УДК 517.55

Я. В. МИКИТЮК

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Данная работа посвящена доказательству справедливости следующей гипотезы, высказанной Л. И. Ронкиным и В. Э. Кацнельсоном [1, 2].

Гипотеза 1. *Если сумма длин замкнутых кривых, расположенных на границе n-мерного куба со стороной a, меньше 4a, то существует гиперплоскость, проходящая через центр куба и не пересекающая ни одну из этих кривых.*

Основными результатами работы являются теоремы 1 и 2. Из теоремы 2, в частности, вытекает справедливость гипотезы 1. Для того чтобы перейти к формулировкам теорем 1 и 2, нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

В работе мы будем использовать следующие обозначения: $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ — обычные норма и скалярное произведение в $\boldsymbol{R}^n$; $d(B)$ — диаметр ограниченного множества $B \subset \boldsymbol{R}^n$; $[y_1, y_2]$ — отрезок, соединяющий точки $y_1, y_2 \in \boldsymbol{R}^n$; $|\Gamma|$ — длина спрямляемой кривой Γ; μ — мера Лебега в $\boldsymbol{R}^n$; Q^ε — замкнутая ε-окрестность множества $Q \subset \boldsymbol{R}^n$.

Пусть K — фиксированный выпуклый компакт в $\boldsymbol{R}^n$, содержащий нуль в качестве внутренней точки. Для любого $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ положим $A(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{x \in K : \exists y \in \Omega\, (x, y) = 0\}$ **(1)**.

Лемма 1. *Пусть Ω — компакт в $\boldsymbol{R}^n$. Тогда $A(\Omega)$ — компакт.*

Доказательство. Достаточно показать, что $A(\Omega)$ замкнуто. Пусть последовательность $\{x_m\} \subset A(\Omega)$ сходится к $x \in K$. Из определения (1) вытекает, что существует последовательность $\{y_m\} \subset \Omega$, такая, что $(x_m, y_m) = 0$, $m \in \boldsymbol{N}$. Без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{y_m\}$ сходится к $y \in \Omega$. Следовательно, $(x, y) = \lim\limits_{m\to\infty}(x_m, y_m) = 0$, т. е. $x \in A(\Omega)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть Γ — непрерывная простая замкнутая кривая в $\boldsymbol{R}^n$, не проходящая через нуль, и $\Gamma_x \overset{\text{def}}{=} \{y \in \Gamma : (x, y) = 0\}$, $x \in \boldsymbol{R}^n$. Тогда для любого $\delta > 0$ множество $M_\delta(\Gamma) \overset{\text{def}}{=} \{x \in A(\Gamma) : d(\Gamma_x) \geqslant \delta\}$* **(2)** *замкнуто и $\lim\limits_{\delta\to+0} \mu(M_\delta(\Gamma)) = \mu(A(\Gamma))$* **(3)**.

Доказательство. В силу леммы 1 $A(\Gamma)$ замкнуто. Пусть последовательность $\{x_m\} \subset M_\delta(\Gamma)$ сходится к $x \in A(\Gamma)$. Из определений вытекает, что существуют последовательности $\{y_m\}$, $\{y'_m\} \subset \Gamma$, такие, что $(y_m, x_m) = (y'_m, x_m) = 0$, $\|y_m - y'_m\| \geqslant \delta$, $m \in \boldsymbol{N}$ **(4)**. Без ограничения общности можем считать, что последовательности $\{y_m\}$, $\{y'_m\}$ сходятся к точкам $y, y' \in \Gamma$ соответственно. Тогда, переходя в соотношениях (4) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $(y, x) = (y', x) = 0$, $\|y - y'\| \geqslant \delta$, т. е. $x \in M_\delta(\Gamma)$. Замкнутость множества $M_\delta(\Gamma)$ доказана.

Из очевидного включения $M_{\delta_1}(\Gamma) \subset M_{\delta_2}(\Gamma)$, $\delta_2 \leqslant \delta_1$, вытекает, что

$$\lim_{\delta \to +0} \mu(M_\delta(\Gamma)) = \mu(A(\Gamma)) - \mu(\mathscr{R}),$$

где $\mathscr{R} \overset{\text{def}}{=} \{x \in A(\Gamma) : d(\Gamma_x) = 0\}$. Таким образом, осталось показать, что $\mu(\mathscr{R}) = 0$ **(5).** Легко видеть, что множества Q^+, Q^-, определяемые формулой $Q^\pm \overset{\text{def}}{=} \{x \in \boldsymbol{R}^n : \forall y \in \Gamma, \pm(x, y) > 0\}$, являются открытыми выпуклыми конусами. Покажем, что справедливо включение $\mathscr{R} \subset \partial Q^+ \cup \cup \partial Q^-$ **(6).**

Действительно, пусть $x \in K$. Предположим, что функция $\Gamma \in y \to (x,y)$ меняет свой знак. Тогда, поскольку Γ — простая замкнутая кривая, то Γ_x состоит не менее чем из двух точек. Таким образом, если $x \in \mathscr{R}$, то функция $\Gamma \ni y \to (x, y)$ не меняет своего знака и, следовательно, точка x принадлежит границе множества $Q^+ \cup Q^-$. Тем самым включение (6) доказано. Из (6), учитывая, что граница выпуклого конуса имеет меру нуль, получаем (5). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $y_1, y_2 \in \partial K$, $\Delta = [y_1, y_2]$. Тогда для всех $\varepsilon > 0$ $\mu(A(\Delta^\varepsilon)) \leqslant \mu(A(\Delta)) + C \cdot \varepsilon$* **(7)**, *где C — положительная константа, зависящая только от K.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что $A(\Delta) = \{x \in K : (x, y_1) \geqslant 0, (x, y_2) \leqslant 0\} \cup \{x \in K : (x, y_1) \leqslant 0, (x, y_2) \geqslant 0\}$ **(8).**

Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon d(K)$. Покажем, что справедливо включение $A(\Delta^\varepsilon) \setminus A(\Delta) \subset \{x \in K : |(x, y_1)| \leqslant \delta\} \cup \{x \in K : |(x, y_2)| \leqslant \delta\}$ **(9).**

Действительно, пусть $x \in A(\Delta^\varepsilon) \setminus A(\Delta)$. В силу определения (1) существуют $z \in \boldsymbol{R}^n$, $\Theta \in [0, 1]$, такие, что $\|z\| \leqslant \varepsilon$ и $(x, z + \Theta y_1 + (1 - \Theta) y_2) = 0$. Отсюда получаем неравенство $|(x, \Theta y_1 + (1 - \theta) y_2)| \leqslant \varepsilon d(K) = \delta$. Поскольку $x \notin A(\Delta)$, то в силу (8) числа (x, y_1) и (x, y_2) не могут иметь разные знаки и поэтому

$$\min_{j=1,2} |(x, y_j)| \leqslant |(x, \theta y_1 + (1 - \theta) y_2)| \leqslant \delta.$$

Включение (9) доказано. Нетрудно убедиться, что мера множества $\{x \in K : |(x, y_j)| \leqslant \delta\}$ не превышает $(2d(K))^n \cdot \frac{\varepsilon}{\|y\|}$. Отсюда, принимая во внимание (9), получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Из леммы 3, в частности, вытекает, что если спрямляемая кривая Γ имеет общую точку с ∂K, то $\mu(A(\Gamma)) \leqslant C|\Gamma|$ **(10)**, где C — положительная константа, зависящая только от K.

Действительно, пусть $y \in \Gamma \cap \partial K$. Положим в лемме 3 $y_1 = y_2 = y$, $\varepsilon = |\Gamma|$. Тогда $\mu(A(\Gamma)) \leqslant \mu(A(\{y\}^\varepsilon)) \leqslant \mu(A(\{y\}) + C \cdot \varepsilon$. Отсюда, учитывая, что $\mu(A(\{y\})) = 0$, получаем (10).

Положим

$$b(K, \delta) \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\frac{\mu(A([y_1, y_2]))}{\|y_1 - y_2\|} : y_1, y_2 \in \partial K,\ 0 < \|y_1 - y_2\| < \delta\right\},\ \delta > 0.$$

$$b(K) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\delta \to +0} b(K, \delta).$$

В силу неравенства (10) величины $b(K, \delta)$ конечны.

Теорема 1. *Пусть* $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{p}$ — *конечный набор спрямляемых замкнутых кривых, расположенных на* ∂K. *Тогда*

$$b(K)\sum_{i=1}^{p}|\Gamma_i| \geqslant 2\mu\left(A\left(\bigcup_{i=1}^{p}\Gamma_i\right)\right). \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку $A\left(\bigcup_{i=1}^{p}\Gamma_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^{p} A(\Gamma_i)$, то теорему достаточно доказать для случая $p=1$. Пусть $\Gamma_1=\Gamma$. Без ограничения общности можем также считать, что Γ — простая замкнутая кривая. Параметризуем кривую Γ натуральным параметром: $[0, |\Gamma|] \ni s \mapsto \gamma(s) \in \Gamma$. С каждым разбиением $\mathcal{P}$ промежутка $[0, |\Gamma|]$, т. е. набором точек $\{s_k\}_{k=0}^{m}$, $m \geqslant 1$, где $0=s_0<\ldots<s_m=|\Gamma|$, свяжем спрямляемые кривые $\Delta_k \overset{\text{def}}{=} [\gamma(s_{k-1}), \gamma(s_k)]$, $\tilde{\Delta}_k \overset{\text{def}}{=} \{\gamma(s): s \in [s_{k-1}, s_k]\}$, $k=1, \ldots, m$, и величины $d(\mathcal{P}) \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}|\tilde{\Delta}_k|$, $\varepsilon(\mathcal{P}) \overset{\text{def}}{=} \left(\sum\limits_{k=1}^{m}(|\tilde{\Delta}_k|-|\Delta_k|)\right)^{1/2}$. Пусть $0<\delta<\frac{1}{2}\min\{1, \operatorname{dist}(0, \partial K)\}$. Зафиксируем разбиение $\mathcal{P}=\{s_k\}_{k=0}^{m}$, для которого $\varepsilon=\varepsilon(\mathcal{P})<\delta$, $d(\mathcal{P})<\delta$. Легко видеть, что в этом случае каждая точка множества $M_\delta(\Gamma)$ (см. (2)) покрывается, по крайней мере, двумя множествами семейства $\{A(\tilde{\Delta}_k)\}_{k=1}^{m}$ и, следовательно,

$$2\mu(M_\delta(\Gamma)) \leqslant \sum_{k=1}^{m}\mu(A(\tilde{\Delta}_k)). \tag{12}$$

Положим $\mathcal{I} \overset{\text{def}}{=} \{k: |\Delta_k| \leqslant (1-\varepsilon)|\tilde{\Delta}_k|\}$. Поскольку

$$\varepsilon^2=\sum_{k=1}^{m}(|\tilde{\Delta}_k|-|\Delta_k|) \geqslant \varepsilon\sum_{k\in I}|\tilde{\Delta}_k|, \text{ то } \sum_{k\in I}|\tilde{\Delta}_k| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда, учитывая (10), получаем неравенство

$$\sum_{k\in I}\mu(A(\tilde{\Delta}_k)) \leqslant C\sum_{k\in I}|\tilde{\Delta}_k| \leqslant C\cdot\varepsilon. \tag{13}$$

Из условия $|\Delta_k|>(1-\varepsilon)|\tilde{\Delta}_k|$ вытекает, что $\tilde{\Delta}_k \subset \Delta_k^{\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_k=4|\Delta_k|\cdot\varepsilon^{1/2}$. Поэтому, принимая во внимание (7) и неравенство $\mu(A(\Delta_k)) \leqslant b(K, \delta)|\Delta_k|$, имеем, что при $k \notin \mathcal{I}$ $\mu(A(\tilde{\Delta}_k)) \leqslant \mu(A(\Delta_k^{\varepsilon_k})) \leqslant b(K, \delta)|\Delta_k| + C\varepsilon^{1/2}(\Delta_k|$ (14). Из неравенств (12), (13) и (14) вытекает, что $2\mu(M_\delta(\Gamma)) \leqslant b(K, \delta)|\Gamma| + C(\varepsilon^{1/2}|\Gamma|+\varepsilon)$ (15), где C — положительная константа, зависящая только от K. Переходя в (15) к пределу сначала при $\varepsilon \to 0$, а затем при $\delta \to 0$, получаем (см. (3)) неравенство $2\mu(A(\Gamma)) \leqslant b(K)|\Gamma|$. Теорема доказана.

В случае $K=T_n \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n: |x_i| \leqslant 1, i=1, \ldots, n\}$, $n \geqslant 3$, теорема 1 допускает следующее уточнение.

Теорема 2. *Пусть* $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{p}$ — *конечный набор спрямляемых замкнутых кривых, расположенных на* ∂T_n. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{p} |\Gamma_i| \geqslant 2^{-n+3}\mu(A(\bigcup_{i=1}^{p} \Gamma_i)).$$

Из теоремы 2 очевидным образом вытекает

Следствие 1. *Гипотеза 1 верна.*

Доказательству теоремы 2 предпошлем две небольшие леммы.

Лемма 4. *Пусть* $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$, $n \geqslant 2$, $\mu_{n,\xi}$ — *мера Лебега на гиперплоскости* $L_\xi = \{x \in \boldsymbol{R}^n : (x, \alpha) = \xi\}$. *Тогда функция* $\boldsymbol{R} \ni \xi \mapsto F(\xi) \overset{\text{def}}{=} \mu_{n,\xi}(T_n \cap L_\xi)$ **(16)** *является четной и невозрастающей на* $[0, \infty[$.

Доказательство. Применим индукцию по размерности n. Очевидно, что при $n = 2$ утверждение леммы справедливо.

Пусть $n > 2$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Без ограничения общности можем считать, что $\alpha_n \neq 0$, $\alpha' \neq 0$. Рассмотрим функцию $\boldsymbol{R} \ni \eta \mapsto F_1(\eta) \overset{\text{def}}{=} \mu_{n-1,\eta}(T_{n-1} \cap L'_\eta)$, где $\mu_{n-1,\eta}$ — мера Лебега на гиперплоскости $L'_\eta = \{x \in \boldsymbol{R}^{n-1} : (x, \alpha') = \eta\}$. По индуктивному предположению функция F_1 четная и невозрастающая на $[0, \infty[$. Отсюда, принимая во внимание равенство

$$F(\xi) = \frac{\|\alpha\|}{|\alpha_n|} \int_{\xi-|\alpha_n|}^{\xi+|\alpha_n|} F_1(\eta)\, d\eta,$$

получаем, что функция F четна и $F'(\xi) \leqslant 0$ при $\xi \geqslant 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$, $\|\alpha\| = 1$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\int_{I_n} |(x, \alpha)|\, dx \leqslant 2^{n-1}. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть функция F определена формулой (16). В силу леммы 4 F можно представить в виде $F(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} d\nu$, где ν — неотрицательная борелевская мера на $[0, \infty[$ с компактным носителем. Согласно неравенству Буняковского, имеем

$$\left(\int_0^\infty t^2\, d\nu(t)\right)^2 \leqslant \left(\int_0^\infty t\, d\nu(t)\right) \cdot \left(\int_0^\infty t^3\, d\nu(t)\right).$$

Отсюда, учитывая равенства

$$\int_0^\infty \xi^j F(\xi)\, d\xi = \int_0^\infty \xi^j \int_\xi^\infty d\nu(t) = \frac{1}{j+1} \int_0^\infty t^{j+1}\, d\nu(t), \quad j = 0, 1, 2.,$$

$$\int_0^\infty F(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} \int_{T_n} dx = 2^{n-1},$$

$$\int_0^\infty \xi F(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{T_n} |(x, \alpha)|\,dx,$$

$$\int_0^\infty \xi^2 F(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\int_{T_n} (x, \alpha)^2\,dx = \frac{1}{3}\,2^{n-1},$$

получаем неравенство (17). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу теоремы 1 достаточно доказать неравенство $b(T_n) \leqslant 2^{n-2}$. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что для любой пары точек $y, z \in \partial T_n$, принадлежащих одной из граней $N_k^{\pm} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in T_n : x_k \pm 1\}$, $k = 1, \ldots, n$, выполнено неравенство $\mu(A([y, z]) \leqslant 2^{n-2}\|y - z\|$ **(18).** Без ограничения общности можем считать, что $y, z \in N_n^+$ и $y \neq z$. Пусть $y = (y', 1)$, $z = (z', 1)$, $y', z' \in T_{n-1}$. Принимая во внимание формулу (8) и то, что $(x, y) = (x', y') + x_n$, $(x, z) = (x', z') + x_n\ (x = (x', x_n))$, получаем включение $A([y, z]) \subset D_+ \cup D_-$, где $D_{\pm} = \{x = (x', x_n) : x' \in T_{n-1}, x_n \in \boldsymbol{R}, \mp(x', y') \leqslant \pm x_n \leqslant \mp(x', z'\}$. Очевидно, что $\mu(D_+ \cup D_-) = \mu(D_+) + \mu(D_-) \leqslant \int_{T_{n-1}} |(x', y' - z')|\,dx' = \frac{1}{2}\int_{T_n} |(x, y - z)|\,dx.$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\mu(A([y, z])) \leqslant \frac{1}{2}\int_{T_n} |(x, y - z)|\,dx. \tag{19}$$

Пусть $\alpha = (y - z)/\|y - z\|$. Тогда, принимая во внимание (17), имеем

$$\int_{T_n} |(x, y - z)|\,dx = \|y - z\|\int_{T_n} |(x, \alpha)|\,dx \leqslant 2^{n-1}\|y - z\|.$$

Отсюда, учитывая (19), получаем неравенство (18). Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Кацнельсон В. Э., Ронкин Л И.* О минимальном объеме аналитического множества // Сиб. мат. журн. 1974. 15, № 3. 516—528. С. 2. *Некоторые* нерешенные задачи многомерного комплексного анализа. Красноярск, 1987. С. 79. (Препринт № 41 М. Ин-т физики СО АН СССР). С. 79.

Поступила в редколлегию 01.04.88