta(a)^{-1}$; 3. если $a, b \ni \Gamma_\delta$ и $m(E(\delta(a)) \cap F(\delta(b))) > 0$, то $ab \in \Gamma_\delta$ и $\delta(a) \cdot \delta(b) \leqslant \delta(ab)$; 4. наименьшая подгруппа в $\tilde{\Gamma}$, содержащая Γ_δ, совпадает с $\tilde{\Gamma}$.

Частичное действие δ называется эргодическим, если для любых A и B положительной меры существует $a \in \Gamma_\delta$, такое что $m(A \cap \cap E(\delta(a))) > 0$ и $m(B \cap F(\delta(a))) > 0$.

Два ч. д. $\delta_i: \Gamma_{\delta_i} \to U(X_i)$, $i = 1, 2$, назовем эквивалентными $(\delta_1, m_1) \sim (\delta_2, m_2))$, если $\Gamma_{\delta_1} = \Gamma_{\delta_2}$, и существует изоморфизм $S: X_1 \to X_2$ такой, что $S(\delta_1(a)) = \delta_2(a) \cdot S$ для всех $a \in \Gamma_{\delta_1}$ и $Sm_1 = m_2$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha: \tilde{\Gamma} \to \mathrm{Aut}\overline{X}$ — эргодическое действие счетной группы $\tilde{\Gamma}$ на пространстве $(\tilde{X}, m)$; $X \subset \overline{X}$, $\overline{m}X > 0$ и $m = \overline{m}|_X \cdot \times (mX)^{-1}$. Положим $\Gamma_\delta = \{a \in \overline{\Gamma} : m(X \cap \alpha(a)X) > 0\}$, и для каждого $a \in \Gamma_\delta$ введем сужение $\delta(a) = \alpha(a)|_{E(\delta(a))}$, где $E(\delta(a)) = X \cap \cap \alpha(a)^{-1}X$ и $F(\delta(a)) = X \cap \alpha(a)X$. Тогда построенное отображение $\delta: \Gamma_\delta \to U(X)$ является эргодическим ч. д. группы $\overline{\Gamma}$ на (X, m).*

Это ч.д. назовем сужением α на X и обозначим $\alpha|_X$.

Теорема 2. *Всякое эргодическое ч. д.счетной группы $\overline{\Gamma}$ эквивалентное сужению некоторого эргодического действия группы $\overline{\Gamma}$ на подходящее подмножество положительной меры.*

Определим траекторное разбиение $\Theta(\delta)$ ч. д. δ, полагая $x \overset{\theta(\delta)}{\sim} y$, если $y = \delta(a)x$ для некоторого $a \in \Gamma_\delta$. Из теоремы 2, в частности, следует, что разбиение $\Theta(\delta)$ является траекторным разбиением некоторой счетной группы автоморфизмов X. В силу теоремы Кона— Фельдмана — Вейси разбиение $\Theta(\delta)$ аппроксимативно конечно (а.к.), если группа $\overline{\Gamma}$ аменабельна.

3. Инвариант $\delta(G, m)$. Обозначим через σ измеримое разбиение X на эргодические компоненты группы $[G, m]$ и через $(X_G, m_G) = (X/\sigma, m/\sigma)$ — фактор-пространство (X, m) по этому разбиению.

Теорема 3. *Если (G, m) удовлетворяет условию (ПП), то существует единственное эргодическое ч. д. $\delta = \delta(G, m): \Gamma(G, m) \to \to U(X_G)$ группы $\tilde{\Gamma}(G, m)$ в пространстве (X_G, m_G) такое, что для всех $a \in \Gamma(G, m)$, $g \in G$, и п.в. x из равенства $\frac{dm(gx)}{dm(x)} = a$ следует $\delta(a)(\pi_G(x)) = \pi_G(gx)$, где π_G— проекция X в X_G.*

Если (G_1, m_1) и (G_2, m_2) — две группы с условием (ПП), то из $(G_1, m_1) \sim (G_2, m_2)$ следует $(\delta(G_1, m_1), m_{G_1}) \sim (\delta(G_2, m_2), m_{G_2})$.

Таким образом, ч. д. $\delta(G, m)$, точнее его класс эквивалентности, является инвариантом (G, m) относительно сохраняющего меру траекторного изоморфизма.

4. Случай а.к. групп. Поскольку группа $\tilde{\Gamma}(G, m)$, соответствующая паре (G, m) со свойством (ПП), коммутативна и траекторное разбиение ч. д. $\delta = \delta(G, m)$ является аппроксимативно конечным. Поэтому из теоремы 1 работы [3] получаем, что для групп с условием (ПП) полная группа $[G]$ — аппроксимативно конечна в том и только в том случае, когда таковой является группа $[G, m]$. В частности, если $[G, m]$ — типа 1, то группа $[G]$ со свойством (ПП) всегда аппроксимативно конечна. Отметим, что при условии (ПП) группа $[G, m]$ либо типа 1, либо типа П, т. е. смешанный случай исключен.

Если $[G, m]$ — типа 1, то на фактор-пространстве (X_G, m_G) определена измеримая функция $e_G: X_G \to N$, где $e_G(y)$, $y \in X_G$ — число точек с положительной условной мерой в элементе π_G^{-1} разбиения $\sigma = \pi_G^{-1}\varepsilon_{X_G}$.

Приведем теперь основную теорему классификации для групп со свойством (ПП).

Теорема 4. *Пусть* (G_i, m_i), $i = 1, 2$ *удовлетворяет условию (ПП), причем обе группы* G_1 *и* G_2 *аппроксимативно конечны. Тогда:*

1. $(G_1, m_1) \sim (G_2, m_2) \leftrightarrow (M(G_1), \varphi_{m_1}) \sim (M(G_2), \varphi_{m_2})$.

2. *Если при этом* $[G_i, m_i]$ — *типа* Π, *то* $(G_1, m_1) \sim (G_2, m_2) \leftrightarrow \leftrightarrow (\delta(G_1, m_1), m_{G_2}) \sim (\delta(G_2, m_2), m_{G_2})$.

3. *Если* $[G_i, m_i]$ — *типа* I, *то* $(G_1, m_1) \sim (G_2, m_2)$ *в том и только в том случае, когда существует изоморфизм* S, *переводящий* $(\delta(G_1, m_1), m_{G_1})$ *в* $(\delta(G_2, m_2), m_{G_2})$ *такой, что* $e_{G_2} = e_{G_1} \circ S$.

Первое утверждение теоремы верно и для групп со свойством условной почти периодичности ([3], теорема 2).

В случае, когда G_i содержат меры m_i, условие эквивалентности ч. д. $\delta(G_i, m_i)$ $i = 1, 2$, сводится к равенству $\Gamma(G_1, m_1) = \Gamma(G_2, m_2)$, причем $\Gamma(G_i, m_i) = \tilde{\Gamma}(G_i, m_i)$, и второе утверждение теоремы сводится к теореме 4.1 из работы В. Кригера [1].

Для расширений, групп, содержащих меру, изученных автором в [2], инвариант $\delta(G, m)$ совпадает с введенным в [2] инвариантом φ. При этом (G, m) является расширением группы, содержащим меру в смысле [2], в том и только в том случае, когда $\Gamma(G, m) = \tilde{\Gamma}(G, m)$ и $\delta(G, m)$ есть сохраняющее меру m_G действие группы $\Gamma(G, m)$ в X_G.

Теорема 5. *Пусть* $\delta : \Gamma_\delta \to U(Y)$ — *эргодическое ч.д. счетной подгруппы* $\tilde{\Gamma} \subset \boldsymbol{R}_+^*$ *в пространстве Лебега* (Y, ν). *Тогда существует счетная эргодическая аппроксимативно конечная группа* G *автоморфизмов пространства Лебега* $(X, \boldsymbol{m})$ *такая, что* (G, m) *удовлетворяет условию (ПП),* $[G, m]$ — *типа* $\boldsymbol{\Pi}$ *и* $\Gamma(G, m) = \Gamma_\delta$, $(X_G, m_G) = (Y, \nu)$, $\delta(G, m) = \delta$ **(1)**.

5. **Теорема существования.**

Теорема 6. *Пусть* δ — *ч.д. такое же, как в теореме 5. и* $e : Y \to \boldsymbol{N}$ — *измеримая функция, удовлетворяющая соотношению*

$$ae(\delta(a)y) = e(y)\frac{d\nu(\delta(a)y)}{d\nu(y)} \tag{2}$$

для всех $a \in \Gamma_\delta$ *и п.в.* $y \in E(\delta(a))$. *Тогда существует счетная эргодическая группа* G *автоморфизмов пространства* (X, m), *для которой* (G, m) *обладает свойством (ПП),* $[G, m]$ — *типа* I, *причем выполнены равенства (1) и* $e_G = e$.

Условие (2) в этой теореме является необходимым.

Список литературы: 1. *Krieger W.* On non-singular transformation of measure space. I, II // Wahr. und verw. Geb. 1969. **11**, № 2. С. 83—97, 98—119. 2. *Рубштейн Б. А.* О неоднородных финитно-бернуллиевских последовательностях измеримых разбиений // Функцион. анализ. 1976. **10**, № 1. С. 46—53. 3. *Рубштейн Б. А.* О сохраняющем меру траекторном изоморфизме групп преобразований с квазиинвариантной мерой // ДАН СССР. 1984. **276**, № 6. С. 1328—1331 4. *Krieger W.* On constructing non* -isomorphic hyperfinite factor of type III//J. Func. anal. 1970, **6**. С. 97—109. 5. *Connes A., Jones V.* A II_1-factor with two nonconjugate Cartan subalgebras // Bull. AMS. 1982. **6**, N 2. С. 211—212. 6. *Connes A.* Une classification des facteurs de type III // Ann. Sci. Ecoll. norm. rup. 1973. **6**, N 2. С. 133—252.

Поступила в редколлегию 04.10.88