УДК 517.982

В. М. КАДЕЦ, К. Э. КАИБХАНОВ

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для изучения устойчивости относительно малых возмущений линейной независимости последовательностей элементов банахова пространства X в [1] было введено множество $\Gamma(X)$ допустимых возмущений. Там же было доказано, что если X содержит подпространство, изоморфное $X \oplus X$, то $\Gamma(X)$ является линейным пространством относительно естественных операций. Цель настоящей работы — построение пространства X, для которого $\Gamma(X)$ нелинейно.

Все банаховы пространства считаются бесконечномерными, если не оговорено противное. Обозначения: S_X, B_X— единичная сфера, единичный шар пространства X; $X \sim Y$ — пространства X и Y изоморфны; $d(X, Y)$ — дистанция Банаха—Мазура между X и Y ($d(X, Y) = \inf\{\|A\| \cdot \|A^{-1}\| : A : X \to Y$ — изоморфизм$\}$).

Напомним определения, предложенные в [1] (см. также [1, предложение 1]). Ограниченная последовательность $(x_i)_1^\infty$ элементов банахова пространства X соответствует последовательности $(\gamma_i)_1^\infty \subset \boldsymbol{C}$, если любая возмущенная последовательность $(y_i)_1^\infty \subset X$ с условием $\|y_i - x_i\| \leqslant |\gamma_i|$ является линейно независимой. $\Gamma(X)$ есть множество последовательностей $(\gamma_i)_1^\infty \subset \boldsymbol{C}$ (допустимых возмущений), каждой из которых соответствует некоторая ограниченная последовательность $(x_i)_1^\infty \subset X$. Определим на $\Gamma(X)$ функционал ρ_X: $\rho_X((\gamma_i)_1^\infty) = \inf\{h : \exists (x_i)_1^\infty \subset hB_X, (x_i)_1^\infty$ соответствует $(\gamma_i)_1^\infty\}$.

Лемма 1. *Пусть Y — подпространство банахова пространства X. Тогда $\Gamma(X/Y) \subset \Gamma(X)$ и $\rho_X((\gamma_i)_1^\infty) \leqslant \rho_{X/Y}((\gamma_i)_1^\infty)$ для любой последовательности $(\gamma_i)_1^\infty \in \Gamma(X/Y)$.*

Доказательство. Пусть $(z_i)_1^\infty \subset S_{X/Y}$, $\varepsilon > 0$, $(\gamma_i)_1^\infty \in \Gamma(X/Y)$, $n \in \boldsymbol{N}$ произвольны. Положим $\varepsilon_i = \varepsilon|\gamma_i|$. $(z_i)_1^n$ можно представить в виде $z_i = x_i + y_i + u_i$, где $(y_i)_1^n \subset Y$, $(x_i + y_i)_1^n \subset S_X$, $\|u_i\| \leqslant \varepsilon_i$. Имеем

$$\sup_{(a_i) \subset C} \frac{\sum_1^n |a_i|\,|\gamma_i|}{\left\|\sum_1^n a_i(x_i + y_i)\right\|} = \sup_{(a_i) \subset C} \frac{\sum_1^n |a_i|\,|\gamma_i|}{\left\|\sum_1^n a_i(z_i - u_i)\right\|} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(a_i) \subset C} \frac{\sum_1^n |a_i|\,|\gamma_i|}{\left\|\sum_1^n a_i z_i\right\| - \sum_1^n |a_i|\,\varepsilon_i} =$$

$$= \sup_{|a_i| < 1} \frac{\sum_1^n |a_i| \, |\gamma_i|}{\left\| \sum_1^n a_i z_i \right\| - \varepsilon \sum_1^n |a_i| \, |\gamma_i|} =$$

$$= \sup_{|a_i| < 1} \frac{1}{\dfrac{\left\| \sum_1^n a_i z_i \right\|}{\sum_1^n |a_i| \, |\gamma_i|} - \varepsilon},$$

и утверждение следует из произвольности ε и [1, лемма].

Следующая теорема является усилением основного результата [1].

Теорема 1. *Пусть Y — подпространство банахова пространства X и X/Y содержит подпространство, изоморфное декартову квадрату $X : X/Y \supset X_1 \oplus X_2$, $X_1 \sim X_2 \sim X$. Тогда $\Gamma(X)$ является линейным пространством относительно естественных покоординатных операций, а ρ_X — квазинормой на $\Gamma(X)$.*

Доказательство. Достаточно, пользуясь леммой 1, повторить рассуждения в [1].

Для банахова пространства X определим функцию $\varphi_X(n) = \inf \{ d(X_1, l_1^n) : X_1 \subset X, \ \dim X_1 = n \}$.

Лемма 2. *Пусть X — банахово пространство. Тогда*

$$\rho_X((\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)) = \varphi_X(n).$$

Доказательство. Если $(e_i)_1^n$ — естественный базис в l_1^n, то

$$\inf \{ d(X_1, l_1^n) : X_1 \subset X, \ \dim X_1 = n \} =$$

$$= \inf \{ \|T\| : T : [x_i]_1^n \to l_1^n, \ (x_i)_1^n \subset S_X, \ Tx_i = e_i \} =$$

$$= \inf_{(x_i)_i^n \subset S_X} \left\{ \sup_{(a_i) \subset C} \frac{\left\| T \left(\sum_1^n a_i x_i \right) \right\|}{\left\| \sum_1^n a_i x_i \right\|} : T : [x_i]_1^n \to l_1^n, \ Tx_i = e_i \right\} =$$

$$= \inf_{(x_i)_i^n \subset S_X} \sup_{(a_i) \subset C} \frac{\sum_1^n |a_i|}{\left\| \sum_1^n a_i x_i \right\|}.$$

Сопоставляя это с [1, лемма], получим требуемое равенство.

Лемма 3. *Пусть Y — подпространство банахова пространства X и X/Y содержит подпространство, изоморфное $X \oplus X$. Тогда φ_X и $\varphi_{X/Y}$ эквивалентны, т. е. существует такое C, что*

$$C^{-1} \varphi_X(n) \leqslant \varphi_{X/Y}(n) \leqslant C \varphi_X(n).$$

Доказательство. Пусть $X_1 \subset X/Y$ и $d(X_1, X \oplus X) = d$. Тогда, пользуясь леммами 1 и 2, а также [1, предложение 2, следствие 1], будем иметь

$$\varphi_X(n) \leqslant \varphi_{X/Y}(n) \leqslant \varphi_{X_1}(n) \leqslant d\varphi_{X \oplus X}(n) \leqslant d\varphi_X(n).$$

Лемма 4. *Пусть Y — подпространство банахова пространства X и X/Y содержит подпространство, изоморфное $X \oplus X$: $X/Y \supset X_1 \oplus X_2$, $X_1 \sim X_2 \sim X$. Тогда существует такое K, что $\varphi_X(2n)/\varphi_X(n) \leqslant K$.*

Доказательство. Лемма 3 говорит нам, что достаточно доказать неравенство $\varphi_{X/Y}(2n) \leqslant K\varphi_X(n)$. Пусть $P_i : X_1 \oplus X_2 \to X_i$ $i = 1, 2$ — проекторы, числа $\varepsilon > 0$, $n \in \boldsymbol{N}$ произвольны. Найдутся конечномерные подпространства $Y_i \subset X_i$, $i = 1, 2$, для которых $d(Y_i, l_1^n) \leqslant d(X, X_i)(\varphi_X(n) + \varepsilon)$. Пусть $T_i : Y_i \to l_1^n$, $i = 1, 2$ — такие изоморфизмы, что $\| T_i \| = d(Y_i, l_1^n)$, $\| T_i^{-1} \| = 1$. Рассмотрим изоморфизм $T : Y_1 \oplus Y_2 \to l_1^{2n} = l_1^n \oplus l_1^n$, заданный по правилу $T(y_1, y_2) = (T_1 y_1 T_2 y_2) \in l_1^n \oplus l_1^n$. Для $\| (y_1, y_2) \| = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \| T(y_1, y_2) \| &\leqslant \| T_1 \| \, \| y_1 \| + \| T_2 \| \, \| y_2 \| = \\ &= \| T_1 \| \, \| P_1(y_1, y_2) \| + \| T_2 \| \, \| P_2(y_1, y_2) \| \leqslant \\ &\leqslant \| T_1 \| \, \| P_1 \| + \| T_2 \| \, \| P_2 \| = \\ &= \| P_1 \| d(Y_1, l_1^n) + \| P_2 \| d(Y_2, l_1^n). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\| T(y_1, y_2) \| = 1$. Тогда

$$\| (y_1, y_2) \| \leqslant \| y_1 \| + \| y_2 \| \leqslant \| T_1 y_1 \| + \| T_2 y_2 \| = 1,$$

т. е. $\| T^{-1} \| \leqslant 1$. Итак,

$$\begin{aligned} \varphi_{X/Y}(2n) &\leqslant \varphi_{X_1 \oplus X_2}(2n) \leqslant \| T \| \cdot \| T^{-1} \| \leqslant \\ &\leqslant (\| P_1 \| d(X, X_1) + \| P_2 \| d(X, X_2))(\varphi_X(n) + \varepsilon) \end{aligned}$$

и утверждение следует из произвольности ε.

Лемма 5. *Пусть X_1, X_2 — банаховы пространства, $\dim X_i = n_i$, $i = 1, 2$, и $X_1 \oplus X_2$ — ортогональная сумма (т. е. $\| P_i \| = 1$, где $P_i : X_1 \oplus X_2 \to X_i$ — проекторы). Тогда $d(X_1 \oplus X_2, l_1^{n_1+n_2}) \leqslant d(X_1, l_1^{n_1}) + d(X_2, l_1^{n_2})$.*

Доказательство. Достаточно повторить рассуждения при доказательстве предыдущей леммы.

Под пространством $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus l_{p_i}^{n_i}\right)_2$ мы будем понимать пространство последовательностей $(a_j)_1^\infty \subset \boldsymbol{C}$ с нормой

$$\| (a_j)_1^\infty \| = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} | a_j |^{p_i}\right)^{2/p_i}\right)^{1/2},$$

где $n_0 = 0$.

Известен следующий результат Д. Льюиса [2]: если $X \subset L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, $\dim X = n$, то $d(X, l_2^n) \leqslant n^{|1/2 - 1/p|}$.

Лемма 6. *Пусть* $X = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus l_{p_i}^{n_i}\right)_2$, $2 > p_{i+1} > p_i$, *и* $X_1 \subset X$, $\dim X_1 = m$. *Тогда* $d(X_1, l_2^m) \leqslant m^{1/p_1 - 1/2}$.

Доказательство. Пусть $P_i : X \to l_{p_i}^{n_i}$ — естественные проекторы. $l_{p_i}^{n_i} \subset L_{p_i}(0, 1)$, поэтому, согласно теореме Д. Льюиса, $d(P_i X_1, l_2^{\dim P_i X_1}) \leqslant m^{1/p_i - 1/2}$. Пусть $T_i : P_i X_1 \to l_2^{\dim P_i X_1}$ — такие изоморфизмы, что $\| T_i \| = d(P_i X_1, l_2^{\dim P_i X_1}) \leqslant m^{1/p_i - 1/2}$ и $\| T_i^{-1} \| = 1$. Рассмотрим оператор $T : X_1 \to l_2^m$, определенный следующим образом: $Tx = (T_1 P_1 x, T_2 P_2 x, \ldots) \in \left(\sum_1^{\infty} T_i P_i X\right)_2$. Для $x \in S_X$ имеем

$$\| Tx \| = \left(\sum_1^{\infty} \| T_i P_i x \|^2\right)^{1/2} \leqslant (\sup_i \| T_i \|) \left(\sum_1^{\infty} \| P_i x \|^2\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant m^{1/p_1 - 1/2} \cdot \| x \| = m^{1/p_1 - 1/2}.$$

Если $\| Tx \| = 1$, то

$$\| x \| = \left(\sum_1^{\infty} \| T_i^{-1} T_i P_i x \|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (\sup_i \| T_i^{-1} \|) \left(\sum_1^{\infty} \| T_i P_i x \|^2\right)^{1/2} = \| Tx \| = 1,$$

т. е. $\| T^{-1} \| \leqslant 1$, и, следовательно, $d(X_1, l_2^m) \leqslant \| T \| \cdot \| T^{-1} \| \leqslant \leqslant m^{1/p_1 - 1/2}$.

Нам в дальнейшем понадобится следующий результат, принадлежащий А. Гротендику [3] (см. также [4, с. 356]): пусть $T : l_1 \to l_2$ — линейный ограниченный оператор; тогда для любого $n \in N$ и для любых $(x_i)_1^n \subset l_1$

$$\sum_1^n \| Tx_i \| \leqslant K_G \| T \| \sup_{f \in B_{l_\infty}} \left(\sum_1^n | f(x_i) |\right),$$

где K_G — универсальная постоянная ($K_G \approx \pi/2$).

Лемма 7. *Пусть* $A : l_2^n \to l_1^{2n}$, $B : l_1^{2n} \to l_2^n$ — *такие линейные операторы, что* $BA = I_{l_2^n}$. *Тогда* $\| A \| \cdot \| B \| \geqslant K_G^{-1} n^{1/2}$.

Доказательство. Очевидно, можно считать $\| A \| = 1$. Пусть $(e_i)_1^{\infty}$ — естественный базис в l_2^n; тогда для любых $(\theta_i)_1^n$, $|\theta_i| = 1$, $\left\| \sum_1^n \theta_i A e_i \right\| \leqslant \left\| \sum_1^n \theta_i e_i \right\| = n^{1/2}$. Согласно неравенству А. Гротендика,

$$n = \sum_1^n \| B(A(\theta_i e_i)) \| \leqslant K_G \| B \| \sup_{f \in B_{l_\infty}} \left(\sum_1^n | f(A(\theta_i e_i)) |\right). \quad (1)$$

Так как

$$\max_{|\theta_i|=1} \sup_{f \in B_{l_\infty}} \Big(\sum_1^n |f(A(\theta_i e_i))|\Big) = \sup_{f \in B_{l_\infty}} \Big(\sum_1^n |f(Ae_i)|\Big) =$$

$$= \max_{|\theta_i|=1} \sup_{f \in B_{l_\infty}} \Big(f\Big(\sum_1^n \theta_i Ae_i\Big)\Big) = \max_{|\theta_i|=1} \Big\| \sum_1^n \theta_i Ae_i \Big\| \leqslant n^{1/2},$$

то, подставляя это в (1), получим $n \leqslant K_G \|B\| n^{1/2}$, или $\|B\| \geqslant K_G^{-1} n^{1/2}$.

Следствие 1. *Пусть* $A: l_2^{\delta n} \to l_1^{2n}$, $B: l_1^{2n} \to l_2^{\delta n}$, $1 \leqslant \delta \leqslant 2$ — *такие линейные операторы, что* $BA = I_{l_2^{\delta n}}$. *Тогда* $\|A\| \|B\| \geqslant$ $\geqslant K_G^{-1} n^{1/2}$.

Доказательство. Пусть $P: l_2^{\delta n} \to l_2^n$ — проектор с $\|P\| = 1$. Положим $A_1 = A|_{P l_2^{\delta n}}: l_2^n \to l_1^{2n}$, $B_1 = PB: l_1^{2n} \to l_2^n$. Тогда $B_1 A_1 = I_{l_2^n}$ и мы попадаем в условия леммы 7. Поэтому $\|A\| \|B\| \geqslant \|A_1\| \|B_1\| \geqslant$ $\geqslant K_G^{-1} n^{1/2}$.

Теперь мы готовы построить пример пространства, для которого $\Gamma(X)$ не является линейным пространством. Вначале обратимся к пространству, для которого ρ_x не есть квазинорма. Выберем по индукции числа $p_i \to 2$, $n_i \to \infty$, $1 < p_{i-1} < p_i < 2$, так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1) $(2\Delta_{i-1})^{1/p_i - 1/2} \leqslant 3$, где $\Delta_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$;

2) $n_i^{1-1/p_i} \geqslant \Delta_{i-1}$;

3) $\Delta_i^{1/p_i - 1/2} \to \infty$ при $i \to \infty$

(вначале выбираем p_i, затем n_i). Рассмотрим пространство $X =$ $= \big(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus l_{p_i}^{n_i}\big)_2$. Пользуясь теоремой Гурария—Кадеца—Мацаева [5] $(d(l_p^n, l_1^n) \leqslant n^{1-1/p})$ и Ф. Джона [6] (если $\dim X = \dim Y = n$, то $d(X, Y) \leqslant n$), леммой 5 и условием 2), получим

$$\varphi_X(\Delta_i) \leqslant d\Big(\Big(\sum_{j=1}^{i} \oplus l_{p_j}^{n_j}\Big)_2, \ l_1^{\Delta_i}\Big) =$$

$$= d\Big(\Big(\Big(\sum_{j=1}^{i-1} \oplus l_{p_j}^{n_j}\Big)_2 \oplus l_{p_i}^{n_i}\Big)_2, \ l_1^{\Delta_{i-1}+n_i}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \Delta_{i-1} + n_i^{1-1/p_i} \leqslant 2n_i^{1-1/p_i} \leqslant 2\Delta_i^{1-1/p_i}. \qquad (2)$$

Пусть $X_1 \subset X$, $\dim X_1 = 2\Delta_i$ — произвольное подпространство, $Q: X \to$ $\to \big(\sum_{j=i+1}^{\infty} \oplus l_{p_j}^{n_j}\big)_2$ — естественный проектор; очевидно, $\|Q\| = 1$. Положим $X_1' = QX_1$. Тогда $\dim X_1' = \delta\Delta_i$, $1 \leqslant \delta \leqslant 2$. Обозначим $Y =$ $= X_1 \cap X_1'$; ясно, что $\dim Y = \delta_1 \Delta_i$, $1 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta$. По лемме 6 и условию 1),

$$d(Y, \ l_2^{\delta_1 \Delta_i}) \leqslant d(X_1', \ l_2^{\delta \Delta_i}) \leqslant (2\Delta_i)^{1/p_{i+1} - 1/2} \leqslant 3.$$

Пусть $A_1 : X_1' \to l_2^{\delta\Delta_i}$ — такой изоморфизм, что $\| A_1 \| \| A_1^{-1} \| \leqslant 3$ и $p_1' : l_2^{\delta\Delta_i} \to A_1 Y$ — проектор с $\| P_1' \| = 1$. Тогда $P_1 = A_1^{-1} P_1' A_1 : X_1' \to Y$ — проектор и $\| P_1 \| \leqslant 3$. Далее, $P = P_1 Q : X_1 \to Y$ — тоже проектор с $\| P \| \leqslant 3$. Пусть $T : X_1 \to l_1^{2\Delta_i}$ — произвольный изоморфизм с условиями $\| T \| = 1$, $\| T^{-1} \| = d(X_1, l_1^{2\Delta_i})$. Рассмотрим диаграмму

$$l_2^{\delta_1\Delta_i} \xrightarrow{V} Y \xrightarrow{T|_Y} l_1^{2\Delta_i} \xrightarrow{PT^{-1}} Y \xrightarrow{V^{-1}} l_2^{\delta_1\Delta_i},$$

где $V : l_2^{\delta_1\Delta_i} \to Y$ — изоморфизм с $\| V \| = 1$, $\| V^{-1} \| = d(Y, l_2^{\delta_1\Delta_i}) \leqslant 3$. Положим $A = T|_Y V : l_2^{\delta_1\Delta_i} \to l_1^{2\Delta_i}$, $B = V^{-1} P T^{-1} : l_1^{2\Delta_i} \to l_2^{\delta_1\Delta_i}$. Имеем $\| A \| \leqslant \| T|_Y \| \| V \| \leqslant 1$, $BA = I_{l_2^{\delta_1\Delta_i}}$. Согласно следствию 1, $\| A \| \times \| B \| \geqslant K_G^{-1} \Delta_i^{1/2}$, и $\| B \| \geqslant K_G^{-1} \Delta_i^{1/2}$, $\| V^{-1} \| \, \| P \| \, \| T^{-1} \| \geqslant K_G^{-1} \Delta_i^{1/2}$,

$$\| T^{-1} \| \geqslant \frac{K_G^{-1} \Delta_i^{1/2}}{\| V^{-1} \| \, \| P \|} \geqslant \frac{K_G^{-1}}{9} \Delta_i^{1/2}.$$

Вспомнив, что $\| T^{-1} \| = d(X_1, l_1^{2\Delta_i})$, будем иметь

$$d(X_1, l_1^{2\Delta_i}) \geqslant \frac{K_G^{-1}}{9} \Delta_i^{1/2}, \qquad (3)$$

а так как $X_1 \subset X$ было произвольным, то, учитывая (2),

$$\frac{\varphi_X(2\Delta_i)}{\varphi_X(\Delta_i)} \geqslant \frac{K_G^{-1} \Delta_i^{1/2}}{9 \cdot 2\Delta_i^{1-1/p_i}} = \frac{K_G^{-1}}{18} \Delta_i^{1/p_i - 1/2} \to \infty$$

при $i \to \infty$. Пользуясь леммой 2, получим

$$\varphi_X(2\Delta_i) = \rho_X((\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2\Delta_i}, 0, 0, \ldots)) =$$

$$= \rho_X((\underbrace{1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0}_{2\Delta_i}, 0, 0, \ldots) +$$

$$+ (\underbrace{0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1}_{2\Delta_i}, 0, 0, \ldots));$$

$$\rho_X((\underbrace{1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0}_{2\Delta_i}, 0, 0, \ldots)) +$$

$$+ \rho_X((\underbrace{0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1}_{2\Delta_i}, 0, 0, \ldots)) =$$

$$= 2\rho_X((\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\Delta_i}, 0, 0, \ldots)) = 2\varphi_X(\Delta_i).$$

Следовательно,

$$\rho_X((\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2\Delta_i}, 0, 0, \ldots))\times$$
$$\times(\rho_X((\underbrace{1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0}_{2\Delta_i}, 0, 0, \ldots))+$$
$$+\rho_X((\underbrace{0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1}_{2\Delta_i}, 0, 0, \ldots)))^{-1}=$$
$$=\varphi_X(2\Delta_i)/(2\varphi_X(\Delta_i))\to\infty,\ i\to\infty,$$

и ρ_X не является квазинормой на $\Gamma(X)$. Нами попутно доказано также, что никакое факторпространство пространства X не содержит подпространство, изоморфное $X\oplus X$.

Теперь приведем пример пространства X, для которого $\Gamma(X)$ нелинейно. Напомним, что базис $(x_i)_1^\infty$ банахова пространства X называется l-безусловным, если для любых $(a_i)_1^\infty\subset C$ имеем $\|\sum a_ix_i\|=$ $=\|\sum|a_i|x_i\|$. Если X — банахово пространство с l-безусловным базисом $(x_i)_1^\infty$, то X^* можно отождествить с множеством последовательностей $(b_i)_1^\infty\subset C$ с нормой $\|(b_i)_1^\infty\|=\sup\left\{\sum|a_i||b_i|:\|\sum a_ix_i\|=1\right\}$.

Лемма 8. *Пусть X — банахово пространство с l-безусловным базисом $(x_i)_1^\infty\subset S_X$. Тогда $X^*\subset\Gamma(X)$ и $\|(\gamma_i)_1^\infty\|_{X^*}\geqslant\rho_X((\gamma_i)_1^\infty)$ для всех $(\gamma_i)_1^\infty\in X^*$.*

Доказательство. Если $(\gamma_i)_1^\infty\in X^*$, то

$$\|(\gamma_i)_1^\infty\|_{X^*}=\sup_{(a_i)\subset C}\frac{\sum|a_i||\gamma_i|}{\|\sum a_ix_i\|}\geqslant\rho_X((\gamma_i)_1^\infty).$$

Рассмотрим пространство $X=\left(\left(\sum_{i=1}^\infty\oplus l_{p_i}^{n_i}\right)_2\oplus l_2\right)_2$, пусть при этом $p_i\to 2$, $n_i\to\infty$ удовлетворяют приведенным выше условиям 1), 2), а также следующему (более сильному, чем 3)):

$$\frac{1}{2^{i/2}}n_i^{1/2-1/q_i}\to\infty\ \text{ при } i\to\infty;\ 1/p_i+1/q_i=1.$$

Покажем, что $\Gamma(X)$ нелинейно. Обозначим $Y=\left(\sum_{i=1}^\infty\oplus l_{p_i}^{n_i}\right)_2$. Положим

$$\gamma_j=\frac{1}{2^{i/2}n_i^{1/q_i}}\ \text{ при } \Delta_{i-1}<j\leqslant\Delta_i,\ \Delta_0=0.$$

Легко проверяется, что $(\gamma_j)_1^\infty\in\left(\sum_{i=1}^\infty\oplus l_{q_i}^{n_i}\right)_2=Y^*$ и $\|(\gamma_j)_1^\infty\|_{Y^*}=1$. По лемме 8, $(\gamma_j)_1^\infty\in\Gamma(Y)$, а согласно [1, следствие 1], $(\gamma_j)_1^\infty\in\Gamma(X)$ и $\rho_X((\gamma_j)_1^\infty\leqslant 1$ (поскольку естественный базис в X, состоящий из единичных векторов, является l-безусловным). Образуем 4 последовательности чисел:

$$\gamma_l(j)=\begin{cases}\gamma_k, & \text{если } j=4k+l,\ k\geqslant 0,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}\quad 1\leqslant l\leqslant 4,$$

т. е. так, чтобы последовательность $(\gamma_j')_1^\infty = \left(\sum_{l=1}^{4} \gamma_l(j)\right)_{j=1}^\infty$ была растянутой вчетверо последовательностью $(\gamma_j)_1^\infty$. Все $(\gamma_l(j))_{j=1}^\infty$, $1 \leqslant l \leqslant 4$, содержатся в $\Gamma(X)$: им соответствуют $(\alpha x_j)_{j=1}^\infty$ при любом $\alpha > 1$, где

$$x_j = \begin{cases} k\text{-й единичный вектор пространства } Y \subset X, \\ \quad \text{если } j = 4k + l,\ k \geqslant 0 \text{ (т. е. если } \gamma \neq 0) \\ j\text{-й единичный вектор пространства } l_2 \subset X \\ \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

(для доказательства достаточно воспользоваться [1, лемма] и тем фактом, что $\|(\gamma_j)_1^\infty\|_{Y^*} = 1$). По построению,

$$\gamma_j' = \sum_{l=1}^{4} \gamma_l(j) = \frac{1}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} \quad \text{при } 4\Delta_{i-1} < j \leqslant 4\Delta_i.$$

Для X, как и выше, доказывается утверждение, аналогичное лемме 6, а также неравенство (3) для любого $X_1 \subset X$, $\dim X_1 = 2\Delta_i$. Получаем, что

$$\rho_X((\gamma_j')_1^\infty) \geqslant \rho_X((\gamma_j')_{j=4\Delta_{i-1}+1}^{4\Delta_i} =$$
$$= \frac{1}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} \rho_X((\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{4n_i}, 0, 0, \ldots)) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} \rho_X((\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2\Delta_i}, 0, 0, \ldots)) =$$
$$= \frac{1}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} \varphi_X(2\Delta_i) \geqslant \frac{1}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} \frac{K_G^{-1}}{9} \Delta_i^{1/2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{K_G^{-1}}{9} \frac{n_i^{1/2}}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} = \frac{K_G^{-1}}{9} \frac{1}{2^{i/2}} n_i^{1/2 - 1/q_i} \to \infty$$

при $i \to \infty$, а это означает, что $(\gamma_j')_1^\infty = \sum_{l=1}^{4} (\gamma_l(j))_{j=1}^\infty \notin \Gamma(X)$, хотя каждое из слагаемых содержится в $\Gamma(X)$. Иными словами, $\Gamma(X)$ нелинейно. Итак, нами доказана

Теорема 2. *Существует банахово пространство X, для которого $\Gamma(X)$ не является линейным пространством относительно покоординатных операций.*

Приведенным выше методом можно получить усиление результата Т. Фигеля [7].

Лемма 4′. *Пусть Y — подпространство банахова пространства X и $(X/Y)^n$ содержит подпространство X_1, изоморфное X^{n+1}. Тогда существует такое C, что $\varphi_{X^n}(k(n+1)) \leqslant C\varphi_X(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что X^n и X^{n+1} — ортогональные суммы. Пусть $d(X_1, X^{n+1}) = d$.

Тогда, пользуясь леммами 1, 2 и 5, а также [1, предложение 2, следствие 1], получим цепочку неравенств:

$$\varphi_{X^n}(k(n+1)) \leqslant \varphi_{X^n/Y^n}(k(n+1)) = \varphi_{(X/Y)^n}(k(n+1)) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi_{X_1}(k(n+1)) \leqslant d\varphi_{X^{n+1}}(k(n+1)) \leqslant d(n+1)\varphi_X(k).$$

Лемма 4' утверждает, что для того, чтобы никакое факторпространство $(X/Y)^n$ не содержало X^{n+1}, достаточно условие 1) в приведенном выше примере заменить на 1'): для любого $n \in N$ найдется такое $n_0 \in \boldsymbol{N}$, что для всех $i \geqslant n_0$ $((n+1)\Delta_i)^{1/p_{i+1}-1/2} \leqslant 3$, и все выкладки сохранят силу, если лемму 7 заменить на следующее утверждение: пусть $A: l_2^n \to l_1^{kn}$, $B: l_1^{kn} \to l_2^n$ — такие линейные операторы, что $BA = I_{l_2^n}$; тогда $\| A \| \| B \| \geqslant K_G^{-1} n^{1/2}$. Т. е. имеет место

Теорема 3. *Существует рефлексивное банахово пространство X, обладающее тем свойством, что для любого $Y \subset X$ и любого $n \in \mathbb{N}$ пространство $(X / Y)^n$ не содержит подпространство, изоморфное X^{n+1}.*

Основной результат [7] *следует отсюда при $Y = 0$.*

Список литературы: 1. *Каибханов К. Э.* О возмущении ω-линейно независимых систем в банаховом пространстве, содержащем свой квадрат // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1987. Вып. 47. С. 89—94. 2. *Lewis D. R.* Finite dimensional subspaces of L_p // Studia Math. 1978. 63, № 2. P. 207—212. 3. *Grothendieck A.* Resume de la theorie metrique des produits tensoriels topologiques // Bol. Soc. Mat. Sao Paolo. 1956. 8, № 1. P. 1—79. 4. *Пич А.* Оперативные идеалы. М., 1982. 536 с. 5. *Гурарий В. И., Кадец М. И., Мацаев В. И.* О расстояниях между конечномерными аналогами пространств L_p // Мат. сб. 1966. 70, № 4. С. 481—489. 6. *John F.* Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions // Courant Anniversary Volume. New York, 1948. P. 187—204. 7. *Figiel T.* An example of infinite dimensional reflexive Banach space non-isomorphic to its Cartesian square // Studia Math. 1972. 42, № 3. P. 295—306.

Поступила в редколлегию 02.11.87