УДК 517.98

Л. И. РОМАНОВ

О СЮРЪЕКТИВНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Пусть $B(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^m)$ — пространство билинейных отображений из $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$ в $\mathbf{C}^m$. Множество сюръективных (содержащих в образе открытое всюду плотное множество) отображений $f \in B(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^m)$ обозначим через $S(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^m)$ $(P(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^m))$. Множество $P(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^m)$ является дополнением к замкнутому алгебраическому множеству. Это вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 1. Для того чтобы отображение f принадлежало $P(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^m)$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись $x \in \mathbf{C}^n$, $y \in \mathbf{C}^k$, для которых образ линейного отображения $(v, u) \to f(x, u) + f(v, y)$ совпадает с $\mathbf{C}^m$.

Если $m > n + k - 1$, то $S(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^m) = P(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^m) = \varnothing$. Для $m \leqslant n + k - 1$ множество $S(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^m)$ не является пустым. Из теоремы о проекции конструктивного множества (см. [1], с. 60) вытекает

Теорема 1. $S(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^m)$ — *конструктивное множество.*

Доказательство. Пусть $f: \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^m$ — произвольное билинейное отображение. В конкретных базисах пространств $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}^k$, $\mathbf{C}^m$ отображение f задается трехмерной матрицей $A = (a_{ij}^l)$ следующим образом:

$$z_l = \sum_{i,j} a_{ij}^l x_i y_j,$$

где $l = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, k$. Введем в рассмотрение множество M_1: $M_1 = \{(A, x, y, z) : f(x, y) = z\}$.

Множество M_1 является конструктивным множеством. Рассмотрим проекцию M_1 на (A, z), обозначим ее M_2: $M_2 = \{(A, z) : \exists x, y\ f(x, y) = z\}$.

Возьмем дополнение к M_2, т. е. $M_3 = \overline{M}_2$: $M_3 = \{(A, z) : \forall x, y\ f(x, y) \neq z\}$.

Возьмем проекцию множества M_3 на A, обозначим ее M_4: $M_4 = \{A : \exists z \forall x, y\ f(x, y) \neq z\}$.

Дополнением к множеству M_4 будет множество M_5: $M_5 = \{A : \forall z \exists x, y\ f(x, y) = z\}$. Ясно, что $M_5 = S(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^m)$. Каждый раз, когда берем проекцию, пользуемся указанной выше теоремой из алгебраической геометрии. Из сказанного следует, что $S(C^n, C^k, C^m)$ является конструктивным множеством.

Теорема 2. *1) Множество $S(C^2, C^k, C^m)$ является дополнением к замкнутому алгебраическому множеству; 2) множество $S(E_1, E_2, C^3)$ открыто в $B(E_1, E_2, C^3)$, где E_1, E_2— банаховы пространства; 3) множество $S(l_2, C^2, l_2)$ не открыто в $B(l_2, C^2, l_2)$; 4) множество $S(C^3, C^3, C^4)$ не открыто в $B(C^3, C^3, C^4)$.*

Утверждения 2) и 3) теоремы доказаны в [2], а 1) вытекает из результатов работы [2]. Для доказательства 4) рассмотрим билинейное отображение $T \in S(C^3, C^3, C^4)$, построенное в [3] в ответ на один вопрос Рудина (см. [4], с. 63). В [3] установлено, что T сюръективно, но не открыто в нуле. Покажем, что T не является внутренней точкой $S(C^3, C^3, C^4)$. Напомним, что $T(x, y) = (x_1y_1; x_1y_2; x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2; x_3y_2 + x_2y_1)$.
Для любого $\alpha \in C$ положим

$$A_\alpha(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 2\alpha(x_3 - x_2) & \alpha(x_3 - x_2) & 0 \\ \alpha(x_2 - x_3) & x_1 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 + \alpha(x_3 - x_2) \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

и $T_\alpha(x, y) = A_\alpha(x)y$.
Отметим, что определитель, образованный первыми тремя строками матрицы $A_\alpha(x)$, равен $[x_1 + \alpha(x_3 - x_2)]^3$. Покажем, что вектор $(0, 0, 0, 1)$ не принадлежит образу T_α при любом $\alpha \neq 0$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (x_1 + 2\alpha x_3 - 2\alpha x_2)\, y_1 + (\alpha x_3 - \alpha x_2)\, y_2 = 0; \\ \alpha(x_2 - x_1)\, y_1 + x_1y_2 = 0; \\ x_3y_1 + x_2y_2 + (x_1 + \alpha x_3 - \alpha x_2)\, y_3 = 0; \\ x_2y_1 + x_3y_2 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Из четвертого уравнения системы (1) следует, что $y = (y_1, y_2, y_3) \neq 0$, значит, для разрешимости системы необходимо, чтобы определитель, образованный первыми тремя строками, был равен нулю, т. е. $[x_1 + \alpha(x_3 - x_2)]^3 = 0$. Отсюда получаем, что $x_1 = \alpha(x_2 - x_3)$. Тогда исходная система (1) становится такой:

$$\begin{cases} \alpha(x_3 - x_2)\, y_1 + \alpha(x_3 - x_2)\, y_2 = 0; \\ \alpha(x_2 - x_3)\, y_1 + \alpha(x_2 - x_3)\, y_2 = 0; \\ x_3y_1 + x_2y_2 = 0; \\ x_2y_1 + x_3y_2 = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $x_3 \neq x_2$. Из первых трех уравнений системы (2) имеем

$$\begin{cases} \alpha y_1 + \alpha y_2 = 0; \\ x_3y_1 + x_2y_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $y_1 = y_2 = 0$, что противоречит с четвертым уравнением системы (2).

Пусть теперь $x_3 = x_2$. В этом случае несовместны третье и четвертое уравнения системы (2).

Таким образом, вектор $(0, 0, 0, 1)$ не принадлежит образу T_α при любом $\alpha \neq 0$. Так как $T_0 = T$, то T не является внутренней точкой множества $S(\boldsymbol{C}^3, \boldsymbol{C}^3, \boldsymbol{C}^4)$.

Возьмем произвольные натуральные числа p, q, r такие, что $r \leqslant p + q - 1$. Пусть $f \in S(\boldsymbol{C}^p, \boldsymbol{C}^q, \boldsymbol{C}^r)$. Положим $\tilde{T}_\alpha(\tilde{x}, \tilde{y}) = (T_\alpha(x, y), f(u, v))$, где $\tilde{x} = (x, u)$, $y = (y, v)$, $u \in \boldsymbol{C}^p$, $v \in \boldsymbol{C}^q$. Имеем $T_\alpha \in B(\boldsymbol{C}^n, \boldsymbol{C}^k, \boldsymbol{C}^m)$, причем $m < n + k - 2$. Из сказанного в доказательстве теоремы 2 следует, что отображение $\tilde{T}_\alpha$ сюръективно только при $\alpha = 0$.

Неизвестно, будет ли открытым множество $S(\boldsymbol{C}^n, \boldsymbol{C}^k, \boldsymbol{C}^m)$ при $\min(n, k) > 2$, $m \in \{n + k - 2, n + k - 1\}$ и $m > 3$?

Уравнение $f(x_1, x_2) = y$ с билинейным оператором $f: E_1 \times E_2 \to F$ можно трактовать как линейное уравнение с ограничением

$$\begin{cases} Ax = y, \\ x \in U, \end{cases} \tag{3}$$

где $A: E_1 \times E_2 \to F$ и U совпадает с образом $E_1 \times E_2$ при естественном вложении в $E_1 \otimes E_2 = E$. Очевидна следующая

Лемма 1. *Задача (3) везде разрешима (при любых y) тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} A + U = E$ и $AE = F$.

О п р е д е л е н и е 1. *Подпространство $L \subset E$ назовем правильным относительно множества $U \subset E$, если $L + U = E$. Множество U назовем устойчивым, если совокупность правильных подпространств L открыта относительно метрики раствора в множестве подпространств.*

Отметим, что замкнутое выпуклое множество может быть неустойчивым даже в конечномерном пространстве. Например, множество $M = \{(x, y) : y \geqslant x^2\}$ неустойчиво в $\boldsymbol{R}^2$. Однако множество с уравнением $y = x^2$ является устойчивым, если его рассматривать в C^2. Пример билинейного отображения T, использованного в теореме 2, показывает, что не любое замкнутое алгебраическое множество устойчиво и в комплексном случае.

Из теоремы 2 и леммы 1 вытекает

С л е д с т в и е 1. *Для матриц с комплексными коэффициентами верно следующее:* 1) *в множестве матриц размера $n \times 2$ совокупность матриц ранга 1 является устойчивым множеством;* 2) *в множестве матриц размера $n \times m$ правильные подпространства относительно матриц ранга 1 такие, что $\operatorname{codim} L \leqslant 3$, образуют открытое множество;* 3) *множество матриц размера 3×3 и ранга 1 не является устойчивым множеством.*

Отметим, что любой замкнутый выпуклый конус является устойчивым множеством [5].

Хорошо известно, что линейный оператор A и его комплексификация A_c сюръективны (или не сюръективны) одновременно. Ниже будет показано, что подобное утверждение для билинейных отображений становится неверным. При этом любое из отображений f, f_c может быть сюръективным, а другое нет.

Рассмотрим отображение, которое в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} x_1y_1 = z_1, \\ x_1y_2 + x_2y_1 = z_2, \\ x_2y_2 = z_3. \end{cases} \tag{4}$$

Ясно, что в комплексном случае при любой правой части (4) возможно представление: $z_1 + z_2t + z_3t^2 = (x_1 + x_2t)(y_1 + y_2t)$. Отсюда следует, что f_c, определяемое равенством (4), сюръективно. Если же (4) рассматривать как $f: \boldsymbol{R}^2 + \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$, то f не сюръективно. В его образ не входит, например, точка $z = (1, 1, 1)$.

Рассмотрим теперь билинейное отображение, которое задается системой уравнений

$$\begin{aligned} & x_1u = a_1, \\ & x_2u = a_2, \\ & x_2v_1 + x_1v_2 = b_1, \\ & -x_1v_1 + x_2v_2 = b_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Если $a_1 = a_2 = 0$, то положим $u = 0$. Можно выбрать числа x_1, x_2 такие, что $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Отсюда следует, что в этом случае система (5) разрешима и в вещественном, и в комплексном случае.

Пусть теперь либо $a_1 \neq 0$, либо $a_2 \neq 0$. Тогда $u \neq 0$, $x_1 = a_1/u$, $x_2 = a_2/u$. Подставляя значения x_1, x_2 в третье и четвертое уравнения системы (5), получаем

$$\begin{aligned} & a_2u_1 + a_2v_2 = b_1 \cdot u, \\ & -a_1v_1 + a_2v_2 = b_2 \cdot u. \end{aligned}$$

Определитель системы уравнений (6) равен $a_1^2 + a_2^2$. В случае $f: \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^4$ этот определитель отличен от нуля. Из сказанного следует, что f сюръективно. Однако отображение f_c: $\boldsymbol{C}^2 \times \boldsymbol{C}^3 \to \boldsymbol{C}^4$ не сюръективно. В его образ не входит, например, вектор $(1, i, 1, 1)$, где i — мнимая единица.

Список литературы: 1. *Мамфорд Д.* Алгебраическая геометрия. I. Комплексные проективные многообразия. М., 1979. 259 с. 2. *Романов Л. И., Шнейберг И. Я.* О топологических свойствах билинейных отображений // Сиб. мат. журн. Новосибирск, 1982. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 19.02.82, № 1063—82. 3. *Horowitz C.* An elementary counterexample to the open mapping principle for bilinearmaps // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. 53, N 2. P. 293—294. 4. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. М., 1974. 114 с. 5. *Романов Л. И.* О нормальности системы конусов и положительных решениях линейных уравнений // Нелинейн. колеб. и теория управл. Ижевск, 1982. Вып. 4. С. 86—91.

Поступила в редколлегию 03.11.87