УДК 517.986.7

А. И. МИЛОСЛАВСКИЙ

ОБ АБСТРАКТНОМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. I

§ 1. Введение. Уравнение малых колебаний вязкоупругого наследственного континуума, подверженного воздействию периодической нагрузки, может быть записано в виде абстрактной задачи Коши:

$$\dot{x} + Fx = B(t)\,x + \int_0^t G(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau + f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

В уравнении (1) $x = x(t)$ — дифференцируемая вектор-функция (в.-ф.) со значениями в банаховом пространстве X, предположения относительно линейных операторов F, $B(t)$, $G(t)$ перечислены ниже.

Трудности исследования задачи (1), (2) связаны с тем, что пространство решений однородной задачи ($f(t) = 0$) не инвариантно относительно сдвига аргумента на период операторного коэффициента $B(t)$. По этой причине не применимы методы, связанные с оператором монодромии, эффективные в случае $G(t) \equiv 0$. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и сдвигами в аргументах К. Г. Валеевым [1—3] был предложен метод S-рядов. Он основан на применении преобразования Лапласа, решении разностного уравнения в образах и аналитическом продолжении его как мероморфной функции во всю комплексную плоскость. Метод S-рядов использовался в работах А. Сейтказиевой и А. И. Горшкова.

В данной работе к задаче (1), (2) применяется подход К.Г. Валеева. Доказываются некоторые новые соотношения для решения уравнения в образах и с их помощью получены асимптотические формулы, позволяющие вывести аналог формулы Флоке — Ляпунова для решений задачи (1), (2). Кроме того, задача нахождения показателей Флоке-Ляпунова сведена к спектральной задаче для некоторого оператора, действующего в пространстве 2π-периодических в.-ф. со значениями в X. Подобное сведение использовалось В. А. Якубовичем в задачах о параметрическом резонансе систем с конечным числом степеней свободы и В. Н. Фоминым для систем с распределенными параметрами. Развитая ими техника может быть использована в задачах динамической устойчивости вязкоупругих систем.

Ссылки в тексте на работы К. Г. Валеева, в которых рассматривались конечномерные системы дифференциальных уравнений, означают, что для уравнения (1) в бесконечномерном пространстве доказательства соответствующих утверждений переносятся без изменений.

Относительно операторов в уравнении (1) предполагается следующее.

I. Оператор — F, вообще говоря, неограниченный, имеющий плотную в X область определения $D(F)$, порождает аналитическую полугруппу операторов. Это равносильно [4, §13] тому, что для достаточно больших $\lambda (\lambda \in C)$, $|\arg \lambda| < \pi/2 + \varkappa_0$, где $\varkappa_0 > 0$, оператор $F + \lambda I$ обратим (I — единичный оператор в X), причем

$$\|(F + \lambda I)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-1}). \tag{3}$$

II. Зафиксируем некоторое $c > 0$, при котором оператор $F_C \equiv F + cI$ обратим. Оператор $G(t)F_c^{-1}$ ограничен при каждом $t > 0$, сильно измерим как функция t $(t > 0)$, кроме того,

$$\int_0^\infty e^{at} \|G(t) F_c^{-1}\| dt < \infty \tag{4}$$

при некотором $a (a \geqslant 0)$. В полуплоскости $\Pi_a = \{\lambda \mid \operatorname{Re} \lambda > -a\}$ определим преобразование Лапласа

$$\hat{G}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)\, dt$$

на векторах из $D(F)$. Требуется, чтобы оператор-функция (о.-ф.) $L(\lambda) \equiv \lambda I + F - \hat{G}(\lambda)$ была обратима для $\lambda \in \Pi_a$, за исключением не более чем счетного числа полюсов о.-ф. $L^{-1}(\lambda)$, не имеющих предельных точек в Π_a. Вычеты о.-ф. $L^{-1}(\lambda)$ в полюсах конечномерны, т. е. о.-ф. $L^{-1}(\lambda)$ предполагается конечномероморфной (к. м.) в Π_a.

III. О.-ф. $B(t)$ имеет вид $B(t) = B_{-l} \exp(-ilt) + \ldots + B_l \exp(ilt)$, причем операторы $B_k F^{-1} \in \sigma_\infty$ (σ_∞ — идеал вполне непрерывных операторов в X), $|k| \leqslant l$.

IV. Оставляя в стороне исследование корректности задачи Коши (1), (2), требующее дополнительных ограничений, считаем, что задача (1), (2) имеет решение $x(t)$, причем в.-ф. $Fx(t)$ и $x(t)$ непрерывны при $t \geqslant 0$ и растут при $t \to \infty$ не быстрее экспоненты. В.-ф. $f(t)$ интегрируема $\|f_a\| \equiv \int_0^\infty e^{at} \|f(t)\| dt < \infty$.

При доказательстве теоремы 2 дополнительно предполагается

V. В.-ф. $f(t)$ удовлетворяет локально условию Гельдера; для каждого $\xi > -a$ конечны интегралы $\int |\lambda|^{-1} (\|\hat{G}(\lambda)(F + \lambda I)^{-1}\| + \|B_k(F + \lambda I)^{-1}\|)\, d\eta$. Интегрирование проводится по лучам $\{\lambda \mid \lambda = \xi + i\eta, R < |\eta| < \infty\}$, $R = R(\xi)$ — некоторое положительное число, $1 \leqslant |k| \leqslant l$.

В первой части работы доказываются вспомогательные предложения. Сформулируем основные результаты работы, анонсированные ранее [5, 6], доказательство которых содержится во второй части.

Теорема 2. *Существует последовательность чисел* σ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, $0 \leqslant \operatorname{Im} \sigma_k < 1$, $\operatorname{Re} \sigma_1 \geqslant \operatorname{Re} \sigma_2 \geqslant \cdots > -a$, *не имеющая предельных точек в* Π_a, *такая, что для любого* $\varepsilon > -a$ *решение* $x(t)$ *задачи* (1), (2) *представим в виде*

$$x(t) = \sum e^{\sigma_k t} [A_{k0}(t) + tA_{k1}(t) + \cdots + t^{m_k} A_{km_k}(t)] + x_\varepsilon(t). \tag{5}$$

Суммирование проводится по k от 1 до $N = N(\varepsilon)$, где $\mathrm{Re}\,\sigma_N > \varepsilon$, $A_{kj}(t)$ — 2π*-периодические целые в.-ф., причем*

$$\| A_{kj}(t)\| \leqslant C(k, j)[\|x_0\| + \|f\|_a], \ \|x_\varepsilon(t)\| \leqslant C(\varepsilon) e^{\varepsilon t}[\|x_0\| + \|f\|_a], \quad (6)$$

$C(k, j)$, $C(\varepsilon)$ — *некоторые положительные постоянные,* $m_k < \delta_k$. *Последовательность* σ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *и последовательность* δ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *натуральных чисел не зависят от* x_0 *и* $f(t)$.

Пусть σ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — последовательность показателей Флоке—Ляпунова для задачи Коши (1), (2), $\sigma(L)$ — спектр о.-ф. $L(\lambda)$. Положим $\sum = \{\sigma_{nk} | \sigma_{nk} = \sigma_k + in, \ k = 1, 2, \ldots, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, $\sum_0 = \{\sigma^0_{nk} | \sigma^0_{nk} = \sigma^0_k + in, \ \sigma^0_k \in \sigma(L), \ n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots, \ k = 1, 2, \ldots\}$. Пусть X — гильбертово пространство. Положим $L_2(X)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом нормы 2π-периодических в.-ф. со значениями в X. Определим в $L_2(X)$ оператор

$$S(\sigma) g = \dot{g} + Fg + \sigma g - B(t) g - \int_{-\infty}^{t} e^{-\sigma(t-\tau)} G(t-\tau) g(\tau)\, d\tau \quad (7)$$

с областью определения $D(S) = \{g | g \in L_2(X), \ \dot{g}, \ Fg \in L_2(X), \ g(0) = g(2\pi)\}$, $\mathrm{Re}\,\sigma > -a$.

Теорема 3. *Спектр оператора* $S(\sigma)$ *за вычетом точек* $\sum_0$ *совпадает с* $\sum \setminus \sum_0$, *причем кратность характеристических чисел* σ_{nk} *совпадает с* δ_k $(k = 1, 2, \ldots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Для того чтобы сократить доказательства, рассматривается частный случай: $l = 1, B_0 = 0, a = c = 0$; т. е. о.-ф. $B(t)$ имеет вид $B(t) = B_1 \exp(-it) + B_{-1} \exp(it)$, оператор F обратим, вместо полуплоскости Π_a рассматривается полуплоскость $\Pi = \{\lambda \mid \mathrm{Re}\lambda > 0\}$. Во второй части работы показано, в каких дополнениях нуждается общий случай (см. также [7]). Через R $(R > 0)$ обозначается достаточно большое число.

§ 2. Вспомогательные утверждения. Преобразуя уравнение (1) по Лапласу, получим равенство $\hat{x}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\{x_0 + \hat{f}(\lambda) + B_1 \hat{x}(\lambda + i) + B_{-1}\hat{x}(\lambda - i)\}$ (8) для $\mathrm{Re}\,\lambda > R$ (существование $h^{-1}(\lambda)$ для $\mathrm{Re}\,\lambda > R$ доказано в лемме 1). Вводя обозначения $l(\lambda) = FL^{-1}(\lambda)$, $\varphi(\lambda) = F\hat{x}(\lambda)$, $\omega(\lambda) = l(\lambda)(x_0 + \hat{f}(\lambda))$ (9), $k_{\pm 1}(\lambda) = l(\lambda) B_{\pm 1} F^{-1} (\in \sigma_\infty)$ (10) и действуя на равенство (8) оператором F, перепишем его в виде $\varphi(\lambda) = \omega(\lambda) + k_1(\lambda)\varphi(\lambda + i) + k_{-1}(\lambda)\varphi(\lambda - i)$ (11).

Исследование свойств уравнения (11) занимает центральное место в работе.

Лемма 1. *О.-ф.* $l(\lambda)$, $k_{\pm 1}(\lambda)$ *и в.-ф.* $\omega(\lambda)$ *голоморфны и ограничены вне прямоугольника* $\pi(R) = \{\lambda | 0 \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant R, |\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant R\}$, *причем*

$$k_{\pm 1}(\lambda) = o(1); \quad (12)$$

$$\lambda \to \infty, \ \lambda \in \Pi$$

$$F^{-1} k_{\pm 1}(\lambda) = O(|\lambda|^{-1}). \quad (13)$$

Доказательство. В силу леммы Римана—Лебега (доказательство которой, приведенное в [8], пригодно для рассматриваемого случая)

$$\hat{G}(\lambda) F^{-1} = o(1), \ \lambda \to \infty, \ \lambda \in \Pi. \tag{14}$$

В силу оценок (3), (14) о.-ф. $T(\lambda) \equiv \hat{G}(\lambda)(F+\lambda I)^{-1} = \hat{C}(\lambda) F^{-1}(I - \lambda(F+\lambda I)^{-1}) = o(1)$ **(15)**, поэтому о.-ф. $L(\lambda) = (I - T(\lambda))(F + \lambda I)$ **(16)** обратима вне некоторого прямоугольника $\pi(R)$, причем для $\lambda \notin \pi(R)$ $\|l(\lambda)\| \leqslant \|F(F+\lambda I)^{-1}\|(1 - \|T(\lambda)\|)^{-1} \leqslant C(R)$ **(17)**. Первое утверждение леммы доказано. Оценка (13) следует из (15), (16) и неравенства $\|F^{-1}k_{\pm 1}(\lambda)\| \leqslant \|(F+\lambda I)^{-1}\|(1 - \|T(\lambda)\|)^{-1}\|B_{\pm 1}F^{-1}\|$.

Используя один прием из статьи А. С. Маркуса [9], покажем, что для $T \in \sigma_\infty$ $l(\lambda) T = o(1)$, $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Pi$ **(18)**. Применяя соотношение (16) и формулу $(I-T)^{-1} = I + (I-T)^{-1}T$, имеем

$$l(\lambda) F^{-1} = (F+\lambda I)^{-1} + l(\lambda)\hat{G}(\lambda) F^{-1}(F+\lambda I)^{-1}. \tag{19}$$

Формулы (3), (14), (17), (19) приводят к оценке $\|l(\lambda)F^{-1}z\| \leqslant C \times |\lambda|^{-1}\|z\|$, $\lambda \notin \pi(R)$ **(20)** с постоянной $C > 0$, не зависящей от λ, $z \in X$. Выбирая ε — сеть $(\varepsilon > 0)$ $\{x_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant N(\varepsilon)$, для компактного множества $Y = \{Tx \mid x \in X, \ \|x\| = 1\}$ $\forall y \in Y$ имеем $\|y - x_i\| < \varepsilon$ при некотором $i = i(y)$. Для фиксированного x, $\|x\| = 1$ выберем $i = i(x)$ так, чтобы $\|Tx - x_i\| < \varepsilon$. В силу плотности $D(F)$ в X выберем $y_i \in X$ так, чтобы $\|x_i - F^{-1}y_i\| < \varepsilon$. Учитывая неравенства (17), (20) и оценку $\|l(\lambda)Tx\| \leqslant \|l(\lambda)\|(\|Tx - x_i\| + \|x_i - F^{-1}y_i\|) + \|l(\lambda) \times F^{-1}y_i\|$ получим $\|l(\lambda)Tx\| < 3C(R)\varepsilon$ для достаточно больших λ, $\lambda \in \Pi$. Последнее неравенство доказывает соотношение (18). Полагая в нем $T = B_{\pm 1}F^{-1}$, получим (12). Лемма доказана.

В пространстве $C_R(X)$ — голоморфных при $\operatorname{Re}\lambda > R$, непрерывных и ограниченных при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant R$ в.-ф. с sup-нормой оператор $(U\varphi)(\lambda) = k_1(\lambda)\varphi(\lambda + i) + k_{-1}(\lambda)\varphi(\lambda - i)$ $(\varphi \in C_R(X))$ является сжатием, если R достаточно велико. Для $\forall \omega(\lambda) \in C_R(X)$ решение уравнения **(11)** может быть представлено абсолютно сходящимся рядом:

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (U^n\omega)(\lambda) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{q_j = \pm 1} k_{q_1}(\lambda) k_{q_2}(\lambda + iq_1) \ldots k_{q_\sigma}(\lambda + iq_1 + \cdots + iq_{\sigma-1})\, \omega(\lambda + iq_1 + \cdots + iq_\sigma). \tag{21}$$

Следуя [1—3], сгруппируем слагаемые при $\omega(\lambda + ir)$ в сумме (21), перепишем ее в виде

$$\varphi(\lambda) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} S_r(\lambda)\, \omega(\lambda + ir), \tag{22}$$

где

$$S_r(\lambda) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{q_j = \pm 1}{}' k_{q_1}(\lambda) k_{q_2}(\lambda + iq_1) \ldots k_{q_\sigma}(\lambda + iq_1 + \cdots + iq_{\sigma-1}). \tag{23}$$

Знак (′) означает, что суммирование в (23) проводится по всем индексам, удовлетворяющим соотношению $q_1 + \cdots + q_\sigma = r$. Формуле можно дать геометрическую интерпретацию [1]. Каждому целому числу r сопоставим луч $\Lambda_r = \{(\xi, \eta) \mid \eta = \xi + r, \xi \geq 0$. Каждому произведению в сумме (23) соответствует ломаная, составленная из отрезков длины 1, параллельных координатным осям. Узлы ломаной находятся в точках (r_1, r_2), где $r_{1,2}$ — неотрицательные целые числа. Начало ломаной находится в точке (0, 0), а конец — на Λ_r. Из узла проводится единичный отрезок вверх или вправо; если отрезок вертикален, то $\tilde{q}_j = 1$, если горизонтален, то $\tilde{q}_j = -1$. К аргументу о.-ф. k_{q_j} добавляется iA, если начало отрезка лежит на Λ_A. Сумме $S_0(\lambda)$ отвечают ломаные, которые начинаются и заканчиваются на Λ_0. Рассмотрим часть слагаемых, составляющих $S_0(\lambda)$:

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= k_1(\lambda) k_{-1}(\lambda + i) + k_1(\lambda) k_1(\lambda + i) k_{-1}(\lambda + 2i) k_{-1}(\lambda + i) + \\ &+ k_1(\lambda) k_1(\lambda + i) k_1(\lambda + 2i) k_{-1}(\lambda + 3i) k_{-1}(\lambda + 2i) k_{-1}(\lambda + i) + \\ &+ k_1(\lambda) k_1(\lambda + i) k_{-1}(\lambda + 2i) k_1(\lambda + i) k_{-1}(\lambda + 2i) k_{-1}(\lambda + i) + \cdots \end{aligned} \tag{24}$$

В формуле (24) суммирование проводится по ломаным, все точки которых лежат выше луча Λ_0, кроме начала (0, 0) и конца (r, r), $r = 1, 2, \ldots$ Покажем, что ряд (24) сходится не только при $\operatorname{Re}\lambda \geq R$, но и при $\operatorname{Im}\lambda \geq R$. Всилу (12) найдется $R > 0$ такое, что $\| k_{\pm 1}(\lambda) \| \leq \leq \varkappa < 1/\sqrt{2}$ при $\operatorname{Im}\lambda \geq R$. Количество различных ломаных, соединяющих точки (0, 0) и (r, r) равно 2^{r-2} $(r \geq 2)$, ряд (24) оценивается при $\operatorname{Im}\lambda \geq R$ следующим образом: $\| W(\lambda) \| \leq \varkappa^2 + \varkappa^4 + 2\varkappa^6 + 4\varkappa^8 + + \cdots = (\varkappa^2 - \varkappa^4)(1 - 2\varkappa^2)^{-1}$ **(25)**.
Неравенство (25) вместе с (12) показывает, что $W(\lambda) = o(1)$ при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Pi$ **(26)**.
Продолжим о.-ф. $W(\lambda)$ в полуплоскость Π, как к. м. о.-ф. С этой целью представим $W(\lambda)$ в виде $W(\lambda) = k_1(\lambda)[I + \tilde{W}(\lambda)] k_1(\lambda + i)$ **(27)**, где сумма $\tilde{W}(\lambda)$ составлена по ломаным, лежащим не ниже Λ_1, начало и конец которых лежит на Λ_1. Все такие ломаные разбиваются на классы тех, которые не имеют с Λ_1 общих точек (помимо начала и конца), имеющих одну общую точку, две общих точки и т. д. Ломаная, имеющая с Λ_1 k $(k \geq 1)$ общих точек, составлена из k ломаных, каждая из которых не имеет с Λ_1 общих точек. Учитывая, что составной ломаной отвечает произведение мономов, отвечающих составляющим, имеем $W(\lambda) = W(\lambda + i) + W^2(\lambda + i) + W^3(\lambda + i) + \ldots$ В силу оценки (26) этот ряд сходится при $\operatorname{Im}\lambda > R$ и при $\operatorname{Re}\lambda > R$. Суммируя ряд и подставляя в (27), получим формулу [3]: $W(\lambda) = k_1(\lambda)[I - W(\lambda + + i)^{-1} k^{-}{}_1(\lambda + i)$ **(28)**. При $\operatorname{Im}\lambda > R$ о.-ф. $W(\lambda) \in \sigma_\infty$ и голоморфна. Для $\operatorname{Im}\lambda < R$ формула (28) позволяет шаг за шагом продолжить $W(\lambda)$ в полуплоскость Π, как к.м. о.-ф. При этом используется частный случай одной теоремы И. Ц. Гохберга и Е. И. Сигала [10]: если к.м. о.-ф. $W(\lambda) \in \sigma_\infty$, то о.-ф. $[I - W(\lambda)]^{-1}$ также к.м. Ниже понадобится оценка $F^{-1}W(\lambda) = O(|\lambda|^{-1})$, $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Pi$ (29), вытекающая из (13), (26), (28). Обозначим $b(\lambda) = |\lambda|^{-1} \| B_1 (F + \lambda I)^{-1} \| + + \| B_{-1} (F + \lambda I)^{-1} \|$ **(30)**. По предположению V функция $b(\lambda)$ интегрируема по лучам $\{\lambda \mid \lambda = \xi + i\eta,\ R < |\eta| < \infty\}$, где $R = R(\xi) > 0$. Под записью $T(\lambda) = O(b(\lambda))$ для о.-ф. $T(\lambda)$ понимается неравенство

$T(\lambda)\| \leqslant Cb(\lambda)$ для достаточно больших $|\operatorname{Im}\lambda|$ с постоянной C, не зависящей от $\operatorname{Im}\lambda$. Итерируя формулу (28), имеем

$$W(\lambda - i) = k_1(\lambda - i)k_{-1}(\lambda) + k_1(\lambda - i)k_1(\lambda),$$
$$[I - W(\lambda + i)]^{-1}k_{-1}(\lambda + i)[I - W(\lambda)]^{-1}k_{-1}(\lambda). \qquad (31)$$

Используя оценки (3), (15) и формулу (16), для $|\lambda| > R$, $\lambda \in \Pi$ получим неравенство

$$\|F^{-1}k_1(\lambda - i)k_{\pm 1}(\lambda)\| = \|(F + (\lambda - i)I - \widehat{G}(\lambda - i))^{-1}B_1 .$$
$$(F + \lambda I - \widehat{G}(\lambda))^{-1}B_{\pm 1}F^{-1}\| \leqslant \|(F + (\lambda - i))^{-1}\|\|B_1(F + \lambda I)^{-1}\|$$
$$(1 - \|T(\lambda - i)\|)^{-1}(1 - \|T(\lambda)\|)^{-1}\|B_{\pm 1}F^{-1}\| \leqslant Cb(\lambda), \qquad (32)$$

которое вместе с формулой (31) приводит к оценке $F^{-1}W(\lambda) = O(b(\lambda))$, $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Pi$ **(33)**.

Проведенными рассуждениями доказана

Лемма 2. *О.-ф.* $W(\lambda)$ (23) *голоморфна и ограничена при больших* $\operatorname{Im}\lambda$ *или* $\operatorname{Re}\lambda$, $W(\lambda) \in \sigma_\infty$, *продолжается как к. м. о.-ф. в полуплоскость* Π, *удовлетворяет соотношению* (28) *и оценкам* (26), (29), (33) *при* $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$.

Аналогично вводится о.-ф. $V(\lambda)$, составленная по ломаным, все точки которых лежат ниже Λ_0, кроме начала (0, 0) и конца (r, r) $r = 2, \ldots$. Для $V(\lambda)$ справедлива

Лемма 2′. *О.-ф.* $V(\lambda)$ *голоморфна и ограничена при больших* $\operatorname{Re}\lambda$ *или* $|\operatorname{Im}\lambda|$ $(\operatorname{Im}\lambda < 0)$, *продолжается как к. м. о.-ф. в полуплоскость* Π, *удовлетворяет соотношению* $V(\lambda) = k_{-1}(\lambda)\ [I - V(\lambda - i)]^{-1}k_1(\lambda - i)$ (34) *и оценкам* $(\operatorname{Im}\lambda \to -\infty)$ $V\lambda) = o(1)$, $F^{-1}V(\lambda) = O(|\lambda|^{-1})$, $F^{-1}V(\lambda) = O(b(\lambda))$ **(35)**.

Для о.-ф. $S_0(\lambda)$ при больших $\operatorname{Re}\lambda$ справедлива формула [1—3]: $S_0(\lambda) = [I - V(\lambda) - W(\lambda)]^{-1}$ **(36)**.

Положим $Q(\lambda) = [I - W(\lambda)]^{-1}$, $P(\lambda) = [I - V(\lambda)]^{-1}$ **(37)**.

Лемма 3. *О.-ф* $S_0(\lambda)$ *продолжается как к. м. о.-ф. в полуплоскость* Π. Полюсы о.-ф. $S_0(\lambda)$ могут находиться лишь в точках $\lambda_{nk} = \lambda_k + in$ $(k = 1, 2, \ldots, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, *где* $0 \leqslant \operatorname{Im}\lambda_k < 1$, *последовательность* λ_k.$(k = 1, 2, \ldots)$ *не имеет предельных точек в* Π. *Кратность полюсов в точках* λ_{nk} *не превосходит* γ_k, *где* $\gamma_k(k = 1, 2, \ldots)$ — *некоторая последовательность натуральных чисел. Вне системы кружков с центрами в точках* λ_{nk} *и радиуса* r *(*r *достаточно мало) в полуплоскости* $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \varepsilon\}$, *где* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \neq \operatorname{Re}\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *о.-ф.* $S_0(\lambda)$ *ограничена. Справедливы формулы*

$$S_0(\lambda) = Q(\lambda) + Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i)Q(\lambda), \qquad (38)$$
$$S_0(\lambda) = P(\lambda) + P(\lambda)k_1(\lambda)S_0(\lambda + i)k_{-1}(\lambda + i)P(\lambda), \qquad (39)$$
$$Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i) = S_0(\lambda)k_{-1}(\lambda)P(\lambda - i), \qquad (40)$$
$$P(\lambda)k_1(\lambda)S_0(\lambda + i) = S_0(\lambda)k_1(\lambda)Q(\lambda + i). \qquad (41)$$

Доказательство. В силу лемм 2, 2′ и упомянутой теоремы из работы [10] $S_0(\lambda)$ продолжается как к. м. о.-ф. в полуплоскость Π. Для доказательства формулы (38) при больших $\operatorname{Re}\lambda$ покажем, что правая часть (38) определяет правый обратный оператор к $I - V(\lambda)$ —

$— W(\lambda)$:

$$I = (I - V(\lambda) - W(\lambda))Q(\lambda)[I + k_{-1}(\lambda)\, S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i)\, Q(\lambda)]. \quad (42)$$

Раскрывая скобки и сокращая на оператор $Q(\lambda)$, перепишем равенство (42) в виде $V(\lambda) = k_{-1}(\lambda)\, S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i) - V(\lambda)Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i)$ **(43).**

Подставляя в правую часть (43) правую часть формулы (34) и пользуясь соотношением (28), имеем

$$V(\lambda) = k_{-1}(\lambda)\, S_0(\lambda - i)\, k_1(\lambda - i) - k_{-1}(\lambda)\, P(\lambda - i)\, k_1(\lambda - i)\, Q(\lambda).$$

$$k_{-1}(\lambda)\, S_0(\lambda - i)\, k_1(\lambda - i) = k_{-1}(\lambda)\, [S_0(\lambda - i) - P(\lambda - i)\, W(\lambda - i).$$

$$S_0(\lambda - i)]\, k_1(\lambda - 1) = k_{-1}(\lambda)\, [I - (I - V(\lambda - i))^{-1} W(\lambda - i)]\, S_0(\lambda - i)$$

$$k_1(\lambda - i) = k_{-1}(\lambda)\, (I - V(\lambda - i))^{-1}\, [I - V(\lambda - i) - W(\lambda - i)] \times$$

$$\times S_0(\lambda - i)\, k_1(\lambda - i). \quad (44)$$

В силу равенства (34) правая часть (44) совпадает с $V(\lambda)$. Точно также доказывается, что правая часть формулы (38) определяет левый обратный к $I - V(\lambda) - W(\lambda)$. Остальные формулы (39)—(41) выводятся аналогично.

Выберем R настолько большим, что о.-ф. $Q(\lambda)$, $k_1(\lambda - i)$, $k_{-1}(\lambda)$ голоморфны при $\operatorname{Im}\lambda > R$ или $\operatorname{Re}\lambda > R$, о.-ф $S_0(\lambda)$ голоморфна при $\operatorname{Re}\lambda > R$. Обозначим полюсы о.-ф. $S_0(\lambda)$ в прямоугольнике $\pi_+(R) = \{\lambda \mid R - 1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant R,\ \varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant R\}$ через $\{\tilde{\lambda}_k\}$, кратность полюсов через $\{\gamma_k^+\}$ $(k = 1, \ldots N_+(\varepsilon))$. Положим $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k^+ + in_k$, где $0 \leqslant \operatorname{Im}\lambda_k^+ < 1$, n_k — некоторые натуральные числа. Для произведения

$$\Delta_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{N_+} \operatorname{sh}^{\gamma_k^+} \pi(\lambda - \lambda_k^+) \quad (45)$$

справедлива формула $\Delta_1(\lambda - i) = (-1)^{\gamma_+}\Delta_1(\lambda)$, где $\gamma^+ = \sum \gamma_k^+$. Умножая равенство (38) на $\Delta_1(\lambda)$ и полагая $S_+(\lambda) = S_0(\lambda)\, \Delta_1(\lambda)$, $Q_1(\lambda) = Q(\lambda)\, \Delta(\lambda)$, получим соотношение

$$S_+(\lambda) = Q_1(\lambda) + (-1)^{\gamma_+}\, Q(\lambda)\, k_{-1}(\lambda)\, S_+(\lambda - i)\, k_1(\lambda - i)\, Q(\lambda). \quad (46)$$

Так как правая часть формулы (46) голоморфна в прямоугольнике $\{\lambda \mid \varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant R,\ R \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant R - 1\}$, то там же голоморфна и левая часть. Делая замены $\lambda \to \lambda + in$ $(n = 1, 2, \ldots)$ в формуле (46), получим голоморфность о.-ф. $S_+(\lambda)$ в полосе $\{\lambda \mid \varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant R,\ \operatorname{Im}\lambda \geqslant R\}$. Обозначим

$$s_n = \max \| S_+(\lambda + in) \|,\ \lambda \in \pi_+(R),\ n = 0,\ 1,\ \ldots,$$

$$q = \sup \| Q(\lambda) \|^2 \| k_{-1}(\lambda) \| \| k_1(\lambda - i) \|,\ q_0 = \sup \| Q_+(\lambda) \|.$$

В силу (12), (26) справедливы неравенства $q < 1$, $q_0 < \infty$, если R достаточно велико. Пользуясь соотношением (46), получим неравенства $s_n \leqslant q_0 + q s_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, из которых вытекает ограниченность о.-ф. $S_+(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda > R$: $s_n \leqslant s_0 + q_0 + q_0 q + q_0 q^2 + \cdots = s_0 + q_0(1 - q)^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Аналогично рассматривается случай $\operatorname{Im}\lambda \leqslant -R + 1$, при этом используется формула (39). Построим произведения $\Delta_{-1}(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$ по полюсам о.-ф. $S_0(\lambda)$ в прямоугольнике

$\pi_-(R)=\{\lambda \mid -R\leqslant \operatorname{Im}\lambda\leqslant -R+1,\quad \varepsilon\leqslant \operatorname{Re}\lambda\leqslant R\}$ и $\pi_0(R)=\{\lambda \mid |\operatorname{Im}\lambda|\leqslant R,\ \varepsilon\leqslant \operatorname{Re}\lambda\leqslant R\}$ соответственно. Положим $\Delta(\lambda)=\Delta_{-1}(\lambda)\Delta_0(\lambda)\Delta_1(\lambda)$, $\tilde S(\lambda)=S_0(\lambda)\Delta(\lambda)$. О.-ф. $\tilde S(\lambda)$ голоморфна и ограничена в полуплоскости $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda\geqslant\varepsilon\}$. Нули функции $\Delta(\lambda)$ в этой полуплоскости имеют вид $\{\lambda_{nk}\}$, где $\lambda_{nk}=\lambda_k+in$, $k=1,\ldots N(\varepsilon)$, $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots,\ 0\leqslant \operatorname{Im}\lambda_k<1$, кратность корней не превосходит γ_k, где $\{\gamma_k\}$ — некоторые натуральные числа ($k=1,\ldots N(\varepsilon)$). Вне малых дисков с центрами в λ_{nk} функция $\Delta(\lambda)$ ограничена снизу, а о.-ф. $S_0(\lambda)=\tilde S(\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$ ограничена сверху. Лемма доказана.

Каждая ломаная, соединяющая точку (0, 0) и точку, лежащую на Δ_r, может быть составлена из ломаной, начало которой лежит в (0, 0), а конец — на Λ_0, и ломаной, начало которой лежит на Λ_0, а конец — на Λ_r, причем вторая ломаная не имеет общих точек с Λ_0. Эти соображения приводят к формулам [3]:

$$S_1(\lambda)=S_0(\lambda)\tilde S_1(\lambda),\quad S_2(\lambda)=S_0(\lambda)\tilde S_1(\lambda)\tilde S_1(\lambda+i),$$
$$S_3(\lambda)=S_0(\lambda)\tilde S_1(\lambda)\tilde S_1(\lambda+i)\tilde S_1(\lambda+2i),\ldots, \tag{47}$$

где $\tilde S_1(\lambda)=k_1(\lambda)Q(\lambda+i)$ (48), $S_{-1}(\lambda)=S_0(\lambda)\tilde S_{-1}(\lambda)$, $S_{-2}(\lambda)=S_0(\lambda)\tilde S_{-1}(\lambda)\tilde S_{-1}(\lambda-i)$, $S_{-3}(\lambda)=S_0(\lambda)\tilde S_{-1}(\lambda)\tilde S_{-1}(\lambda-i)\tilde S_{-1}(\lambda-2i)$ (49), где $\tilde S_{-1}(\lambda)=k_{-1}(\lambda)P(\lambda-i)$ **(50)**. В силу лемм 2, 2′, 3 о.-ф. $S_r(\lambda)$ к. м. в Π ($r=0,\ \pm1,\ldots$), о.-ф. $\tilde S_{\pm1}(\lambda)$ голоморфны при $\operatorname{Im}\lambda\to\pm\infty$ соответственно, на основании (12) (26) $\tilde S_{\pm1}(\lambda)=o(1)$, $\operatorname{Im}\lambda\to\pm\infty$ (51). Положим $\psi_1(\lambda)=\omega(\lambda)+\tilde S_1(\lambda)\omega(\lambda+i)+\tilde S_1(\lambda)\times\tilde S_1(\lambda+i)\omega(\lambda+2i)+\tilde S_1(\lambda)\tilde S_1(\lambda+i)\tilde S_1(\lambda+2i)\omega(\lambda+3i)+\cdots$ (52) $\psi_{-1}(\lambda)=\omega(\lambda)+\tilde S_{-1}(\lambda)\omega(\lambda-i)+\tilde S_{-1}(\lambda)\tilde S_{-1}(\lambda-i)\omega(\lambda-2i)+\tilde S_{-1}(\lambda)\times\tilde S_{-1}(\lambda-i)\tilde S_{-1}(\lambda-2i)\omega(\lambda-3i)+\cdots$ (53), $\varphi_{\pm1}(\lambda)=S_0(\lambda)\psi_{\pm1}(\lambda)$ **(54)**. В силу свойств в.-ф. $\omega(\lambda)$ (лемма 1) и о.-ф. $\tilde S_{\pm1}(\lambda)$ в.-ф. $\psi_{\pm1}(\lambda)$ голоморфны и ограничены при $\operatorname{Im}\lambda\to\pm\infty$ соответственно. Для любого $\lambda_0\in\Pi$ найдется натуральное $k_0=k_0(\lambda_0)$ такое, что в.-ф. $\psi_{\pm1}(\lambda\pm ik_0)$ голоморфны при $\lambda=\lambda_0$. Представляя в.-ф. $\psi_\pm(\lambda)$ в виде $\psi_{\pm1}(\lambda)=\omega(\lambda)+\tilde S_{\pm1}(\lambda)\omega(\lambda\pm i)+\cdots+\tilde S_{\pm1}(\lambda)\tilde S_{\pm1}(\lambda\pm i)\ldots\tilde S_{\pm1}(\lambda\pm ik_0\mp i)\psi_{\pm1}(\lambda\pm ik_0)$ **(55)**, продолжим их как мероморфные **в.-ф.** в полуплоскость Π.

Список литературы: 1. *Валеев К. Г.* О решении и характеристических показателях решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Прикл. мат. и мех. 1960. 24, вып. 4. С. 585—602. 2. *Валеев К. Г.* Об одном методе решения систем линейных дифференциальных уравнений с синусоидальными коэффициентами // Изв. вузов. Радиофизика. 1960. 3. № 6. С. 1113—1126. 3. *Валеев К. Г.* Линейные дифференциальные уравнения с синусоидальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента // Тр. междунар. симп. по нелинейн. колебаниям. Качеств. методы теории нелинейн. колебаний. К., 1963. С. 100—119. 4. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустынник, Б. И. Соболевский. М., 1966. 499 с. 5. *Милославский А. И.* Некоторые математические задачи устойчивости вязкоупругих наследственных систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и прил. функцион.

дифференц. уравнений, ч. 2. Душанбе, 1987. С. 20—21. 6. *Милославский А. И.* Асимптотика решений абстрактного интегродифференциального уравнения с периодическими коэффициентами // Функцион. анализ и его прил. 1988. Вып. 22. С. 10—45. 7. *Милославский А. И.* Аналог представления Флоке для решений абстрактного интегродифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. К., 1987. С. 1—52. Деп. в УкрНИИНТИ 13.04.87, № 1227—Ук87. 8. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., 1963. 256 с. 9. *Маркус А. С.* Некоторые критерии полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаховом пространстве // Мат. сб. 1966. **70**, № 4. С. 526—560. 10. *Гохберг И. Ц., Сигал Е. И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. 1971. **84**, № 4. С. 607—630.

Поступила в редколлегию 16.05.88