УДК 517.982

А. Н. ПЛИЧКО

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ОБРАЗАХ

Пусть X — банахово пространство, а X^* — его сопряженное. Система (x_γ, f_γ), $\gamma \in \Gamma$, $x_\gamma \in X$, $f_\gamma \in X^*$, Γ — некоторое множество, называется биортогональной, если $f_\gamma(x_\beta) = 0$ при $\gamma \neq \beta$ и $= 1$ при $\gamma = \beta$, и фундаментальной, если замкнутая линейная оболочка $[x_\gamma: \gamma \in \Gamma] = X$. Фундаментальная биортогональная система, в которой для любого $x \in X$, $x \neq 0$ найдется такой индекс $\gamma \in \Gamma$, что $f_\gamma(x) \neq \neq 0$ называется базисом Маркушевича (сокращенно М-базисом). Говорят, что линейное подпространство $Y \subset X$ является операторным образом, если существуют банахово пространство Z и линейный ограниченный оператор $T: Z \to X$ с $TZ = Y$. Через $l_1(\Gamma)$ будем обозначать пространство абсолютно суммируемых последовательностей $x(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. Пространство $l_1(\Gamma_0)$, $\Gamma_0 \subset \Gamma$, будем отождествлять с подпространством $l_1(\Gamma)$. Все пространства считаются действительными.

Теорема 1. *Пусть существует линейный непрерывный инъективный оператор $T: l_1(\Gamma) \to X$ с плотным образом. Тогда X имеет два пересекающихся лишь по нулю плотных операторных образа.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_i : i \in J$ — разбиение Γ на счетные подмножества: $\Gamma = \bigcup_{i \in J} \Gamma_i$. В каждом пространстве $l_1(\Gamma_i)$ существуют плотные операторные образы Y_i, Z_i, $Y_i \cap Z_i = 0$ [1]. Обозначим через Y подпространство, состоящее из абсолютно сходящихся рядов $\sum_{i \in J} y_i$, $y_i \in Y_i$, а через Z — подпространство, состоящее из абсолютно сходящихся рядов $\sum_{i \in J} z_i$, $z_i \in Z_i$. Тогда TY и TZ будут необходимыми операторными образами.

Следствие 1. *Банахово пространство X с фундаментальной биортогональной системой $(x_\gamma, f_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ имеет два пересекающихся лишь по нулю плотных операторных образа.*

Доказательство. Конечно, можно считать $\|x_\gamma\| = 1$. Пусть e_γ — единичные орты пространства $l_1(\Gamma)$. Положим $Te_\gamma = x_\gamma$. Отображение T расширяется до линейного ограниченного оператора из $l_1(\Gamma)$ в X. Легко видеть, что он инъективен.

Следствие 2. *В пространстве $l_\infty(\Gamma)$ существуют два пересекающихся по нулю плотных операторных образа.*

Действительно, $l_\infty(\Gamma)$ имеет фундаментальную биортогональную систему [2].

Теорема 1 и следствия связаны с вопросом из [3] о том, существуют ли в любом банаховом пространстве, в частности в l_∞, два плотных пересекающихся по нулю операторных образа. Этот вопрос связан с изучением безопорных выпуклых множеств. Напомним определения. Подмножество A нормированного пространства называется безопорным, если никакой ненулевой линейный непрерывный функционал не достигает своих верхней и нижней граней на A. Нормированное пространство называется безопорным, если оно содержит замкнутое ограниченное выпуклое безопорное множество. Говорят, что банахово пространство слабо компактно порождено, если оно является замкнутой линейной оболочкой своего слабокомпактного подмножества. Символом $c_0(\Gamma)$ будем обозначать пространство таких последовательностей $x(\gamma)$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число координат по модулю, превышающих ε, с супремум-нормой.

Лемма 1. *В пространстве $l_1(\Gamma)$ существует плотный операторный образ, пересекающийся с линейной оболочкой* $\operatorname{lin}(e_\gamma: \gamma \in \Gamma)$ *единичных ортов $l_1(\Gamma)$ по нулю.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_i : i \in J$ — разбиение Γ на счетные подмножества. В каждом $l_1(\Gamma_i)$ существует плотный операторный образ U_i, $U_i \cap \operatorname{lin}(e_\gamma : \gamma \in \Gamma_i) = 0$; это следует из результатов работы [1]. Тогда подпространство U, состоящее из абсолютно сходящихся рядов $\sum_{i \in J} u_i$, $u_i \in U_i$, будет искомым.

Теорема 2. *Во всяком слабокомпактно порожденном пространстве X существует плотный безопорный операторный образ.*

Доказательство. Пусть Y — рефлексивное пространство и R — плотный инъективный оператор из Y в X [4, с. 127]. Пусть $(y_\gamma, g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ — M-базис в Y, $\|y_\gamma\| = 1$ [5, с. 693] и e_γ — стандартные орты пространства $l_1(\Gamma)$. Положим $S(e_\gamma) = y_\gamma$. Отображение S расширяется до линейного непрерывного инъективного оператора из $l_1(\Gamma)$ в Y. Согласно лемме 1 выберем плотный операторный образ $U \subset l_1(\Gamma)$, $U \cap \operatorname{lin}_{\gamma \in \Gamma} e_\gamma = 0$. Тогда оператор $T = RS$ слабокомпактен, инъективен и, поскольку S — сопряженный оператор, $A = T(B_U)$ (B_U — l_1-шар подпространства U), является замкнутым подмножеством нормированного пространства $Z = (TU, \| \ \|_X)$. Отметим, что оператор S^* переводит Y^* в подпространство $c_0(\Gamma) \subset l_\infty(\Gamma) = l_1(\Gamma)^*$. Поэтому, если a — опорная точка множества A с опорным функционалом f, то $T^{-1}a$ является опорной точкой шара B_U с опорным функционалом $T^*f \in c_0(\Gamma)$. Легко убедиться, что если b — опорная точка шара пространства $l_1(\Gamma)$ и соответствующий опорный функционал $g \in c_0(\Gamma)$, то b обязана иметь конечное число отличных от нуля координат, т. е. не принадлежать U. Таким образом, множество A не имеет опорных точек.

Замечание. Для сепарабельных банаховых пространств эта теорема доказана в работе [3]; там же было высказано предположение о ее справедливости для слабокомпактно порожденных пространств.

Вопрос. В любое ли банахово пространство X можно плотно и инъективно вложить некоторое $l_1(\Gamma)$? В частности, в $X = m_0(\Delta)$ — пространство ограниченных функций на множестве Δ, принимающих ненулевые значения не более чем в счетном числе точек.

Список литературы: 1. *Shevchik V. V.* On subspaces of a Banach space that coincide with the ranges of continuous linear operators // Revue Roum. math. pures et appl. 1986. **31**, N 1. P. 65—71. 2. *Davis W. J., Johnson W. B.* On the existence of fundamental and total bounded biorthogonal systems in Banach spaces // Studia Math. 1973. 45, N 2. P. 173—179. 3. *Borwein J. M., Tingley D. W.* On supportless convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. **94**, N 3. P. 471—476. 4. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. Избранные главы. К., 1980. 145 с. 5. *Singer I.* Bases in Banach spaces. II. Berlin, 1981. 880 p.

Поступила в редколлегию 21.09.87