УДК 519.46

М. И. КАДЕЦ, Ю. И. ЛЮБИЧ

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

Представлением топологической группы G в банаховом пространстве B называется гомоморфизм $T: G \to \mathrm{Aut}B$, сильно непрерывный в том смысле, что все орбиты $g \to T(g)x$ $(g \in G,\ x \in B)$ непрерывны $\mathrm{Aut}B$ — группа всех ограниченных и ограниченно обратимых линейных операторов $B \to B$. Представление T называется почти периодическим (п. п.), если все орбиты относительно компактны; слабо п. п., если все орбиты относительно слабо компактны; скалярно п. п., если все скалярные функции* $\tau_{f,x}(g) = f(T(g)x)$ $(x \in B, f \in B^*)$ на группе G почти периодичны.

Напомним, что непрерывная ограниченная функция $\varphi(g)$ называется п. п. справа, если семейство ее правых сдвигов $\varphi_h(g) = \varphi(gh)$ $(h \in G)$ относительно компактно в равномерной метрике. Аналогично определяется п. п. слева, но, в действительности, по известной лемме Маака эти две п. п. эквивалентны, и поэтому можно говорить просто п. п. С каждой группой G связана компактная группа $\overline{G}$ (боровский компакт группы G) и непрерывный гомоморфизм $R: G \to \overline{G}$ с плотным образом так, что каждая п. п. ф. $\varphi(g)$ продолжается до непрерывной функции $\overline{\varphi}$ на G: $\varphi(g) = \overline{\varphi}(R(g))$. Это боровское продолжение является изометрическим изоморфизмом банаховой алгебры п. п. ф. $AP(G)$ и банаховой алгебры непрерывных функций $C(\overline{G})$. Для любого п. п. представления $\overline{T}$ группы G существует и единственно представление $\overline{T}$ боровского компакта $\overline{G}$ (в том же банаховом пространстве B), такое что $T = \overline{T}R$. Обратно, если $\tilde{T}$ — какое-нибудь представление боровского компакта $\overline{G}$, то $T = \tilde{T}R$ — п. п. представление группы G. Эти и дальнейшие необходимые нам сведения о банаховых представлениях имеются в работе*. Там же (с. 104—105) доказано, что, если пространство B рефлексивно, то любое скалярно п. п. представление является п. п. (обратное, очевидно, справедливо в любом банаховом пространстве). Требование рефлексивности существенно, как показывает следующий

Пример. В пространстве c сходящихся комплексных последовательностей $x = (\xi_k)_1^\infty$ рсссмотрим оператор A умножения на сходящуюся последовательность $\lambda = (\lambda_k)_1^\infty$. Рассмотрим представление $t \to e^{iAt}$ аддитивной группы $\mathbb{R}$. Оно скалярно п. п., но, как мы сейчас убедимся, не является п. п. даже слабо, если $\lambda_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Действительно, в этом случае слабое замыкание орбиты точки $u = (1, 1, \ldots)$ есть множество

---

* Они называются обобщенными матричными элементами представления T.

всех $x=(\xi_k)_1^\infty\in c$, таких, что $|\xi_k|=1$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$. Оно не является слабо компактным, так как, полагая

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}(-1)^k & (1\leqslant k\leqslant n)\\ 1 & (k>n),\end{cases}$$

получаем последовательность $u^{(n)}=(\xi_k^{(n)})_{k=1}^\infty\in c$, из которой нельзя выделить последовательность, слабо сходящуюся в c (последовательность $\{u^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ w^* — сходится к $((-1)^k)_{k=1}^\infty$ в пространстве m всех ограниченных последовательностей).

Замечание. Если представление T слабо п. п. или скалярно п. п., то оно ограничено:

$$c_T\equiv\sup_g\|T(g)\|<\infty.$$

В рефлексивном пространстве любое ограниченное представление является слабо п. п., но не обязательно скалярно п. п. Например, если A — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и система собственных векторов оператора A неполна, то унитарное представление $t\to e^{iAt}$ группы $\mathbb{R}$ не является скалярно п. п.

Теорема. *В любом банаховом пространстве B представление T, являющееся одновременно скалярно и слабо п.п., является п.п.*

Доказательство проводится с соответствующими модификациями по тому же плану, что и в рефлексивном случае.

Рассмотрим боровские продолжения $\overline{\tau_{,f\ x}}$ обобщенных матричных элементов. Так как $\overline{\|\tau_{f,\ x}\|}\leqslant c_T\|f\|\|x\|$, при фиксированных $x\in B$, $\gamma\in\overline{G}$ величина $\overline{\tau_{f,\ x}}(\gamma)$ является непрерывным линейным функционалом от f. Следовательно,

$$\overline{\tau_{b,\ x}}(\gamma)=(\tilde T(\gamma)\,x)(f), \tag{1}$$

где $\tilde T(\gamma)$ — непрерывный гомоморфизм $B\to B^{**}$; функция $\gamma\to\tilde T(\gamma)\,x$ непрерывна, если B^{**} снабдить w^*-топологией. Из тождества

$$(\tilde T(R(g))\,x)(f)=\overline{\tau_{f,\ x}}(R(g))=\tau_{f,\ x}(g)=f(T(g)\,x)$$

следует, что $\tilde T(g)\,x=T(R(g))\,x$ при всех $g\in G$ $x\in B$. Так как $\operatorname{Im}R$ плотен в боровском компакте $\overline{G}$, то $\tilde T(\gamma)\,x$ при любом $\gamma\in\overline{G}$ является w^*-предельной точкой орбиты $T(g)\,x$. Но эта орбита, по условию, относительно слабо компактна, т, е. ее слабое замыкание в B w^*-компактно как подмножество в B^{**}, а, значит, оно w^*-замкнуто. Следовательно, w^*-замыкание рассматриваемой орбиты в B^{**} лежит в B. Но тогда $\tilde T(\gamma)\,x\in B$ при всех $\gamma\in\overline{G}$, т. е. $\tilde T(\gamma)$ оказывается оператором в B (очевидно, ограниченным). Поскольку $T=\tilde TR$, то остается проверить, что $\tilde T$ — представление боровского компакта. Это получается дословным повторением соответствующих рассуждений из* на

---

* *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп. Х., 1985. 143 с.

основании формулы (1), которую теперь можно записать в виде $\overline{\tau_{t,x}}(\gamma) = f(T(\gamma)x)$.

Поступила в редколлегию 22.04.88.