УДК 517.982

М. И. ОСТРОВСКИЙ

О ТОТАЛЬНЫХ НЕНОРМИРУЮЩИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ СОПРЯЖЕННОГО БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

Используемые нами определения совпадают с принятыми в [1 — 3]. Напомним некоторые из них. Пусть X — банахово пространство. Подпространствами будем называть замкнутые линейные многообразия. Коразмерностью фактор-пространства X/L будем называть размерность подпространства $L \subset X$. Будем говорить, что подпространство $M \subset X^*$ нормирует подпространство $L \subset X$, если $\exists \lambda > 0 \ \forall x \in L \exists f \in M (\|f\| \leqslant 1 \wedge |f(x)| \geqslant \lambda \|x\|)$.
Подпространство M называется нормирующим, если оно нормирует все X.

Слабым* секвенциальным замыканием подпространства $M \subset X^*$ (иногда слабой* производной или w^*-производной) называется множество всех пределов слабо* сходящихся последовательностей из M. Обозначается слабое* секвенциальное замыкание через $M_{(1)}$. Слабое* секвенциальное замыкание не является топологическим — С. Мазуркевич (1930) показал, что, вообще говоря, равенство $M_{(1)} = (M_{(1)})_{(1)}$ не имеет места. Это послужило причиной введения (С. Банахом) следующего определения. Для ординала α слабым* секвенциальным замыканием порядка α подпространства $M \subset X^*$ называется $M_{(\alpha)} := \bigcup_{\beta<\alpha} (M_{(\beta)})_{(1)}$.

Для тотального подпространства $M \subset X^*$ через X_M обозначим пополнение пространства X по норме $\|x\|_M = \sup\{|f(x)| : f \in M, \|f\| = 1\}$.

В связи с исследованиями о регуляризуемости суперпозиций линейных операторов [4] возник вопрос: для каких сепарабельных банаховых пространств (СБП) X найдется в X^* такое подпространство M, что $M_{(1)} \neq M_{(2)} = X^*$ (1) и что при этом можно сказать об X_M? Ответ на первый вопрос является частным случаем основного результата работы [5]: такое подпространство M в X^* существует в том и только в том случае, когда СБП X неквазирефлексивно. Поэтому вопрос сводится к такому. Пусть X — неквазирефлексивное СБП, подпространство $M \subset X^*$таково, что выполнено условие (1). Каким может быть X_M? Мы будем рассматривать этот вопрос и в случае, когда M — произвольное тотальное подпространство в X^*.

В работе [4] доказано, что для пространств, представимых в виде бесконечной прямой суммы нерефлексивных СБП по пространству с безусловно монотонным базисом (и, следовательно, для классических нерефлексивных пространств) найдется подпространство $M \subset X^*$, удовлетворяющее условию (1), для которого X_M изоморфно X.

В [6, с. 356] указано, что Дейнеман доказал, что любое бесконечномерное подпространство M в l_1 нормирует некоторое бесконечномерное подпространство в c_0, откуда следует, что для любого тотального $M \subset (c_0)^* = l_1$ пространство $(c_0)_M$ содержит подпространство, изоморфное c_0.

В настоящей работе эти исследования будут продолжены. Полученные результаты позволяют выделить класс СБП, сопряженные к которым содержат тотальные подпространства, не нормирующие никаких бесконечномерных подпространств.

Предложение. *Пусть X — неквазирефлексивное СБП, M — тотальное не нормирующее подпространство в X^*. Тогда сопряженное к X_M содержит нормирующее подпространство бесконечной коразмерности.*

Доказательство. Ясно, что M, рассматриваемое как подпространство в X_M^*, является нормирующим. Покажем, что M имеет бесконечную коразмерность в X_M^*. Предположим противное. Тогда X_M^* можно разложить в прямую сумму $X_M^* = K \oplus M$, где K — некоторое конечномерное пространство. Нетрудно видеть, что X_M^*, рассматриваемое как подпространство в X^*, совпадает с $M_{(1)}$. Поэтому $M_{(1)} = K \oplus M$. Отсюда легко выводится, что $M_{(1)} = M_{(2)}$, и, следовательно, [2, с. 48] $M_{(1)}$ слабо* замкнуто. В силу тотальности отсюда следует $M_{(1)} = X_M^*$. Последнее равенство, как известно [2, с. 47], эквивалентно тому, что M — нормирующее. Получаем противоречие.

Теорема. *Пусть $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность нерефлексивных СПБ, Z — пространство с фиксированным безусловно монотонным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, а $Y = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus V_i\right)_Z$. Если СБП X имеет фактор-пространство бесконечной коразмерности, изоморфное Y, то в X^* найдется подпространство M, удовлетворяющее условию (1), и такое, что X_M изоморфно $Y \oplus Z$.*

Доказательство. Через $\{e_i^*\}_{i=1}^{\infty} \subset Z^*$ обозначим биортогональные функционалы базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Они образуют безусловно монотонную базисную последовательность. Нетрудно видеть, что пространство Y^* можно описать следующим образом: $Y^* = \{y^* = (v_1^*, v_2^*, \ldots$
$\ldots, v_n^*, \ldots) : v_i^* \in V_i^*;\ \|y\| = \sup_k \|\sum_{i=1}^{k} \|v_i^*\| e_i^*\|_{Z^*} < \infty\}$.

Для каждого натурального i в V_i^{**} найдется такой функционал ω_i, что $\|\omega_i\| = 1$ и $\ker \omega_i \subset V_i^*$ имеет характеристику Диксмье, не меньшую 1/3. Введем функционалы $\Omega_i \in Y^{**}$ равенствами $\Omega_i((v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*, \ldots)) = \omega_i(v_i^*)$.

Обозначим через F фактор-отображение $F: X \to Y$, существующее по предположению. Выберем согласно [3, с. 225—226] в $\ker F$ M-базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которого $r([x_i^* |_{\ker F}\}_{i=1}^{\infty}) = 1$ (r — характеристика Диксмье). Дополним его до M-базиса всего пространства X векторами $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ [3, с. 231, 858]. Пусть $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty} \cup \{z_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ — соответствующие биортогональные функционалы. Не уменьшая общности, можно считать, что $\| x_i^* \| = 1$. Введем оператор $T: Y^* \to X^*$ равенством $T(y^*) = \sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} \Omega_i (y^*) x_i^* + F^*(y^*)$. Ясно, что T — изоморфное вложение; $(1 - 1/3) \| y^* \| \leqslant \| Ty^* \| \leqslant (1 + 1/3) \| y^* \|$ **(2)**.

Покажем, что подпространство $M := T(Y^*) \subset X^*$ будет удовлетворять заключению теоремы.

Проверим, что для подпространства M выполнено условие **(1)**

Чтобы убедиться, что $M_{(1)} \neq X^*$, покажем, что $x^* = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} x_i^* \notin M_{(1)}$. Действительно, пусть последовательность $\{y_k^*\}_{k=1}^{\infty} \subset Y^*$ такова, что $w^* - \lim_{k \to \infty} T(y_k^*) = x^*$. Из этого соотношения и неравенства (2) следует что $\sup_k \| y_k^* \| = C < \infty$. Кроме того, для любого натурального i имеем $\lim_{k \to \infty} T(y_k^*) x_i = x^*(x_i)$, или $\lim_{k \to \infty} 4^{-i} \Omega_i (y_k^*) = 2^{-i}$, следовательно, $2^{-i} \leqslant C \cdot 4^{-i}$. Полученное противоречие показывает, что $x^* \notin M_{(1)}$.

Покажем, что $M_{(2)} = X^*$.

Лемма. *Для любого вектора $y^* \in Y^*$ найдется последовательность векторов $y_k^* \in Y^*$, для которых $\| y_k^* \| \leqslant 4 \| y^* \|$; $w^* - \lim_{k \to \infty} y_k^* = 0$, и для всех натуральных i имеет место $\Omega_i (y_k^*) = \Omega_i (y^*)$.*

Доказательство. Пусть $y^* = (v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*, \ldots)$. Так как $r(\ker \omega_i) \geqslant 1/3$, то для любого натурального i найдутся такие $u_{ij}^* \in V_i^*$, что $\forall j \in \mathbf{N}$, $u_{ij}^* \in \ker \omega_i$ **(3)** $\| u_{ij}^* \| \leqslant 3 \| v_i^* \|$ и $w^* - \lim_{j \to \infty} u_{ij}^* = v_i^*$ **(4)**.

Положим $y_k^* = (v_1^* - u_{1k}^*, v_2^* - u_{2k}^*, \ldots, v_n^* - u_{nk}^*, \ldots)$. Ясно, что $\| v_n^* - u_{nk}^* \| \leqslant 4 \| v_n^* \|$. Следовательно, $\| y_k^* \| \leqslant 4 \| y^* \|$ **(5)**.

То, что $\Omega_i (y_k^*) = \Omega_i (y^*)$ следует из (3). То, что $w^* - \lim_{k \to \infty} y_k^* = 0$, следует из (4) и (5). Лемма доказана.

Применяя лемму к произвольному $y^*(j) \in Y^*$, для которого $\Omega_i (y^*(j)) = \delta_{ij}$, получаем $x_j^* \in M_{(1)}$.

Используя лемму, можно показать также, что $F^*(Y^*) \subset M_{(1)}$. Действительно, пусть $y^* \in Y^*$. Выберем последовательность $\{y_k^*\}_{k=1}^{\infty} \subset Y^*$ согласно лемме. Имеем $M \ni T(y^*) - T(y_k^*) = F^*(y^*) - F^*(y_k^*)$, и, так как $w^* \lim_{k \to \infty} F^*(y_k^*) = 0$, то $F^*(y^*) \in M_{(1)}$.

Покажем, что $M_{(1)} \subset X^*$ — нормирующее подпространство. Пусть $x \in X$. Если $\| Fx \| \geqslant \| x \|/3$, то найдется такой $y^* \in Y^*$, что $(F^* y^*) \times (x) \geqslant \| x \|/3$ и $\| F^* y^* \| = 1$. Если же $\| Fx \| < \| x \|/3$, то представим вектор x в виде $x = y + z$, где $\| y \| < \| x \|/3$, а $z \in \ker F$. Ясно, что $\| z \| > 2 \| x \|/3$. Пусть функционал $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^* \in X^*$ таков, что $\| \sum a_i \times$ $\times x_i^* |_{\ker F} \| \leqslant 1$ и $\left(\sum a_i x_i^*\right)(z) > 2 \| x \|/3$. Пусть z^* — продолжение с сохранением нормы функционала $\sum a_i x_i^* |_{\ker F}$ на все X. Ясно, что $\left(\sum a_i x_i^* - z^*\right) \in F^*(Y^*)$, и, следовательно, $z^* \in M_{(1)}$. Кроме того, имеем $| z^*(x) | \geqslant | z^*(z) | - | z^*(y) | > \| x \|/3$. Итак, подпространство $M_{(1)} \subset X^*$ является нормирующим. В силу [2, с. 47] отсюда следует, что $M_{(2)} = X^*$. Таким образом, доказательство соотношения (1) завершено.

Докажем, что X_M изоморфно $Y \oplus Z$. Нетрудно видеть, что для доказательства этого достаточно для векторов $x \in X$, представимых в виде

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i 4^i x_i + \sum_{k=1}^{n} b_k z_k,$$

доказать, что $c\gamma \leqslant \| x \|_M < C\gamma$, где $\gamma = \max \left\{ \left\| \sum a_i e_i \right\|_Z, \left\| F\left(\sum b_k z_k\right) \right\|_Y \right\}$.

Воспользовавшись определением $\| x \|_M$, неравенством (2) и соотношением $\left\| \sum a_i \Omega_i \right\|_{Y^{**}} = \left\| \sum a_i e_i \right\|_Z$, имеем $\| x \|_M = \sup \{ | h^*(x) | : h^* \in M,$ $\| h^* \| = 1 \} \leqslant \sup \left\{ \left| (F^* y^*) \left(\sum b_k z_k\right) + \sum a_i \Omega_i (y^*) \right| : y^* \in Y^*, \| y^* \| \leqslant 3/2 \right\} \leqslant$ $\leqslant (3/2) \left(\left\| F \left(\sum b_k z_k\right) \right\|_Y + \left\| \sum a_i e_i \right\|_Z \right)$.

Перейдем к оценке снизу. Рассмотрим сначала случай $\left\| \sum a_i e_i \right\|_Z >$ $> \left\| F\left(\sum b_k z_k\right) \right\|_Y / 3$.

Пусть $c_1, \ldots, c_m$ — такие скаляры, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} c_i e_i^* \right\|_{Z^*} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i c_i = \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\|_Z.$$

Пусть вектор $y^* \in Y^*$ таков, что $\Omega_i(y^*) = c_i$ и $\| y^* \| < 1 + 1/3$. То что такой вектор существует, вытекает из вида функционалов Ω и формулы для нормы в Y^*. Имеем $\| T y^* \| \leqslant (1 + 1/3)^2$ и $(T y^*) \times$ $\times (x) \geqslant \left\| \sum a_i e_i \right\|_Z - \left| (F^* y^*) \left(\sum b_k z_k\right) \right|$. Воспользовавшись леммой, получаем требуемую оценку.

Перейдем к случаю $\left\| \sum a_i e_i \right\|_Z \leqslant \left\| F\left(\sum b_k z_k\right) \right\|_Y / 3$ **(6)**. Выберем вектор $y^* \in Y^*$, $\| y^* \| = 1$, для которого $\left| (F^* y^*) \left(\sum b_k z_k\right) \right| = \| F \times$ $\times \left(\sum b_k z_k\right) \|_Y$. Имеем $| T y^*(x) | \geqslant \left| (F^* y^*) \left(\sum b_k z_k\right) \right| - \left| \sum_{i=1}^{m} \Omega_i (y^*) a_i \right| \geqslant$ $\geqslant \left\| F\left(\sum b_k z_k\right) \right\|_Y - \left\| \sum a_i e_i \right\|_Z$. Остается воспользоваться неравенствами (2) и (6). Теорема доказана.

Следствие 1. *Если СБП X имеет фактор-пространство Y, представимое в виде $c_0 \oplus U$ или $l_1 \oplus U$ для некоторого СБП U, то в X^* найдется подпространство M, удовлетворяющее условию* (1), *для которого X_M изоморфно Y.*

В работе [6, с. 356] приведен пример пространства X и тотального подпространства $M \subset X^*$, которое не нормирует никакого бесконечномерного подпространства в X. Доказанная теорема позволяет выделить обширный класс СБП, сопряженные к которым содержат подпространства с указанным свойством.

Следствие 2. *Если СБП X и Y удовлетворяют условиям теоремы и у них нет изоморфных бесконечномерных подпространств, то X^* содержит подпространство M, удовлетворяющее условию (1), и не нормирующее никакого бесконечномерного подпространства в X.*

Примеры. $X = l_1$; $L_1(0, 1)$, в качестве Y можно взять c_0; $X = l_1 \oplus \oplus c_0$, $Y = (\Sigma \oplus J)_{l_2}$, где J — пространство Джеймса [1, с. 25].

Следствие 3. *В $c_0^* = l_1$ существует такое подпространство M, удовлетворяющее условию (1), для которого $(c_0)_M$ не изоморфно c_0.*

Это вытекает из того, что у c_0 есть фактор-пространство, удовлетворяющее условиям следствия 1, но не изоморфное c_0, например, фактор-пространство, изоморфное $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus l_2^n\right)_{c_0}$.

Список литературы: 1. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces, v. I. Berlin, 1977. 188 p. 2. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения. К., 1980. 216 с. 3. *Singer I.* Bases in Banach spaces, v. II. Berlin, 1981. 880 p. 4. *Островский М. И.* Пары регуляризуемых обратных линейных операторов с нерегуляризуемой суперпозицией //Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1989. Вып. 52. С. 78—88. 5. *Островский М. И.* W^*-производные трансфинитного порядка подпространств сопряженного банахова пространства // Докл. АН УССР. 1987. № 10. С. 9—12. 6. *Davis W. J., Johnson W. B.* Basic sequences and norming subspaces in non-quasireflexive Banach spaces // Isr. J. Math. 1973. **14**. P. 353—367.

Поступила в редколлегию 04.10.88