УДК 517.535.4

А. Ф. ГРИШИН

ФУНКЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ И ОДНА ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА

В статье без подробных объяснений используется общепринятая терминология теории целых и субгармонических функций [1, 2]. Пусть $f(z)$ — целая функция, а $n(r)$ — считающая функция ее нулей $\{z_n\}$, $n = 1, 2\ldots$. Известно, что из неравенства

$$\ln M(r) < Cr^{\rho} \qquad (1)$$

следует неравенство

$$n(r) < Cr^{\rho}. \qquad (2)$$

Буквой C мы обозначим различные величины, не зависящие от r. При нецелом ρ справедливо и обратное утверждение. При целом ρ неравенство (1) эквивалентно [2] совокупности соотношений, состоящих из неравенства (2) и условия равновесия Линделефа — $\sum\limits_{|z_n|<r} z_n^{-\rho}) \leqslant C$. Аналогичные утверждения справедливы и для субгармонических функций, при этом роль корней целой функции играет риссовская мера субгармонической функции. Подобные утверждения имеют место и для функций субгармонических в полуплоскости. Прежде чем переходить к этим утверждениям, введем некоторые определения и обозначения.

Пусть $\rho(r)$ — *уточненный порядок*, $\rho = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r)$, $V(r) = r^{\rho(r)}$. *Пусть* $u(z)$ — *функция субгармоническая в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$. *Функцию* $\rho(r)$ *мы будем называть формальным уточненным порядком функции* $u(z)$, *если справедливо неравенство* $u(z) < CV(|z|)$. *Функцию* $\rho(r)$ *мы будем называть полуформальным уточненным порядком функции* $u(z)$, *если:*

1) $\rho(r)$ — *формальный порядок;*

2) *выполняется условие Б. Я. Левина, т. е. существуют числа* $\delta > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, N *такие, что в каждой области* $D(\delta, \alpha, R) = \{z : (1-\alpha)R < |z| < (1+\alpha)R,\ \delta < \arg z < \pi - \delta\}$ *существует точка* z_1 *такая, что* $u(z_1) > -N\,V(|z_1|)$.

Известно (см., например, [4]), что если $\rho > 1$, то всякий формальный порядок является полуформальным.

Пусть $\rho(r)$ — формальный порядок $u(z)$, $u(t) = \overline{\lim\limits_{y\to+0}}\, u(t+iy)$, ν — неванлинновская мера функции u, $d\nu(\zeta) = \sin\arg\zeta\, d\mu(\zeta)$, где μ — риссовская мера; σ — сингулярная граничная мера; $\sigma([a, b]) = \lim\limits_{y\to+0} \int\limits_a^b [u(t+iy) - u(t)]\,dt$. Указанный предел существует для почти всех a и b. Пусть $d\sigma_1(t) = \frac{1}{2\pi|t|}\, d\sigma(t)$, β — мера в полуплоскости $Z_+ = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, причем если $E \subset Z_+$, $E_2 = E \cap \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$, $E_1 = E \setminus E_2$, то $\beta(E) = \nu(E_1) + \sigma_1(E_2)$. $\beta(r) = \beta(C^+(0, r))$,

$$C^+(0, r) = \{z : |z| \leqslant r, \operatorname{Im} z \geqslant 0\},\ \beta_1(r) = \int\limits_0^r \frac{d\beta(t)}{t},$$

$$\beta_2(r) = \int\limits_0^r t\beta_1(t)\,dt,\ a(t) = u(t) + u(-t),$$

$$\alpha_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^r \frac{a(t)}{t^2}\,dt,\ \alpha_2(r) = \int\limits_0^r t\alpha_1(t)\,dt,$$

$$\delta(t) = c_1 + 2\beta_1(t) - 2\alpha_1(t),\quad \delta_2(r) = \int\limits_0^r t\delta(t)\,dt.$$

Известно, что субгармоническая функция $u(z)$, имеющая в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ формальный порядок $\rho(r)$, определяется риссовской мерой, сингулярной граничной мерой и граничными значениями $u(t)$ с точностью до слагаемого $\operatorname{Im} Q(z)$, где $Q(z)$ — полином с вещественными коэффициентами c_k. Величина C_1, участвующая в определении $\delta(t)$,— это коэффициент при z в $Q(z)$. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, если не оговорено противное, что $u(z)$ — функция субгармоническая в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, гармоническая в некоторой окрестности нуля, $u(0) = 0$, $u'_x(0) = 0$, $z = x + iy$.

Указанные ограничения мы будем называть условием A. Условия на функцию $u(z)$ в нуле обеспечивают сходимость в нуле написанных выше интегралов, а условие $u(z) < CV(|z|)$ обеспечивает локальную интегрируемость функции $u(t)$. Мы доказываем

Теорема 1. *Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет условию A, $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho = 1$. Для того чтобы функция $\rho(r)$ была формальным порядком функции $u(z)$, необходимо*

$$\int_0^r \frac{|u(\pm t)|}{t^2}\,dt \leqslant C \int_0^r \frac{V(t)}{1+t^2}\,dt, \tag{3}$$

$$\int_0^r \frac{\beta(t)}{t^2}\,dt \leqslant C \int_0^r \frac{V(t)}{1+t^2}\,dt, \tag{4}$$

$$\delta_2(r) \leqslant CrV(r) \tag{5}$$

и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число r_ε, такое, что при $|z| \geqslant r_\varepsilon$ выполнялось неравенство

$$u(z) \leqslant \varepsilon |z|^2, \tag{6}$$

$$u(t) \leqslant CV(t), \tag{7}$$

$$\int_1^\infty \frac{|u(\pm t)|}{t^3}\,dt < \infty, \tag{8}$$

$$\int_1^\infty \frac{\beta(t)}{t^3}\,dt < \infty, \tag{9}$$

$$\delta_2(r) < CrV(r).$$

Всюду в дальнейшем неравенство $u(z) < \varepsilon |z|^2$ будет означать, что написанное выше неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$, если $|z| \geqslant r_\varepsilon$, и это не будет явно оговариваться.

Теорема 2. *Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет условию A, $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho = 1$. Для того чтобы функция $\rho(r)$ была полуформальным порядком функции $u(z)$, необходимо, чтобы*

$$\int_0^r \frac{|u(\pm t)|}{t}\,dt < CV(r), \tag{10}$$

$$\beta(r) < CV(r), \tag{11}$$

$$r|\delta(r)| < CV(r), \tag{12}$$

и достаточно, чтобы

$$u(z) < \varepsilon |z|^2, \tag{6}$$

$$u(t) < CV(t), \tag{7}$$

$$\int_1^\infty \frac{|u(\pm t)|}{t^3}\, dt < \infty, \tag{8}$$

$$\int_1^\infty \frac{\beta(t)}{t^3}\, dt < \infty, \tag{9}$$

$$|\delta_2(r)| < CrV(r). \tag{13}$$

Замечание. Мы будем пользоваться некоторыми фактами из теории субгармонических функций. Доказательство большей их части можно найти в [4]. Часть утверждений из теорем 1 и 2 также доказаны в [4]. Для удобства читателя мы приведем перечень используемых утверждений. В формулируемых ниже предложениях явно не оговаривается, что функция $u(z)$ удовлетворяет условию A. Однако это условие предполагается выполненным

Предложение 1. *Если* $\rho(r)$ — *формальный порядок функции* $u(z)$, *то*

$$\int_0^r \frac{|u(\pm t)|}{t^2}\, dt < C \int_0^r \frac{V(t)}{1+t^2}\, dt,$$

$$\int_0^r \frac{d\beta(t)}{t} < C \int_0^r \frac{V(t)}{1+t^2}\, dt.$$

Это результат из § 4 [4].

Предложение 2. *Если* $\rho(r)$ — *полуформальный порядок функции* $u(z)$, *то*

$$\int_0^r \frac{|u(\pm t)|}{t}\, dt < CV(r), \; \beta(r) < CV(r),$$

а если ρ — *целое число и*

$$\delta(r) = C_\rho + \frac{2}{\rho} \iint\limits_{C+(0,\, r)} \frac{\sin \rho\varphi}{\sin \varphi} \frac{1}{|\zeta|^\rho}\, d\beta(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_{-r}^{r} \frac{u(t)}{t^{1+\rho}}\, dt,$$

то $r^\rho |\delta(r)| < CV(r)$.

Дополнительно предполагается, что интегралы в нуле сходятся. Это теоремы 18 и 19 из [4].

Предложение 3. *Пусть* $\rho(r)$ — *формальный порядок функции* $u(z)$, $q = [\rho]$,

$$d_q(z, \zeta) = \operatorname{Re}\left[\ln \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} + z\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) + \ldots + \frac{1}{q} z^q \left(\frac{1}{\zeta^q} - \frac{1}{\bar{\zeta}^q}\right)\right],$$

$$K_q(z, t) = \operatorname{Im}\left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} - \ldots - \frac{z^q}{t^{q+1}}\right].$$

Тогда

$$u(z)=\iint\limits_{Z_+}\frac{1}{\sin\varphi}\,d_q(z,\zeta)\,d\beta(\zeta)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_q(z,t)\,u(t)\,dt+\operatorname{Im}P_q(z),$$

где $\varphi=\arg\zeta$; *ядро* $\frac{1}{\sin\varphi}d_q(z,\zeta)$ *определяется на вещественной оси по непрерывности;* $P_q(z)=\sum\limits_{k=1}^{q}c_kz^k$ — *полином с вещественными коэффициентами.*

Это результат из § 4 [4]. Впервые такое представление, насколько известно автору, получено в работе Ито [5].

Предложение 4. *Если для любого* $\varepsilon>0$ *существует* r_ε *такое, что при* $|z|\geqslant r_\varepsilon$ *выполняются неравенства из предложения 2 с заменой* C *на* ε, *то справедливы неравенства* $u(z)<\varepsilon CV(|z|)$, $|z|\geqslant r_\varepsilon$, $u(z)>-\varepsilon CV(|z|)$ *вне множества кругов нулевой линейной плотности.*

Первая оценка стандартным способом получается из предложения 3. Вторая — следствие теоремы 11 из [4].

Предложение 5. *(Формула Карлемана). Имеет место равенство*

$$\int\limits_0^R\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{R^2}\right)d\beta(t)=\frac{1}{\pi R}\int\limits_0^\pi u(Re^{i\theta})\sin\theta\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^R\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)a(t)\,dt-\frac{1}{2}c_1.$$

Для случая $u(z)=\ln|f(z)|$, где $f(z)$ голоморфная в Z_+ функция, доказательство приведено в [2] гл. 5. Доказательство этой формулы можно получить так. Напишем равенство, приведенное в § 4 [4]:

$$u(z)=-\iint\limits_{C^+(0,\,R_1)}G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_{R_1}}u(\zeta)\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n}\,ds-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R_1}^{R_1}\frac{\partial G(z,t)}{\partial n}\,d\sigma(t),$$

где $G(z,\zeta)$ — функция Грина полукруга $C^+(0,R_1)$; $R_1>R$, L_{R_1} — граница $C^+(0,R_1)$; n — внутренняя нормаль на границе. Если в написанном равенстве взять $z=Re^{i\theta}$, а затем умножить его на $\sin\theta$ и проинтегрировать от нуля до π, то получим формулу Карлемана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Неравенства (3), (4) — это утверждение предложения I. Неравенство (5) следует из формулы Карлемана, которую можно записать в виде

$$\frac{1}{R^2}\delta_2(R)=\frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}u(Re^{i\theta})\sin\theta\,d\theta. \tag{14}$$

Достаточность. Из (6), (8), (9) и предложения 3 следует, что функцию $u(z)$ можно представить в виде

$$u(z)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{|t-z|^2}-\frac{1}{t^2}\right]u(t)\,dt+$$

$$+\iint_{Z_+}\left[\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right|+2\frac{y}{|\zeta|}\right]d\beta(\zeta)+\operatorname{Im}Q(z)=$$

$$=u_1(z)+u_2(z)+\operatorname{Im}Q(z)=u_3(z)+\operatorname{Im}Q(z),$$

где $Q(z)$ — полином с вещественными коэффициентами, $\deg Q\leqslant 2$. Из (8) интегрированием по частям получаем

$$|u_1(z)|<\varepsilon\frac{1}{\sin^3\theta}r^2,\ z=re^{i\theta},\ |u_4(z)|<\varepsilon r^2, \tag{15}$$

где $u_4(z)$ — часть интеграла, определяющего $u_1(z)$, распространенного на множество, где выполняется неравенство $|t-r|\geqslant\alpha r$, $\alpha\in(0,1)$, $u_1(z)=u_4(z)+u_5(z)$. Для оценки $u_5(z)$ заметим, что при $\alpha\leqslant 0{,}25$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ ядро $\frac{1}{|t-z|^2}-\frac{1}{t^2}$ положительно. Тогда, используя (7), получим

$$u_5(z)\leqslant C\frac{y}{\pi}\int_{|t-r|\leqslant\alpha r}\left[\frac{1}{|t-z|^2}-\frac{1}{t^2}\right]V(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant CV(r)\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{|t-z|^2}=CV(r).$$

Откуда следует, что в полуплоскости $\operatorname{Im}z>9$ справедлива оценка $u_1(z)<\varepsilon r^2$. Кроме того, из неравенства (9) и предложения 4 следует, что выполняются неравенства $u_2(z)<\varepsilon r^2$, $u_2(z)>-\varepsilon r^2$ **(16)** вне множества кругов линейной плотности ноль. Тем самым для $u_3(z)$ справедлива оценка $u_3(z)<\varepsilon r^2$ (17).
Из оценок (15), (16), (6) следует, что $Q(z)=c_1z+c_0$.
Далее

$$u_3(ir)+c_1r\leqslant\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{2}\max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi}\frac{1}{\sin\varphi}\ln\frac{r^2-2rt\sin\varphi+t^2}{r^2+2rt\sin\varphi+t^2}+2\frac{r}{t}\right]d\beta(t)-$$

$$-\frac{r^3}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{a(t)}{t^2(t^2+r^2)}dt+c_1r=\int_0^{\infty}\left[2\frac{r}{t}-\frac{2rt}{r^2+t^2}\right]d\beta(t)-$$

$$-\frac{r^3}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{a(t)}{t^2(t^2+r^2)}dt+c_1r=16r^3\int_0^{\infty}\frac{t\delta_2(t)}{(t^2+r^2)^3}dt.$$

Теперь из (5) следует, что $u_3(ir) + c_1 r < C\,V(r)$. Так как $u_3(\pm r) < CV(r)$, то из неравенства (17) по теореме Фрагмена — Линделефа следует, что $u_3(z) + c_1 y < CV(r)$ и, значит, $u(z) < CV(r)$.

Доказательство теоремы 2. Необходимость следует из предложения 2.

Достаточность. Из теоремы 1 следует, что $\rho(r)$ — формальный порядок функции $u(z)$. Из соотношений (13), (14) следует, что $\rho(r)$ — полуформальный порядок функции $u(z)$.

Теперь мы легко докажем следующую тауберову теорему.

Теорема 3. *Пусть функция* $\omega(s)$ *такова, что выполняются неравенства* $s\,\omega'(s) \leqslant C$ (18),

$$\int_1^{\infty} \frac{|\omega'(t)|}{t}\,dt < \infty, \tag{19}$$

$$\left|\int_0^{\infty} t\omega(t)\,dt\right| \leqslant CS^2. \tag{20}$$

Тогда

$$|\omega(S)| \leqslant C, \tag{21}$$

$$\int_0^{s} t\,|\omega'(t)|\,dt \leqslant Cs. \tag{22}$$

Доказательство. Обозначим

$$u(z) = \frac{y}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2}\right]\omega'(t)\,dt. \tag{23}$$

Из неравенств (18), (19), как показано при доказательстве теоремы 1, следует, что $u(z) \leqslant Cr$. Тогда для $u(z)$ выполняются все условия второй части теоремы 2 с $\rho(r) = 1$ и, следовательно, $u(z)$ имеет полуформальный порядок единица. Тогда неравенства (10), (12) совпадают с неравенствами (21), (22).

В заключение остановимся на вопросе о принадлежности субгармонической функции классу A. Так называется класс субгармонических функций, для которых выполняется неравенство $\beta_1(t) \leqslant C$. Этот класс привлекал внимание многих математиков. Ему посвящена гл. 5 книги [2], где приведена и библиография. Более полную библиографию можно найти во втором американском издании этой книги, вышедшем в 1980 г. Для субгармонических во всей плоскости функций конечной степени σ (т. е. формального, а значит, и полуформального порядка единица) найдено простое необходимое и достаточное условие принадлежности классу A: $\alpha_1(t) \leqslant C$ (24) [2, гл. 5, теорема 2]. Не так обстоит дело с функциями субгармоническими в полуплоскости и формального порядка единица. Из формулы Карлемана следует, что более слабое, чем (24), условие $\alpha_2(t) \leqslant Ct^2$ является достаточным для того, чтобы субгармоническая функция формального порядка единица принадлежала классу A. Однако это условие не является необходимым, как показывает пример

$$u(z) = -2\,\mathrm{Im}\,\frac{z^2}{z+1}\ln(-z), \quad -\pi \leqslant \arg(-z) \leqslant 0.$$

И, вообще, в терминах функции $u(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ нельзя дать критерия принадлежности функции $u(z)$ формального порядка единица классу A, так как функции $u(z)$ и

$$u_1(z) = u(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left|\frac{z-in}{z+in}\right| + 2\frac{y}{n}\right]$$

совпадают на вещественной оси, имеют формальный порядок единица (функция $u_1(z)$ даже имеет вполне регулярный рост в верхней полуплоскости [3]), причем функция $u(z)$ принадлежит классу A, а функция $u_1(z)$ не принадлежит. Для функций полуформального порядка единица критерий принадлежности классу A такой же, как и для функций субгармонических во всей плоскости.

Теорема 4. *Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет условию A и имеет полуформальный порядок единица. Для того чтобы функция $u(z)$ принадлежала классу A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из четырех эквивалентных условий:*

$$\alpha_2(t) \leqslant Ct^2, \tag{25}$$

$$|\alpha_2(t)| \leqslant Ct^2, \ \alpha_1(t) \leqslant C, \ |\alpha_1(t)| \leqslant C. \tag{26}$$

Достаточность. Из каждого из написанных неравенств следует (25). Применяя формулу Карлемана, получаем, что $u(z)$ из класса A. Это доказательство приведено в [2].

Необходимость. Пусть $u \in A$. Тогда $0 \leqslant \beta_1(t) \leqslant C$. Из теоремы 2 следует $|\beta_1(t) - \alpha_1(t)| \leqslant C$. Отсюда следует справедливость (26).

Список литературы: 1. *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. М., 1941. 206 с. 2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 3. *Говоров Н. В.* Об индикаторе функций целого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости // ДАН СССР. 1967, 172, № 4. С. 763—766. 4. *Гришин А. Ф.* О регулярности роста субгармонических функций. III // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1968. Вып. 7. С. 59—84. 5. ITÖ JUN-ITI Subharmonic functions in half-plane // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. 3. P. 479—499.

Поступила в редколлегию 27.01.88