УДК 517.53/57

Г. М. ЛЕВИН

БАЗИСЫ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫЕ ИТЕРАЦИЯМИ ПОЛИНОМОВ

Краткое содержание. Эта работа возникла из попытки найти линейный алгоритм для вычисления моментов равновесного распределения на множестве Мандельброта [1] и множестве Жюлиа [1] квадратичного отображения, отличный от известного [2]). На этом пути появились системы функций, которые, как представляется, имеют самостоятельный интерес.

Пусть $T : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ — произвольный нелинейный полином, T_l — его l-я итерация, $l \geqslant 0$. Как известно, область притяжения D_∞ бесконечно удаленной неподвижной точки полинома T связна. По теореме Рунге [3], любая аналитическая на $F = \boldsymbol{C} \setminus D_\infty$ функция равномерно на F приближается полиномами. В § 1 мы строим естественный полиномиальный базис $(E_n)_{n>0}$ в пространстве функций, локально аналитических на компакте F. Заодно получаем и двойственный базис $(E_n^*)_{n>0}$ относительно билинейного функционала $B(f, g) = \int fg d\mu$, где μ — равновесная мера на F.

Система (E_n^*) состоит из рациональных дробей и является базисом в пространстве функций, аналитических на $D_\infty \cup \{\infty\}$. Они обладают следующими свойствами:

$$E_n(T(z)) = E_{pn}(z), \ E_n^*(T(z)) = E_{pn}^*(z), \tag{1}$$

где $p = \deg T$, $n = 0, 1, \ldots$;

$$\int E_n(z) E_m^*(z)\, d\mu(z) = \delta_{nm}, \quad n \geqslant 0, \ m \geqslant 0, \tag{2}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера; μ — равновесная мера на множестве Жюлиа $J(T)$ (или на F, что одно и то же);

$$\frac{1}{p^l} \sum_{n=0}^{p^l-1} E_n(z) E_n^*(\lambda) = \frac{T_l(z) - T_l(\lambda)}{(z-\lambda) T_l'(\lambda)}. \tag{3а}$$

В частности,

$$\sum_{n=0}^{p^l-1} E_n(z) E_n^*(z) = p^l, \ l = 0, 1, \ldots;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(z) E_n^*(\lambda) = \frac{1}{\sigma(\lambda)} \cdot \frac{1}{\lambda - z}, \tag{3б}$$

где $z \in F$; $\lambda \in D_\infty$; $\sigma(\lambda) = \varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$; $\varphi(\lambda)$ — функция Бетхера для D_∞ [1].

В § 2 приведены условия сходимости частных сумм ряда $\sum a_n E_n^*$ к функции, заданной на множестве Жюлиа.

Обещанный алгоритм для вычисления моментов меры μ описан в § 3.

§ 1. Двойственные системы функций. 1. Итак, пусть $T(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p$, $p \geqslant 2$ (1). Возьмем все корни $(x_k)_{k=1}^p$ уравнения $T(z) = a$ и образуем средние степенные суммы:

$$s_i = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_k^i.$$

Легко показать, что s_i, $i = 1, \ldots, p-1$, не зависит от a. Определим системы функций $(E_n)_{n \geqslant 0}$ и $(E_n^*)_{n \geqslant 0}$. Для начала положим

$$E_0(z) = E_0^*(z) = 1, \ E_k(z) = z^k - s_k,$$
$$E_k^*(z) = \frac{z^{p-k-1} + a_1 z^{p-k-2} + \ldots + a_{p-k-1}}{N(z)},$$

где $k = 1, \ldots, p-1$, и введено обозначение $N(z) = T'(z)/p$. Продолжим эти конечные наборы до бесконечных. Пусть $n \in N$ и $n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon(k) p^k$ — его p-ичное разложение, $\varepsilon(k) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. По определению,

$$E_n(z) = \prod_{k=0}^{\infty} E_{\varepsilon(k)}(T_k(z)), \quad E_n^*(z) = \prod_{k=0}^{\infty} E_{\varepsilon(k)}^*(T_k(z)),$$

где $T_k(z)$ — k-я итерация $T(z)$; $T_0(z) \equiv z$. Очевидно, E_n — полином, E_n^* — рациональная функция, $\deg E_n = \deg E_n^* = n$; $E_n^*(z) = O(z^{-n})$,

$z \to \infty$. По построению, $E_n(T) = E_{pn}$, $E_n^*(T) = E_{pn}^*$, $n = 0, 1, \ldots$. В частности, $E_{p^k}(z) = E_1(T_k(z))$, $E_{p^k}^*(z) = E_1^*(T_k(z))$.

Пример. $T(z) = z^p - t$. *Тогда (и только тогда)*

$$E_n^*(z) = \frac{1}{E_n(z)}. \; n \in \boldsymbol{N}.$$

Если $t = 0$, *то* $E_n(z) = z^n$, $E_n^*(z) = z^{-n}$.

2. **Лемма 1.** *Для* $n, m = 0, \ldots, p-1$ *и любого* $a \in \boldsymbol{C}$

$$\frac{1}{p} \sum_{T(z)=a} E_n(z) E_m^*(z) = \delta_{nm}. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала заметим, что выражение слева равно

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_n(z) E_m^*(z) \frac{T'(z)}{T(z) - a} dz,$$

где Γ — контур, окружающий все корни уравнения $T(z) = a$, так как $E_n(z) E_m^*(z) = O(z^{n-m})$, $z \to \infty$, то отсюда сразу следует (2) при $n < m$. Пусть теперь $n > m$. При $m = 0$ (2) верно по определению E_n, $n = 0, \ldots, p-1$. При $m \geqslant 1$

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{pE_n(z)\,(T(z) - a - (a_p - (a + a_{p-1}z + \ldots + a_{p-m}z^m))\, T'(z)\, dz}{z^{m+1} T'(z)\,(T(z) - a)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z^{n-m-1} + O(z^{-m-1}))(1 + O(z^{m-p}))\, dz = 0. \text{ Ч. т. д.}$$

Теперь из определения и леммы 1 получим

Следствие 1. *Для любых* $n, m \geqslant 0$

$$\int E_n(z) E_m^*(z)\, d\mu(z) = \delta_{nm}.$$

Замечание 1. Если $T'(z_0) = 0$ для некоторого $z_0 \in \boldsymbol{J}$ (т. е. $E_m^*(z_0) = \infty$), то интеграл понимается как предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{p^k} \sum_{T^k(z)=a} E_n(z) E_m^*(z)$$

для любого $a \in D_\infty$. Введенные полиномы $E_0, E_1, \ldots, E_{p-1}$ хороши тем, что для них выполняется тождество

$$\frac{T(z) - T(\lambda)}{z - \lambda} = N(\lambda) \sum_{k=0}^{p-1} E_k(z) E_k^*(\lambda), \tag{3}$$

которое доказывается подстановкой выражений для E_k, E_k^*. Заменим в (3) z на $T_l(z)$, λ на $T_l(\lambda)$ и перемножим все равенства, получим *основное тождество*

$$\frac{T_n(z)-T_n(\lambda)}{(z-\lambda)\prod\limits_{k=0}^{n-1} N(T_k(\lambda))}=\sum_{k=0}^{p^n-1} E_k(z)\,E_k^*(\lambda). \quad (4)$$

Заметим, что

$$\prod_{k=0}^{n-1} N(T_k(\lambda))=\frac{T_n'(\lambda)}{p^n}.$$

Введем ядра

$$R_n(z,\ \lambda)=\frac{p^n}{T_n'(\lambda)}\cdot\frac{T_n(z)-T_n(\lambda)}{z-\lambda}.$$

Из следствия 1 и (4) получим

Следствие 2.

$$\int R_n(z,\ \lambda)\,d\mu(z)=\int R_n(z,\ \lambda)\,d\mu(\lambda)=1,\ n=0,\ 1,\ \ldots.$$

§ 2. Разложение голоморфных функций в ряды. 1. Мы хотим перейти в (4) к пределу при $n\to\infty$. Следующие факты стандартные и следуют, например, из теоремы Бетхера [1].

Если $\lambda\in D_\infty$, то существуют пределы

$$G(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|T_n(\lambda)|}{p^n}, \quad (5)$$

$$\sigma(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\frac{T_n'(\lambda)}{p^nT_n(\lambda)}, \quad (6)$$

$G(\lambda)$ — функция Грина для D_∞ с полюсом в ∞; $G(\lambda)>0\,(\lambda\in D_\infty)$, $G(\lambda)\sim\ln|\lambda|\,(\lambda\to\infty)$. Доопределим $G|_F\equiv 0$, где $F=\boldsymbol{C}\setminus D_\infty$. $\sigma(\lambda)$ — логарифмическая производная функции Бетхера $\varphi(\lambda)$, которая задается в бесконечности равенством

$$\varphi(\lambda)=\lim_{l\to\infty}(T_l(\lambda))^{p^{-l}}.$$

Множество нулей $\sigma(\lambda)$ (обозначим его через C_*) совпадает с множеством критических точек $G(\lambda)$ и есть

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(C),$$

где C — множество тех критических точек $T(z)$, которые лежат в D_∞.

2. Из (5) следует, что для каждого $k=1,\ldots,p-1$; $\lambda\in D_\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|E_k(T_n(\lambda))|}{kp^n}=G(\lambda),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|E_k^*(T_n(\lambda))|}{kp^n}=-G(\lambda).$$

Отсюда, по теореме Чезаро,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln |E_n(\lambda)|}{u} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln |E_n^*(\lambda)|}{n} = G(\lambda), \tag{7}$$

если $\lambda \in D_\infty \setminus C_*$, $(T_k(\lambda))^i \neq s_i \; \forall k \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, p-1$. Из (4) теперь получается такое разложение ядра Коши:

Лемма 2. *Пусть $\lambda \in D_\infty \setminus C_*$ и z таково, что $G(z) < G(\lambda)$. Тогда*

$$\frac{1}{\lambda - z} = \sigma(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} E_n(z) E_n^*(\lambda). \tag{8}$$

3. Пусть $r > 1$, $\Gamma_r = \{z : G(z) = \ln r\}$, $D_r = \{z : G(z) < \ln r\}$. Заметим, что $F \subset D_r$ для каждого $r > 1$.
Введем два функциональных пространства X и Y.
Скажем, что $f \in X$, если для нее найдется $r > 1$ такое, что f голоморфна в D_r; $g \in Y$, если g голоморфна в $(D_\infty \setminus C_*) \cup \{\infty\}$ и имеет полюс не выше первого порядка в каждой точке из множества C_*. Другими словами, X — это пространство ростков функций, голоморфных на компакте F, Y — пространство функций g, таких, что функция $g\sigma$ голоморфна в D_∞ и равна нулю на бесконечности. Используя теорему Коши и лемму 2, получим

Теорема 1. *Пусть $f \in X$, $g \in G$. Тогда найдутся и единственны две последовательности $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ такие, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} < 1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} |b_n|^{1/n} \leqslant 1, \tag{9}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n E_n(z), \tag{10}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n E_n^*(z) \tag{11}$$

в областях задания функций f и g.
И обратно, любые две последовательности (9) определяют функции f и g, описанные выше.

4. Следствие 3. *Пусть $f \in X$. Функция f разлагается в некоторой окрестности компакта F в ряд по итерациям $T_l(z)$:*

$$f(z) = \beta_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l T_l(z)$$

тогда и только тогда, когда

$$\int f(z) E_k^*(z)\, d\mu(z) = 0 \tag{12}$$

для всех $k \geqslant 1$, исключая, быть может, $k = p^l$, $l \geqslant 0$. При этом $\alpha_l = \int f(z) E_1^*(T_l(z))\, d\mu(z)$, $l \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $f \in X$. Тогда по теореме 1

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty} a_{pl}E_{pl}(z)+A_0$$

если и только если выполняется (12). Но $E_{pl}=T_l-s_1$, поэтому

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{pl}\,E_{pl}(z)=\beta_0+\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l T_l(z),$$

где

$$\beta_0=-s_1\sum_{l=0}^{\infty} a_{pl}+A_0,\ \alpha_l=a_{pl}.\ \text{Ч.т.д.}$$

§ 3. **Дополнение. 1.** Зафиксируем функцию $g\in L_1(J,\mu)$. Ей можно поставить в соответствие ряд

$$g\sim\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,E_n^*(z), \tag{13}$$

где $b_n=\int g(z)\,E_n(z)\,d\mu(z)$ (14).
Ряд (13) определен (формально) для всех $z\in J$, которые не есть прообразы критических точек $T(z)$.
Введем обозначения

$$S_N(g)=\sum_{n-0}^{N-1} b_n\,E_n^*(z),\quad N\in \boldsymbol{N},$$

для частичных сумм ряда (13).

Лемма 3. *Пусть z_0 лежит на множестве Жюлиа и для некоторой последовательности $n_k\to\infty$ $T'_{n_k}(z_0)/p^{n_k}\to\infty$. Если функция $g(z)$ удовлетворяет в z_0 условию Дини*

$$\int\left|\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\right|d\mu(z)=c<\infty,$$

то

$$S_{p^{n_k}}(g)(z_0)\to g(z_0),\ k\to\infty;\ |S_{p^{n_k}}(g)(z_0)-g(z_0)|\leqslant M\cdot\frac{p^{n_k}}{|T'_{n_k}(z_0)|},$$

где $M=2c\cdot\sup\{|z|:z\in J\}$.

Доказательство. Для каждого $l\geqslant 0$ основное тождество дает

$$S_{p^l}(g)(z_0)=\frac{p^l}{T_l'(z_0)}\int g(z)\frac{T_l(z_0)-T_l(z)}{z_0-z}\,d\mu(z).$$

Поэтому для z_0 и (n_k) из условия

$$|S_{pnk}(g)(z_0)-g(z_0)|\leqslant M_1\cdot\left|\frac{p^{n_k}}{T'_{n_k}(z_0)}\right|,$$

где $M_1=M$.

2. Чтобы применить доказанное утверждение, введем два подмножества множества Жюлиа:

$$A = \left\{ \lambda \in J \mid \exists \gamma > 0 : \lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \ln \frac{|T_l(\lambda)|}{p^l} = \gamma \right\},$$

$$B = \left\{ \lambda \in J \mid \overline{\lim_{l \to \infty}} \ln \frac{|T_l(\lambda)|}{p^l} = +\infty \right\}.$$

Очевидно, $A \subset B$.

Мы воспользуемся следующими фактами.

Пусть множество Жюлиа связно. Тогда имеют место следующие факты:

(ф. 1) [5]. Существует предел

$$\sigma^2 = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \int \ln^2 \frac{|T_l(z)|}{p^l} d\mu(z).$$

Если $\sigma \neq 0$, то для последовательности $\ln \frac{|T'(T_k)|}{p}$ выполняется центральная предельная теорема:

$$\lim_{l \to \infty} \mu \left\{ z : \frac{1}{\sigma \sqrt{l}} \ln \frac{|T_l(z)|}{p^l} < c \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{c} e^{-u^2/2} du$$

и закон повторного логарифма

$$\overline{\lim_{l \to \infty}} \frac{\ln \frac{|T_l(z)|}{p^l}}{\sqrt{l \ln \ln l}} = \sqrt{2\sigma^2} \quad \mu\text{ — п.в.}$$

(ф. 2) [6] Предельная дисперсия $\sigma = 0$ лишь в следующих двух случаях, которые назовем вырожденными:

(1) J — окружность и $T(z) = z^p$;

(2) J — отрезок и $T(z) = 2\cos\left(p \cdot \arccos \frac{z}{2}\right)$ — полином Чебышева (с точностью до линейной замены).

(ф. 3) [4] Если J не есть окружность, то у него найдется сильно отталкивающая периодическая точка, т.е. такая точка a некоторого периода m, что $|T'_m(a)| > p^m$.

Теперь мы готовы доказать, что справедлива следующая

Лемма 4.

(1) *Пусть J несвязно. Тогда $\mu(A) = \mu(B) = 1$.*

(2) *Пусть J связно и не вырождено. Тогда $A \neq \varnothing$ и либо конечно, либо плотно на J, $\mu(A) = 0$, $\mu(B) = 1$.*

Доказательство. Заметим, что J связно в точности тогда, когда

$$\int \ln \frac{|T'(z)|}{p} d\mu(z) = 0.$$

(1)Если J несвязно, то по эргодической теореме

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{1}{l} \ln \frac{|T_l'(z)|}{p^l} = \int \ln \frac{|T'(z)|}{p} d\mu(z) > 0. \quad \mu \text{ — почти всюду.}$$

Откуда $\mu(A) = 1$.

(2) В этом случае в силу (ф. 3) $A \neq \varnothing$. Множество A обладает таким свойством (инвариантность с точностью до критических точек): если $x \in A$, $T(y) = x$ и $T'(y) \neq 0$, то $y \in A$.

Отсюда, во-первых, следует, что A конечно или плотно на J, и, во-вторых, из центральной предельной теоремы (в которой положим $c = 0$): $\mu(A) = 0$.

Равенство $\mu(B) = 1$ вытекает из закона повторного логарифма.

Замечание 2. Если J есть окружность, то $|T'\|_J = p$, поэтому $A = B = \varnothing$.

Замечание 3. Если T есть полином Чебышева, то после замены $z = 2\cos\varphi$

$$\frac{T_l(z)}{p^l} = \frac{\sin(p^l\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Откуда $A = B = \{-1;\ 1\}$.

Замечание 4. По-видимому, A плотно на J, если J не вырождено.

3. Предположим, что функция $g(z)$ удовлетворяет условию Дини в каждой точке множества J.

Теорема 2.

(1) *Пусть J несвязно. Тогда $S_{p^l}(g)(z) \to g(z)$, $l \to \infty$, экспоненциально в каждой точке $z \in A$ (т. е. μ — почти всюду на J).*

(2) *Пусть J связно и не вырождено. Тогда $S_{p^l}(g)(z) \to g(z)$, $l \to \infty$, экспоненциально в каждой точке $z \in A$;*

$$\forall z \in B\ \exists n_k \to \infty : S_{p^{n_k}}(g)(z) \to g(z).$$

Замечание 5. Если J окружность, то, вообще говоря,

$$S_{p^{n_k}}(g)(z) \not\to g(z)$$

ни для какой последовательности $n_k \to \infty$. Если J — отрезок $[-1, 1]$, то $S_{p^{n_k}}(g)(z) \to g(z)$ лишь при $z = \pm 1$, причем можно взять $n_k = k$, так как в этом случае $A = B = \{-1;\ 1\}$.

§ 4. **Линейный алгоритм вычисления моментов равновесной меры.** Искомый алгоритм вычисления моментов $c_n = \int z^n d\mu(z)$, $n \in N$, приобретает следующий вид:

(*a*) находим коэффициенты $(a_{i,n})_{i=0}^{n+1}$ разложений

$$zE_n(z) = \sum_{i=0}^{n+1} a_{i,n} E_i(z),\ n = 0,\ 1,\ \ldots;$$

(*в*) по рекуррентным формулам $\beta_{0,,0}=1$,

$$\beta_{k,n+1}=\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}\,\beta_{j,n},\ k=0,\ 1,\ \dots,\ n+1,$$

вычисляем коэффициенты $(\beta_{j,n})_{j=0}^{n}$ разложений

$$z^n=\sum_{k=0}^{n}\beta_{k,n}\,E_k(z);$$

(*c*) полагаем

$$c_n=\beta_{0,n}.$$

Этот алгоритм становится конструктивным, как только мы нашли матрицу $Z=(a_{i,n})$. Для квадратичного отображения $z\to z^2-t$ ее можно найти. А именно,

$$zE_n(z)=E_{n+1}+t\sum_{k=1}^{\operatorname{ord}(n+1)}E_{n+1-2^k}(z),$$

где $\operatorname{ord}(m)$ есть двоичный порядок числа $m\in N$, т. е. такое максимальное неотрицательное целое l, что 2^l делит m.

Замечание 6. Аналогично строится полиномиальный базис в пространстве функций, голоморфных на множестве Мандельброта, и матрица умножения на t в этом базисе.

Список литературы: 1. *Любич М. Ю.* Динамика рациональных преобразований: топологическая картина // Успехи мат. наук. 1986. **41**. вып. 4. С. 35—95. 2. *Barnsley M. F., Harrington A. N.* Moments of balanced measures on Julia sets // T. A. M. S. **281**, **1**. P. 271—280. 3. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. М., 1973. 120 с. 4. *Еременко А. Э., Левин Г. М.* О периодических точках полиномов // Укр. мат. журн. 1989. **41**. С. 10—39. 5. *Przytycki F., Urbanski M., Zdunik A.* Harmonic, Gibbs and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps. 1986 Annals of Math. 130 (1989), 1—40. 6. *Zdunik A.* Hausdorff dimension of maximal measures for rational maps. 1987 (Preprint).

Поступила в редколлегию 05.11.87