УДК 517.5

И. Е. ОВЧАРЕНКО, В. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОДКЛАССОВ В РЕШЕНИИ ОДНОМЕРНОЙ И ДВУМЕРНОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

Пусть $\{a_{nm}\}_{n,\ m=0}^{\infty}$ — двумерная моментная последовательность, т. е.

$$a_{nm} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu^m \sigma(d\lambda;\ d\mu),\ \ \sigma(d\lambda;\ d\mu) \geqslant 0. \qquad (1)$$

Совокупность всех мер, задающих представление (1), будем обозначать через Σ_a. Предметом наших рассмотрений будут такие последовательности a_{nm}, у которых существуют меры из Σ_a, обладающие априорной локализацией, т. е. у которых предписанные области свободны от масс. Если D — некоторая область в $\mathbb{R}^2$, то через $\Sigma_{\text{ex}D}$ ($\Sigma_{\text{in}D}$) будем обозначать подсовокупности Σ_a, выделяемые условиями $\operatorname{supp}\sigma \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus D$ ($\operatorname{supp}\sigma \subseteq D$). Имея в виду априорную локализацию меры, естественно рассмотреть традиционные для проблемы моментов вопросы существования, единственности и описания множества решений. Мы будем пользоваться подходом, разработанным в [1] (одномерная часть) и [2, 3] (сведение двумерной проблемы к набору одномерных). С целью сокращения числа проверяемых условий несколько изменены построения работы [1]. Будем придерживаться терминологии, принятой в монографии [4]. Заметим, что в интересном обзоре [5] отражены результаты о локализации представляющей меры иного характера, чем приводимые ниже.

§ 1. Одномерная проблема моментов. 1. Разрешимость и единственность. Пусть $E_j = (\alpha_j,\ \beta_j)$, $j = 1, \ldots, m$ — система интервалов, $-\infty < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \ldots < \beta_m < +\infty$, $E = \cup E_j$. Множеству E сопоставим две системы из 2^m многочленов:

$$P_{\text{ex}} = \Big\{P_\varepsilon(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \alpha_k)^{\varepsilon k} (\lambda - \beta_k)^{\varepsilon k}\Big\},$$

$$P_{in} = \{\overline{P}_\varepsilon(\lambda) = (-1)^{\Sigma \varepsilon k} P_\varepsilon(\lambda)\},\ \ \varepsilon_k = 0,\ 1;\ \ \varepsilon = (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_m) \qquad (2)$$

пробегает всевозможные наборы из нулей и единиц. По системам P_{In}, P_{ex} определим теперь две системы операторов D_{in} и D_{ex} над последовательностью $\{s_k\}$, положив $\{P_\varepsilon s\}_k = \sum a_n s_{k+n}$, если $P_\varepsilon(\lambda) = \sum a_n \lambda^n$, $P_\varepsilon \in P_{\text{in}} \vee P_{\text{ex}}$.

Теорема 1. (см. [1], см. также [5]).

Для того чтобы вещественная последовательность $\{s_n\}$ представлялась в виде

$$s_n = \int\limits_{ExtE} \lambda^n \rho(d\lambda), \qquad (3)$$

$$n = 0,\ 1,\ 2 \ldots$$

$$\left(s_n = \int\limits_{\underline{E}} \lambda^n \rho(d\lambda)\right), \qquad (3а)$$

необходимо и достаточно, чтобы она оставалась позитивной под действием всех операторов системы D_{ex} (D_{in}). *Эквивалентным последнему является также позитивность последовательности* $\{s_n\}$ *относительно множества* $ExtE$:

$$((\forall P(x)_{|\,ExtE} \geqslant 0) \wedge P(x) \not\equiv 0) \rightarrow (F\{P\} > 0),\ \ F(P) = \sum a_k x_k,\ \ x_k := s_k.$$

Теорема 2. ([1]). *Пусть для последовательности* $\{S_n\}$ *выполнены условия теоремы I. Для того чтобы в представлении (3) мера* $\rho(d\lambda)$ *определялась неединственным (единственным) образом, необходимо и достаточно, чтобы проблема моментов Гамбургера для всех* 2^m *последовательностей* $Dex\{s_n\}$ *(по крайней мере, для одной из* 2^m *последовательностей) были неопределенными (определенной).*

Заметим, что проблема моментов (3а) всегда определенная.

Общий критерий определенности, выражаемый теоремой 2, допускает следующую аналитическую конкретизацию. Пусть $\{P_N(z)\}_{N=0}^{\infty}$ — система ортонормированных многочленов относительно последовательности $\{s_n\}$. Известно (см. [4], с. 67), что для определенности проблемы моментов Гамбургера

$$s_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \sigma(d\lambda),\ \ n = 0,\ 1,\ \ldots \qquad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд $\Sigma\,[P_N(z)]^2$ расходился хотя бы в одной невещественной точке. Чтобы сформулировать такого рода критерий определенности в нашем случае, воспользуемся теоремой Кристоффеля, из которой следует, что ортонормированные системы многочленов $P_N(P_\varepsilon(s_n);\ z)$, порождаемые последовательностями $P_\varepsilon(s_n)$, выражаются через $\{P_k(z)\}$ следующим образом:

$$P_N(P_E(S_n);\ z) = \gamma_N(P_E) \cdot \prod_{j=1}^{l} (z - \alpha_{kj})^{-1} (z - \beta_{kj})^{-1} \cdot$$

$$\det\begin{pmatrix} P_N & P_{N+1} & P_{N+2} & \ldots & P_{N+2l} \\ z & \alpha_{k_1} & \beta_{k_1} & \ldots & \beta_{k_l} \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где $\varepsilon_{k_j} = 1,\ \varepsilon_r = 0$ при $r \neq k_j,\ j = 1,\ 2, \ldots l$.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Для определенности проблемы моментов (3) необходимо и достаточно, чтобы расходился, по крайней мере, один из 2^m рядов:*

$$\sum_{N=0}^{\infty} [P_N(P_\varepsilon(s_n);z)]^2 \tag{6}$$

хотя бы в одной невещественной точке z.

Заметим, что соотношения (5) выражают ортогональные многочлены для последовательностей $D_{\text{ex}}s_n$ непосредственно через систему ортогональных многочленов для последовательности $\{s_n\}$.

2. Характеризация решений проблемы моментов с люками. Пусть теперь проблема моментов Гамбургера для последовательности $\{S_n\}$ неопределенная, $Q_N(z)$ — многочлены 2-го рода (см. [4], с. 18):

$$W(z) = \| W_{ij}(z) \|_{i,\, j=1}^{2} = \begin{bmatrix} z\sum\limits_0^\infty Q_k(0)\, Q_k(z) & 1+z\sum\limits_0^\infty P_k(0)\, Q_k(z) \\ -1+z\sum\limits_0^\infty Q_k(0)\, P_k(z) & z\sum\limits_0^\infty P_k(0)\, P_k(z) \end{bmatrix} - \tag{7}$$

матрица-функция Неванлинны (см. [4], с. 72).

Теорема 4. *Пусть проблема моментов (3) на множестве $ExtE$ неопределенная. Равенством*

$$\int\limits_{ExtE} \frac{\sigma(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{w_{11}(z)\,\varphi(z) + w_{12}(z)}{w_{21}(z)\,\varphi(z) + w_{22}(z)} \; (= W(z)\cdot\varphi(z)) \tag{8}$$

устанавливается одно-однозначное соответствие между совокупностью Σ_E решений проблемы моментов (3) и совокупностью функций $\varphi(z)$ класса Неванлинны, удовлетворяющих условиям $(z-\beta_j)(z-\alpha_j)^{-1} \times \times\, \psi_j(z) \in N$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Здесь

$$\varepsilon_{\alpha_j\beta_j} := \begin{bmatrix} W_{21}(\alpha_j) & W_{22}(\alpha_j) \\ W_{21}(\beta_j) & W_{22}(\beta_j) \end{bmatrix}$$

$$\psi_j(z) := \varepsilon_{\alpha_j\beta_j}\cdot\varphi,$$

$W(z)\cdot\varphi(z)$ означает результат действия дробно-линейного преобразования с коэффициентами $w_{ij}(z)$ над функцией $\varphi(z)$.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 4, сделаем замечания:

1. Для случая $m = 1$ проблема моментов (3) была рассмотрена К. И. Швецовым (см. [4], с. 297). В случае $m > 1$, насколько нам известно, впервые описание решений проблемы моментов с люками было дано в [1].

2. В целях «самозамкнутости» изложения и соблюдения специфики, свойственной проблеме моментов, доказательство приводится для операторов, отвечающих проблеме моментов. Читатель, знакомый с теорией Луи де Бранжа [6] гильбертовых пространств целых функций, может восстановить аналог теоремы 4 применительно к области высказываний этой теории. В работе [8] для общего эрмитова оператора рассматриваются вопросы, близкие к изучаемым в § 1 для оператора, отвечающего проблеме моментов.

3. Общая проблема исследования эрмитовых операторов, самосопряженные расширения которых могут иметь *a'priori* предписанную систему люков в спектре, неоднократно ставилась М. Г. Крейном на его семинарах.

Доказательство. Отправляясь от системы $\{P_N\}$ ортогональных многочленов относительно последовательности $\{s_n\}$, построим специальные квазиортогональные многочлены $P_N(z;\gamma)=b_{N-1}[P_N(z)\times\times P_{N-1}(\gamma)-P_N(\gamma)P_{N-1}(z)]$, где $\{b_{N-1}\}$ — элементы якобиевой матрицы (см. [4]), ассоциированной с проблемой моментов Гамбургера, γ принимает значения α_j, β_j, $j=1, 2, \ldots, m$. При каждом N многочлены $P_N(z;\ \alpha_j)$, $P_N(z;\ \beta_j)$, обращаясь в нуль при $z=\alpha_j$ (соответственно при $z=\beta_j$), сохраняют знак на оставшейся части $[\alpha_j,\ \beta_j]$. Это следует из того, что любой квазиортогональный многочлен для последовательности $\{s_n\}$ (см. [4]) в каждом из $[\alpha_k,\ \beta_k]$ может иметь не более одного нуля. Последнее в свою очередь следует из позитивности $\{s_n\}$ на множестве $ExtE$. В самом деле, пусть $R_N(x)=a(x-x_1)\cdot\cdot(x-x_{N-\nu})\cdot(x-\gamma_1)\cdot\ldots(x-\gamma_\nu)$ — квазиортогональный многочлен, нули $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu\ (\nu>1)$ которого $\in[\alpha_k,\ \beta_k]$. В случае четного ν для многочлена $Q(x)=\operatorname{sign} a\cdot R_N(x)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{N-\nu})$ должны были бы выполняться взаимоисключающие соотношения: $F\{Q\}>0$ (ввиду того что $Q(x)_{|ExtE}\geqslant 0$), и $F\{Q\}=0$ в силу квазиортогональности многочлена R_N. В случае нечетного ν в качестве $Q(x)$ может быть принят многочлен $Q(x)=\operatorname{sign} a\cdot R_N(x)\cdot(x-\gamma_1)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{N-\nu})$.

Вернемся теперь к квазиортогональным многочленам $P_N(z;\ \gamma)$ и отвечающим им многочленам второго рода, которые можно записать в виде $Q_N(z;\ \gamma)=b_{N-1}[Q_N(z)P_{N-1}(\gamma)-Q_{N-1}(z)P_N(\gamma)]$.

Из определения $P_N(z;\ \gamma)$, $Q_N(z;\ \gamma)$ следует соотношение

$$Q_N(z;\alpha)P_N(z;\ \beta)-Q_N(z;\ \beta)P_N(z;\ \alpha)\equiv P_N(\alpha;\ \beta)<0 \tag{9}$$

и требуется лишь проверить, что $P_N(\alpha;\ \beta)<0$. Но из формулы Кристоффеля-Дарбу ([4], с. 19) при $z=\beta$ и $\mu\to\beta$ следует, что

$$0<\sum_{k=0}^{N-1}[P_k(\beta)]^2=b_{N-1}[P_{N-1}(\beta)P'_N(\beta)-P_N(\beta)P'_{N-1}(\beta)]=P'_N(\beta;\ \beta).$$

Так как $P_N(\beta;\ \beta)=0$, $P'_N(\beta;\ \beta)>0$ и $P_N(z;\ \beta)$ в $[\alpha,\ \beta)$ отличен от нуля, то $P_N(z;\ \beta)<0$ при $z\in[\alpha,\ \beta)$ и, в частности, $P_N(\alpha;\ \beta)<0$.

Непосредственным вычислением проверяется, что многочлены

$$\frac{P_N(z;\ \alpha_k)}{z-\alpha_k},\quad \frac{P_N(z;\ \beta_k)}{z-\beta_k} \tag{10}$$

являются квазиортогональными многочленами степени $N-1$ относительно моментной последовательности

$$t_j^{(k)}=s_{j+2}-(\alpha_k+\beta_k)s_{j+1}+\alpha_k\beta_k s_j,\ j=0,\ 1,\ \ldots, \tag{11}$$

а соответствующие многочлены второго рода определяются формулами

$$(z-\beta_k)Q_N(z;\ \alpha_k)-P_N(z;\ \alpha_k)\frac{s_1+(z-\alpha_k-\beta_k)s_0}{z-\alpha_k},$$

$$(z-\alpha_k)Q_N(z;\ \beta_k)-P_N(z;\ \beta_k)\frac{s_1+(z-\alpha_k-\beta_k)s_0}{z-\beta_k}. \tag{12}$$

Моментные последовательности $\{s_j\}$ и $\{t_j^{(k)}\}$ порождают, по условию, неопределенные проблемы моментов. Поэтому существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} P_N(z;\ \alpha_k) = H(z;\ \alpha_k),\ \lim_{N\to\infty} P_N(z;\ \beta_k) = H(z;\ \beta_k),$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{P_N(z, \alpha_k)}{z-\alpha_k} = \frac{H(z;\ \alpha_k)}{z-\alpha_k} = H_1(z;\ \alpha_k),$$

$$\frac{H(z;\ \beta_k)}{z-\beta_k} = H_1(z;\ \beta_k),\ \lim_{N\to\infty}\left\{(z-\beta_k)\, Q_N(z;\ \alpha_k) - \frac{P_N(z;\ \alpha_k)}{z-\alpha_k}\times\right.$$
$$\left.\times [s_1 + (z-\alpha_k-\beta_k)\, s_0]\right\} = (z-\beta_k)\, G(z;\ \alpha_k) - H_1(z;\ \alpha_k)\, [s_1 + (z-$$
$$-\alpha_k-\beta_k)\, s_0] = G_1(z;\ \alpha_k),\ (z-\alpha_k)\, G(z;\ \beta_k) - H_1(z;\ \beta_k)\times$$
$$\times [s_1 + (z-\alpha_k-\beta_k)\, s_0] = G_1(z;\ \beta_k).$$

Далее используем два утверждения.

Лемма 1. *Формулу Неванлинны*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{W_{11}(z)\,\varphi(z) + W_{12}(z)}{W_{21}(z)\,\varphi(z) + W_{22}(z)} \tag{13}$$

(в обозначениях монографии [4] $W_{11}(z) = -A(z)$, $W_{12}(z) = C(z)$ $W_{21}(z) = B(z)$, $W_{22}(z) = -D(z)$) *можно представить в виде*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{W_1(z;\ \beta_k)\,\Psi(z) + W_1(z;\ \alpha_k)}{W_2(z;\ \beta_k)\,\Psi(z) + W_2(z;\ \alpha_k)}, \tag{14}$$

где $W_1(z; \beta_k) = -G(z; \beta_k)$, $W_1(z; \alpha_k) = G(z; \alpha_k)$, $W_2(z; \beta_k) = H(z; \beta_k)$, $W_2(z; \alpha_k) = -H(z; \alpha_k)$, *а* $\Psi(z)$ *пробегает класс* N *и связана с* $\varphi(z)$ *формулой* $\Psi(z) = \varepsilon_{\alpha_k\beta_k} \odot \varphi(z)$.

В самом деле, как следует из определения, многочлены $P_N(z; \gamma)$, $Q_N(z; \gamma)$ выражаются через специальные комбинации $A_N(z)$, $B_N(z)$, $C_N(z)$, $D_N(z)$ (см. [4], с. 25), переходящие в пределе в элементы матрицы-функции Неванлинны, ортогональных многочленов $P_N(z)$ и многочленов $Q_N(z)$. Именно, $P_N(z; \gamma) = B_N(z)\, D_N(\gamma) - D_N(z)\, B_N(\gamma)$, $Q_N(z; \gamma) = A_N(z)\, D_N(\gamma) - C_N(z)\, B_N(\gamma)$, $\lim_{N\to\infty} A_N(z) = -W_{11}(z)$, $\lim_{N\to\infty} C_N(z) = W_{12}(z)$, $\lim_{N\to\infty} B_N(z) = W_{21}(z)$, $\lim_{N\to\infty} D_N(z) = -W_{22}(z)$. Следовательно,

$$\frac{W_1(z;\ \beta_k)\,\Psi(z) + W_1(z;\ \alpha_k)}{W_2(z;\ \beta_k)\,\Psi(z) + W_2(z;\ \alpha_k)} = -\lim_{N\to\infty} \frac{Q_N(z;\ \beta_k)\,\Psi(z) - Q_N(z;\ \alpha_k)}{P_N(z;\ \beta_k)\,\Psi(z) - P_N(z;\ \alpha_k)} =$$

$$= -\lim_{N\to\infty} \frac{A_N(z)\,\dfrac{D_N(\beta_k)\,\Psi(z) - D_N(\alpha_k)}{B_N(\beta_k)\,\Psi(z) - B_N(\alpha_k)} - C_N(z)}{B_N(z)\,\dfrac{D_N(\beta_k)\,\Psi(z) - D_N(\alpha_k)}{B_N(\beta_k)\,\Psi(z) - B_N(\alpha_k)} - D_N(z)} =$$

$$= \frac{W_{11}(z)\,[\varepsilon^{-1}_{\alpha_k\beta_k} \odot \Psi(z)] + W_{12}(z)}{W_{21}(z)\,[\varepsilon^{-1}_{\alpha_k\beta_k} \odot \Psi(z)] + W_{22}(z)},$$

что и есть (13). Покажем, что Ψ пробегает класс N. Для этого достаточно проверить выполнение неравенства $I = W_{21}(\alpha_k) W_{22}(\beta_k) - W_{21}(\beta_k) W_{22}(\alpha_k) > 0$. Прямое вычисление показывает, что $I = -H(\alpha_k; \beta_k)$. Выше отмечено было, что $-P_N(\alpha_k; \beta_k) > 0$ при всех N. Поэтому $I \geqslant 0$. Если $I = 0$, то $G(z; \alpha_k)/H(z; \alpha_k) = G(z; \beta_k)/H(z; \beta_k)$ и точки $W_1 = G(z; \alpha_k)/H(z; \alpha_k)$, $W_2 = G(z; \beta_k)/H(z; \alpha_k)$ предельной окружности $K_\infty(z)$ [4] слились бы в одну, что невозможно, так как значениям w_1, w_2 отвечают разные меры ρ_1 и ρ_2 (у одной из них среди точек роста имеется точка $t = \alpha_k$ и нет точки $t = \beta_k$, а у другой — имеется точка $t = \beta_k$ и нет точки $t = \alpha_k$). Лемма доказана.

Из (9) и (10) вытекает тождество $G_1(z; \beta_k) H_1(z; \alpha_k) - G_1(z; \alpha_k) \times H_1(z; \beta_k) \equiv -H(\alpha_k; \beta_k) > 0$, из которого, в сочетании с леммой 1, следует

Лемма 2. *Для моментной последовательности (11) формулу Неванлинны можно представить в виде*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{W_3(z; \beta_k)\,\omega(z) + W_3(z; \alpha_k)}{W_4(z; \beta_k)\,\omega(z) + W_4(z; \alpha_k)}, \tag{15}$$

где $W_3(z; \beta_k) = -G_1(z; \beta_k)$, $W_3(z; \alpha_k) = G_1(z; \alpha_k)$, $W_4(z; \beta_k) = H_1(z; \beta_k)$, $W_4(z; \alpha_k) = -H_1(z; \alpha_k)$, *а* $\omega(z)$ *пробегает класс* N.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Пусть мера $\xi(d\lambda)$ является одним из решений проблемы моментов (3). В частности, $\rho(d\lambda)$ будет решением проблемы моментов Гамбургера и потому в равенстве (13) ей отвечает некоторая функция $\varphi(z) \in N$. Мера $\tau_k(d\lambda) = (\lambda - \alpha_k)(\lambda - \beta_k)\rho(d\lambda)$ является решением проблемы моментов

$$t_j^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^j \tau_k(d\lambda),\ j = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

и в формуле (15) ей отвечает функция $\omega(z) \in N$. Воспользовавшись соотношениями, связывающими $H_1(z; \gamma)$, $G_1(z; \gamma)$ и $H(z; \gamma)$, $G(z; \gamma)$, получим равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_k(d\lambda)}{\lambda - z} = s_1 + (z - \alpha_k - \beta_k)s_0 - (z - \alpha_k)(z - \beta_k) \times$$
$$\times \frac{G(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1}\omega(z) - G(z; \alpha_k)}{H(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1}\omega(z) - H(z; \alpha_k)}$$

и сравним его с получающимся из вида функции $\tau_k(d\lambda)$ равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_k(d\lambda)}{\lambda - z} = s_1 + (z - \alpha_k - \beta_k)s_0 - (z - \alpha_k)(z - \beta_k)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(d\lambda)}{\lambda - z}.$$

В результате получаем следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{W_1(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1}\omega(z) + W_1(z; \alpha_k)}{W_2(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1}\omega(z) + W_2(z; \alpha_k)}.$$

По лемме 1 функции $\rho(d\lambda)$ отвечает функция $\Psi(z)=\varepsilon_{\alpha_k\beta_k}\odot\varphi(z)$ и, следовательно,

$$\frac{z-\alpha_k}{z-\beta_k}\,\omega(z)=\varepsilon_{\alpha_k\beta_k}\odot\varphi(z),$$

т. е.

$$N\ni\omega(z)=\frac{z-\beta_k}{z-\alpha_k}\,\varepsilon_{\alpha_k\beta_k}\odot\varphi(z),$$

и первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\varphi(z)\in N$, $\omega(z)=(z-\beta_k)(z-\alpha_k)^{-1}\cdot\varepsilon_{\alpha_k\beta_k}\odot\varphi(z)\in N$. По лемме 2 функции $\omega(z)$ отвечает некоторая представляющая мера $\tau_k(d\lambda)$ для последовательности (11), а функции $\varphi(z)$ по формуле (13) — решение $\rho(d\lambda)$ проблемы моментов (4). Из леммы 1 следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(d\lambda)}{\lambda-z}=\frac{W_1(z;\beta_k)(z-\alpha_k)(z-\beta_k)^{-1}\omega(z)+W_1(z;\alpha_k)}{W_2=(z;\beta_k)(z-\alpha_k)(z-\beta_k)^{-1}\omega(z)+W_2(z;\alpha_k)},$$

$$\omega(z)=(z-\beta_k)(z-\alpha_k)^{-1}\psi(z),\quad \psi(z)=\varepsilon_{\alpha_k\beta_k}\odot\varphi(z).$$

В соответствии с леммой 2

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_k(d\lambda)}{\lambda-z}=\frac{W_3(z;\beta_k)\omega(z)+W_3(z;\alpha_k}{W_4(z;\beta_k)\omega(z)+W_4(z;\alpha_k)}=$$

$$=s_1+(z-\alpha_k-\beta_k)s_0+(z-\alpha_k)(z-\beta_k).$$
$$\frac{W_1(z;\beta_k)(z-\alpha_k)(z-\beta_k)^{-1}\omega(z)+W_1(z;\alpha_k)}{W_2(z;\beta_k)(z-\alpha_k)(z-\beta_k)^{-1}\omega(z)+W_2(z;\alpha_k)}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_k(d\lambda)}{\lambda-z}=s_1+(z-\alpha_k-\beta_k)s_0+(z-\alpha_k)(z-\beta_k)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(d\lambda)}{\lambda-z}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda-\alpha_k)(\lambda-\beta_k)}{\lambda-z}\rho(d\lambda).$$

Следовательно, $0\leqslant\tau_k(d\lambda)=(\lambda-\alpha_k)(\lambda-\beta_k)\rho(d\lambda)$ и, значит, $\rho((\alpha_k,\beta_k))=0$. Теорема доказана.

§ 2. Двумерная проблема моментов. 1. Общие положения. Опираясь на теорему 4 и приводимую ниже теорему 5 из [3], покажем, какой класс «подставляемых параметров» приводит к решениям с предписанной локализацией в некотором классе областей. Приведем необходимые определения и факты.

Моментная последовательность (M-последовательность a_{nm} называется λ-полуопределенной, если a_{n0}— определенная моментная последовательность, т. е. мера $\rho(d\lambda)$ в представлении

$$a_{n0} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \rho(d\lambda) \tag{17}$$

единственна.

Пусть $H_{0,\lambda}$— гильбертово пространство, получающееся замыканием множества многочленов по метрике, порождаемой последовательностью a_{n0}, а $P_N(\lambda) = \sum_{k=0}^{k=N} \gamma_{kN}\lambda^k$ — ортогональные многочлены, построенные по последовательности a_{n0}.

Теорема 5. *Пусть a_{nm}— λ-полуопределенная M-последовательность. Она представима в виде*

$$a_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n s_\lambda(m)\, \rho(d\lambda), \tag{18}$$

где $\rho(d\lambda)$ — мера из (17), а

$$s_\lambda(m) := \sum_{N=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} a_{km}\gamma_{kN}\Big) P_N(\lambda). \tag{19}$$

Сходимость ряда понимается в пространстве $H_{0,\lambda} (= L^2_\rho)$. При любом m $S_\lambda(m)$ — ρ-измеримая функция λ и ρ — п. в. $s_\lambda(m)$-одномерная моментная последовательность.

Определение. *Меру $\rho(d\lambda)$ и $s_\lambda(m)$ будем называть параметрами λ-полуопределенной M-последовательности a_{nm}.*

В терминах параметров легко формулируется общий критерий единственности меры σ из (1). Именно, чтобы σ из (1) была единственной, необходимо и достаточно, чтобы ρ-п.в. $s_\lambda(m)$ были определенными моментными последовательностями. Справедливо также аналитическое описание множества Σ_a представляющих мер из (1). Если ρ-п.в. последовательности $S_\lambda(m)$ неопределенные, то равенствами

$$\sigma(\Delta' \times \Delta'') = \int_{\Delta'}\int_{\Delta''} \eta_\lambda(d\mu)\, \rho(d\lambda), \tag{20}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_\lambda(d\mu)}{\mu - z} = W(z; \lambda) \odot \varphi(z; \lambda) \tag{21}$$

устанавливается одно-однозначное соответствие между Σ_a и семействами функций класса N, ρ-измеримых по λ. Здесь $W(z;\lambda)$ —матрица Неванлинны для последовательности $s_\lambda(m)$.

2. Общие критерии разрешимости и единственности. Пусть теперь $-\infty < \alpha_1(\lambda) < \beta_1(\lambda) < \alpha_2(\lambda) < \cdots < \beta_m(\lambda) < \infty$, $E_{\alpha_k(\lambda),\, \beta_k(\lambda)} = \{(\lambda, \mu) : -\infty < \lambda < \infty,\ \alpha_k(\lambda) < \mu < \beta_k(\mu)\}$ — «криволинейная полоса»

$$E^{\text{in}} := \bigcup_{j=1}^{m} \bar{E}_{\alpha_k(\lambda),\, \beta_k(\lambda)},\ \ E^{\text{ex}} := Ext E^{\text{in}}.$$

Теорема 6. *Для того чтобы λ-полуопределенная M-последовательность a_{nm} допускала представление* (1) *с* $\operatorname{supp}\sigma \subseteq E^{\mathrm{in}}$ ($\operatorname{supp}\sigma \subseteq E^{\mathrm{ex}}$), *необходимо и достаточно, чтобы ρ -п .в. последовательности $s_\lambda(m)$ оставались моментными при применении всех операторов системы* D_{in} (D_{ex}).

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы 6 и E — множество тех λ, при которых какая-либо из моментных последовательностей $P_\varepsilon(s_\lambda(m))$ определенная. Для того чтобы множество $\Sigma^{E^{\mathrm{ex}}}$ было одноэлементным, необходимо и достаточно, чтобы E было множеством полной ρ-меры.*

Теоремы 6 и 7 следуют из теорем 2 и 5. Следующее утверждение является одной из их аналитических форм:

Пусть a_{nm} — λ-полуопределенная M-последовательность, ($\rho(\lambda)$, $s_\lambda(m)$) — ее параметры, E — конечная система «криволинейных» полос, задаваемых функциями $\alpha_j(\lambda)$, $\beta_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $D_{\mathrm{ex},\,\lambda}$ — система операторов, отвечающих $\bigcup\limits_{j=1}^{m}(\alpha_j(\lambda),\ \beta_j(\lambda))$, а $\{P_N(z;\ \lambda)\}$ — системы ортогональных многочленов для последовательностей $P_{\varepsilon,\,\lambda}(s_\lambda(m))$, выражаемая формулами (5). *Через $E_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ обозначим множество расходимости в какой-либо невещественной точке рядов* (6) *для последовательностей $P_{E,\,\lambda}(s_\lambda(m))$. Для того, чтобы множество $\Sigma_{Ext E}$ было одноэлементным, необходимо и достаточно, чтобы множество $\bigcup\limits_{1}^{2^m} E_j(\lambda)$ имело полную ρ-меру.*

Замечание. Как следует из теоремы 2 из [3], множество $\Sigma_{E^{\mathrm{in}}}$ либо пусто, либо одноэлементно.

3. Аналитическое описание множества $\Sigma_{E^{\mathrm{ex}}}$.

Теорема 8. *Пусть a_{nm} — λ-полуопределенная M-последовательность, $\rho(d\lambda)$* и *$s_\lambda(m)$ — ее параметры из* (18), *причем ρ — п. в. — проблема моментов*

$$s_\lambda(m) = \int\limits_{Ext \bigcup (\alpha_j(\lambda),\ \beta_j(\lambda))} \mu^m \eta_\lambda(d\mu)$$

неопределенная. Пусть $W(z;\ \lambda)$ — матрица-функция Неванлинны для последовательности $s_\lambda(m)$. Равенствами (20), (21) *устанавливается одно-однозначное соответствие между совокупностью $\Sigma_{E^{\mathrm{ex}}}$ и совокупностью функций $\varphi(z;\ \lambda)$, выделяемой следующими свойствами: при $j = 1, 2, \ldots, m$ и ρ -п. в. λ 1°. $\varphi(z;\ \lambda) \in N$; 2° каждая из функций*

$$\frac{z-\beta_j(\lambda)}{z-\alpha_j(\lambda)}\begin{bmatrix} W_{21}(\alpha_j(\lambda);\ \lambda) & W_{22}(\alpha_j(\lambda);\ \lambda) \\ W_{21}(\beta_j(\lambda);\ \lambda) & W_{22}(\beta_j(\lambda);\ \lambda)\end{bmatrix} \odot \varphi(z;\ \lambda) \in N. \qquad (22)$$

Доказательство. Согласно теореме 3 из [2] равенствами (20,) (21) и (22) в случае, когда правая часть (22) есть $W(z; \lambda \cdot \varphi(z; \lambda)$, где $\varphi(z;\ \lambda)$ — ρ-измеримое по λ семейство N-функций, восстанавливается любая $\sigma \in \Sigma_a$. Если теперь $\sigma(d\lambda;\ d\mu) \in \Sigma_{E^{\mathrm{ex}}}$, то меры $\eta_\lambda(d\mu)$ из (20) для данной σ таковы, что $\operatorname{supp}\eta_\lambda(d\mu) \subset E^{\mathrm{ex}}$. Согласно теореме 4 $\varphi(z;\ \lambda)$ в (21) таковы, что при $j = 1, 2, \ldots, m$ ρ-п. в. выполняются 1° и 2°.

Так как приведенное выше рассуждение полностью обратимо, то доказательство завершено.

Замечание. Существование $\varphi(z;\lambda)$, удовлетворяющих условиям 2°, следует из теоремы 4 и 6.

В случае одной «криволинейной» полосы теорема 8 может быть усилена.

Теорема 9. *Пусть $E_{\alpha(\lambda),\,\beta(\lambda)}$ — «криволинейная» полоса, a_{nm} — λ полуопределенная последовательность, $\rho(d\lambda)$, $s_\lambda(m)$ — ее параметры. Пусть выполняются условия теоремы 7 и ρ-п. в. проблема моментов*

$$s_\lambda(m) = \int\limits_{Ext(\alpha(\lambda),\,\beta(\lambda))} \mu^m \eta_\lambda(d\mu) \tag{23}$$

неопределенная. Равенствами

$$\sigma(\Delta'\times\Delta'') = \int\limits_{\Delta'}\int\limits_{\Delta''} \eta_\lambda(d\mu)\,\rho(d\lambda), \tag{24}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_\lambda(d\mu)}{\mu - z} = W(z;\lambda)\cdot\begin{bmatrix} -W_{22}(\beta(\lambda);\lambda) & W_{22}(\alpha(\lambda);\lambda) \\ W_{21}(\beta(\lambda);\lambda) & -W_{21}(\alpha(\lambda);\lambda)\end{bmatrix} \odot \tau(z;\lambda) \tag{25}$$

устанавливается одно-однозначное соответствие $\Sigma_{ExtE\alpha(\lambda),\,\beta(\lambda)} \leftrightarrow \{\tau(z;\lambda)\}$, где семейство $\tau(z;\lambda)$ допускает мультипликативное представление

$$\tau(z;\lambda) = C_\lambda \exp \int\limits_{Ext(\alpha(\lambda),\,\beta(\lambda))} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right)\alpha(t;\lambda)\,dt \tag{26}$$

с ρ-измеримыми функциями $\alpha(t;\lambda)$ и C_λ, и ρ-п. в. $C_\lambda > 0$, $0 \leqslant \alpha(t;\lambda) \leqslant 1$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 8 и перепишем равенство (22) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_\lambda(d\mu)}{\mu - z} = \left(W(z;\lambda)\cdot\begin{bmatrix} -W_{22}(\beta(\lambda);\lambda) & W_{22}(\alpha(\lambda);\lambda) \\ W_{21}(\beta(\lambda);\lambda) & -W_{21}(\alpha(\lambda);\lambda)\end{bmatrix}\right) \odot$$
$$\odot \left(\begin{bmatrix} W_{21}(\alpha(\lambda);\lambda) & W_{22}(\alpha(\lambda);\lambda) \\ W_{21}(\beta(\lambda);\lambda) & W_{22}(\beta(\lambda);\lambda)\end{bmatrix} \odot \varphi(z;\lambda)\right). \tag{27}$$

Здесь учтено, что перемножению матриц из коэффициентов дробно-линейных преобразований отвечает последовательная их композиция. Переходя теперь к функции

$$\tau(z;\lambda) := \begin{bmatrix} W_{21}(\alpha(\lambda);\lambda) & W_{22}(\alpha(\lambda);\lambda) \\ W_{21}(\beta(\lambda);\lambda) & W_{22}(\beta(\lambda);\lambda)\end{bmatrix} \odot \varphi(z;\lambda), \tag{28}$$

заключаем из (22), что $\tau(z;\lambda)$ принадлежит классу функций $S_1(\alpha(\lambda), \beta(\lambda))$ (см. [7], с. 528) и, следовательно, допускает мультипликативное представление (26). Из ρ-измеримости семейств функций $\varphi(z;\lambda)$ и $W_{jk}(z;\lambda)$ следует ρ-измеримость функций C_λ и $\alpha(t;\lambda)$. Обращение рассуждений завершает доказательство.

4. Критерии локализации для областей специального вида. В рассматриваемых ниже случаях для подкласса λ-полуопределенных

последовательностей критерии непустоты множеств $\Sigma_{Ext E\alpha(\lambda),\, \beta(\lambda)}$ ($\Sigma_{\mathrm{int} E\alpha(\lambda),\, \beta(\lambda)}$) могут быть выражены в терминах самой последовательности a_{nm}, а не ее параметров (ρ, s_λ).

Пусть $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ — определенная моментная последовательность

$$s_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \rho(d\lambda), \ \rho(d\lambda) \geqslant 0, \tag{29}$$

$s_n^{(1)}$ — последовательность вида

$$s_n^{(1)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n f(\lambda) \rho(d\lambda), \tag{30}$$

$f(\lambda) \in L_\rho^2$. Последовательность s_n будем называть p-вполне определенной, если из того, что последовательность s_n^1 позитивная, следует, что $f(\lambda) \geqslant 0$. Как показано в [9], класс p-вполне определенных моментных последовательностей у́же класса определенных. Там же приведены некоторые критерии p-определенности.

Пусть $E_{\alpha(\lambda),\, \beta(\lambda)}$ — «полиномиальная» полоса, т. е.

$$\alpha(\lambda) = \sum_{k=0}^{M} \alpha_k \lambda^k, \ \beta(\lambda) = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \lambda^k, \ \alpha(\lambda)\beta(\lambda) = \sum_{k=0}^{2M} \gamma_k \lambda^k. \tag{31}$$

Пусть a_{nm}, $(n, m) \in \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+$ — вещественная положительно-определенная последовательность, т. е. ядро

$$K_a(n, m;\ l, k) := a_{n+k,\, m+l} \tag{32}$$

положительно определенное.

Теорема 10. *Пусть a_{nm} — вещественная п- о. последовательность, для которой последовательность a_{n0} — р-вполне определенная. Для того чтобы a_{nm} была М-последовательностью такой, что $\Sigma_{Ext E\alpha(\lambda),\, \beta(\lambda)} \neq \varnothing$ ($\Sigma_{\mathrm{int} E\alpha(\lambda),\, \beta(\lambda)} \neq \varnothing$) необходило и достаточно, чтобы*

1) *выполнялись неравенства*

$$\sum_{N=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=0}^{N} a_{km} \gamma_{kN} \Big|^2 \leqslant a_{0,\, 2m}, \tag{33}$$

2) *последовательность*

$$\hat{a}_{nm} = a_{n,\, m+2} - \sum_{k=0}^{M} (\alpha_k + \beta_k)\, a_{n+k,\, m+1} + \sum_{s=0}^{2M} \gamma_s a_{n+s,\, m}, \tag{34}$$

$$(\hat{a}_{nm}^- := -\hat{a}_{nm}) \tag{35}$$

положительно-определенная.

Доказательство. Покажем, что a_{nm} — M-последовательность. Согласно [10] для a_{nm} справедливо представление

$$a_{nm} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n s_\lambda(m) \rho(d\lambda), \tag{36}$$

$s_\lambda(m)$ задаются правой частью равенства (19), $s_\lambda(m) \in L^2_\rho$, ρ — мера, представляющая последовательность a_{n0}. Если $P(\lambda)$ и $Q(\lambda) = \Sigma \xi_j \mu^j$ — многочлены, то

$$0 \leqslant F[|P|^2 |Q|^2] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |P(\lambda)|^2 \Big(\sum_{j,\, k} s_\lambda(j+k) \xi_j \bar{\xi}_k \Big) \rho(d\lambda),$$

откуда и из p-вполне определенности последовательности a_{n0} следует, что при любом финитном наборе $\{\xi_j\}$ $\sum\limits_{j,\, k} s_\lambda(j+k) \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0$, т. е. ρ — почти всюду

$$s_\lambda(m) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \eta_\lambda(d\mu), \;\; \eta_\lambda(d\mu) \geqslant 0. \tag{37}$$

В [10] показано, что выбрать семейство мер $\eta_\lambda(d\mu)$, чтобы при любом борелевском множестве E на оси функция $\eta_\lambda(E)$ была ρ-измеримой. Из возможности такого выбора следует, что a_{nm} — M-последовательность и представляющая ее в виде (1) мера задается равенством

$$\sigma(\Delta' \times \Delta'') = \int\limits_{\Delta} \int\limits_{\Delta''} \{\eta_\lambda(d\mu)\} \rho(d\lambda). \tag{38}$$

Доказательство существования представляющей меры (38) последовательности a_{nm} с заданной локализацией одинаково для обеих локализаций. Приведем его для $\Sigma_{Ext E \alpha(\lambda),\, \beta(\lambda)}$. Как показано в [3], критерием непустоты множества $\Sigma_{Ext E \alpha(\lambda),\, \beta(\lambda)}$ является положительная определенность ρ-п. в. последовательностей

$$s_\lambda(m+2) - (\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)) s_\lambda(m+1) + \alpha(\lambda)\beta(\lambda) s_\lambda(m). \tag{39}$$

Введем выражения (31) для $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ в (34). Умножив после этого полученное выражение на λ^k и интегрируя по $\rho(d\lambda)$, имеем в силу (32), что последовательность (34) положительно определенная.

Переходя к достаточной части, заметим, что для a_{nm} справедливо представление (1) с распределением $\hat{\sigma}(d\lambda_j,\, d\mu) = (\mu - \alpha(\lambda))(\mu - \beta(\lambda)) \times \eta_\lambda(d\mu)\rho(d\lambda)$, где $\eta_\lambda(d\mu)$ из (38), и, таким образом,

$$a_{nm} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_{\alpha(\lambda),\, \beta(\lambda)} s_\lambda(m) \rho(d\lambda), \tag{40}$$

$$D_{\alpha(\lambda),\, \beta(\lambda)} s_\lambda(m) := s_\lambda(m+2) - (\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)) s_\lambda(m+1) + \alpha(\lambda)\beta(\lambda) s_\lambda(m)$$

Если $P(\lambda)$ и $Q(\lambda) = \Sigma \xi_j \mu^j$ — многочлены, то ввиду положительной определенности $\hat{a}_{nm}$

$$0 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int |P(\lambda) Q(\mu)|^2 \hat{\sigma}(d\lambda;\, d\mu) =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |P(\lambda)|^2 \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |Q(\mu)|^2 (\mu - \alpha(\lambda))(\mu - \beta(\lambda)) \eta_\lambda(d\mu) \Big\} \rho(d\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |P(\lambda)|^2 \left\{ \sum_{j,\,k} [s_\lambda (j+k+2) - (\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)) s_\lambda (j+k+1) + \right.$$

$$\left. + \alpha(\lambda)\beta(\lambda) s_\lambda (j+k)] \, \xi_j \bar{\xi}_k \right\} \rho(d\lambda). \qquad (41)$$

Так как любой неотрицательный многочлен $A(\lambda)$ представим в виде $[P_1(\lambda)]^2 + [P_2(\lambda)]^2$, то последнее неравенство справедливо, если вместо $[P(\lambda)]^2$ стоит произвольный неотрицательный многочлен. А так как $\rho(d\lambda)$ — мера p-определенной моментной последовательности, то неравенство (41) справедливо также, если вместо $|P(\lambda)|^2$ подставить в него произвольную неотрицательную непрерывную функцию из L^2_ρ. Отсюда следует, что ρ-п. в. последовательность $D_{\alpha(\lambda),\,\beta(\lambda)} s_\lambda(m)$ положительно определенная. Остается применить теорему 1 из [3].

Теорема 10 может быть обобщена в двух направлениях: 1) $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ задаются целыми функциями с ростом, обеспечивающим «прохождение» предыдущих рассуждений; 2) $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ задаются ортогональными разложениями по системе многочленов $P_N(\lambda)$, т. е. $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$, $\alpha(\lambda)\beta(\lambda) \in L^2_\rho$,

$$\alpha(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k(\lambda), \;\; \beta(\lambda) = \sum_{L=0}^{\infty} \beta_L P_L(\lambda), \;\; \alpha(\lambda)\beta(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_S P_S(\lambda). \qquad (42)$$

Мы остановимся кратко на втором обобщении, так как этот случай включает области с негладкой границей. Отправным пунктом, как и в предыдущем случае, является теорема 1 из [3]. Запишем условие локализации $s_\lambda(m+2) - (\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)) s_\lambda(m+1) + \alpha(\lambda)\beta(\lambda) s_\lambda(m) \gg 0$. Вводя сюда выражения (42), умножая на λ^n и интегрируя по $\rho(d\lambda)$, получаем, что последовательность

$$\hat{a}_{nm} = a_{n,\,m+2} - \sum_{L=0}^{\infty} (\alpha_L + \beta_L) \sum_{k=0}^{L} \gamma_k a_{n+k,\,m+1}$$

положительно определенная. Обратно, из положительной определенности $\hat{a}_{nm}$ следует, как и в теореме 10, существование представляющей меры с искомой локализацией.

Критерий локализации для системы «криволинейных» полос может быть получен, если в качестве отправного положения принять теорему 6 и далее следовать конструкции теоремы 10.

Как показывает приведенное выше рассуждение, совокупность условий: a_{nm} — положительно-определенная, a_{no} — p-вполне определенная и выполнимость неравенств (33) достаточна для того, чтобы a_{nm} была M-последовательностью. По нашему мнению, это аналог для двумерной проблемы моментов известной теоремы М. С. Лившица о продолжении эрмитово-положительной функции с полосы на плоскость. Вместе с тем, видна и специфика рассматриваемого случая. Сочетание построений работ [3,10] с аналитическими критериями из [9] p-вполне определенности одномерной моментной последовательности позволяет выделить ряд случаев, когда можно утверждать разрешимость двумерной проблемы моментов.

Список литературы: 1. *Фильштинский В. А.* Степенная проблема моментов на всей оси при заданном конечном числе пустых интервалов в спектре // Зап. мех.-мат. фак-та Харьк. гос. ун-та и Харьк. мат. об-ва. X., 1964, 30, сер. 4. С. 186—200. 2. *Овчаренко И. Е.* Интегральные представления полуопределенных степенных моментных последовательностей // Докл. АН УССР, сер. А. 1983, № 3. С. 17—20. 3. *Овчаренко И. Е.* Моментные последовательности с представляющими мерами, свободными от масс в некоторых областях // Докл. АН СССР. 1983. 273, № 1. С. 41—45. 4. *Ахиевер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961. 310 с. 5. *Fuglede B.* Multidimensional moment problem // Expositions Math. 1983. **1**, N 1. 1—17. 6. *Branges Louis de.* Hilbert spaces of entire functions // Prentice Hall. 1968. P. 326. 7. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* О функции Вейля и эрмитовых операторах с лакунами // Докл. АН СССР. 1987. **293**, № 1. С. 1041—1045. 8. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973. 551 с. 9. *Kowalski M. A.* Representations of inner products in the space of Polynomials // Acta Math. Hung. 1985. **46** (1—2). 101—109. 10. *Овчаренко И. Е.* О двумерных степенных моментных последовательностях // Укр. мат. журн. 1984. **36**, № 1. С. 51—56.

Поступила в редколлегию 16.05.88