УДК 517.5

Ю. П. ГИНЗБУРГ, Л. М. ЗЕМСКОВ

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Определенная на некотором числовом множестве функция, значениями которой являются линейные ограниченные операторы в H, именуется в дальнейшем оператор-функцией (о.-ф.).

Если о.-ф. $X(\zeta)$ голоморфна при $|\zeta|<1$ и

$$\sup_{0\leqslant\rho<1}\int_0^{2\pi}\ln^+\|X(\rho e^{i\varphi})\|\,d\varphi<\infty,$$

то будем писать $X\in A$. Если $X^{\pm 1}\in A$, то пишем $X\in(A:A)$; если же $\|X(\zeta)\|\leqslant 1$ $(|\zeta|<1)$ и $X^{-1}\in A$, то $X\in(C:A)$ (известно, что из $\dim H<<\infty$, $X\in A$, $\det X(\zeta)\neq 0$ при $|\zeta|<1$ следует $X^{-1}\in A$).

В настоящей статье доказана представимость о.-ф. класса $(A:A)$ (о.-ф. ограниченного вида) мультипликативными интегралами В. П. Потапова [1] и исследована единственность таких представлений.

§ 1. Мультипликативные представления о.-ф. класса $(A:A)$.

1. Мы будем пользоваться следующими двумя предложениями.

Теорема 1.1. [2]. *Для того чтобы $X\in A$, необходима и достаточна справедливость представления $X=y^{-1}Y$, в котором Y и y — голоморфные о.-ф. и скалярнозначная функция, $\|Y(\zeta)\|\leqslant 1$, $0<|y(\zeta)|\leqslant\leqslant 1$ при $|\zeta|<1$.*

Теорема 1.2 [1, 3]. *Для принадлежности о.-ф. X классу $(C: A)$ необходима и достаточна справедливость представления*

$$X(\zeta)=V\overset{\curvearrowleft}{\int_0^{l}}\exp\{k(\vartheta(t),\zeta)\,dE(t)\},\tag{1.1}$$

в котором $k(\vartheta,\zeta)=(\zeta+e^{i\vartheta})(\zeta-e^{i\vartheta})^{-1}$, V — унитарный оператор, ϑ — каноническая на $[0, l]$ скалярная функция (т. е. неубывающая,

$\vartheta([0,\ l[) \subset [0,\ 2\pi[,\quad \vartheta(t-0) = \vartheta(t),\quad \vartheta(0) = \vartheta(+0)$ *при* $\vartheta(l) < 2\pi$, $\vartheta(0) = 0$ *при* $\vartheta(l) = 2\pi$), E — *эрмитово-неубывающая о.-ф., непрерывная и ограниченной вариации на* $[0,\ l]$[1].

Теорема 1.2. обобщает следующее известное предложение: скалярная функция $x(\zeta)$ голоморфна и удовлетворяет неравенству $0 < |x(\zeta)| \leqslant \leqslant 1$ при $|\zeta| < 1$ в том и только том случае, если

$$x(\zeta) = e^{i\alpha} \exp\{\int_0^{2\pi} k(t,\ \zeta)\, dr(t)\}, \tag{1.2}$$

где $\operatorname{Im}\alpha = 0$, r — неубывающая функция на $[0,\ 2\pi]$.

Ниже будет доказана

Лемма 1.1. *Для X и x, имеющих соответственно представления (1.1) и (1.2), найдутся такие $a > 0$, каноническая на $[0,\ a]$ функция φ, эрмитово-неубывающая о.-ф. ограниченной вариации $\hat{E}$ и неубывающая скалярная функция $\hat{r}$, что*

$$X(\zeta) = V \overset{\curvearrowleft}{\int_0^a} \exp\{k(\varphi(t),\ \zeta)\, d\hat{E}(t)\},$$

$$x(\zeta) = e^{i\alpha} \exp\{\int_0^a k(\varphi(t),\ \zeta)\, d\hat{r}(t)\}.$$

Из этого утверждения и теорем 1.1 и 1.2 следует анонсированная в заметке [4]

Теорема 1.3. *Для принадлежности о.-ф. X классу $(A\colon A)$ необходима и достаточна справедливость представления (1.1), в котором V — унитарный оператор, ϑ — каноническая на $[0,\ l]$ функция, E — эрмитовозначная непрерывная на $[0,\ l]$ о.-ф. ограниченной вариации.*

Для того чтобы убедиться в справедливости леммы 1.1, воспользуемся несколькими вспомогательными утверждениями. Начнем со следующего легко доказываемого предложения.

Лемма 1.2. *Пусть $f_j(t)$ $(a_j \leqslant t \leqslant b_j,\ \ j = 1,\ 2)$ — неубывающие функции. Если совпадают их множества значений, а также совпадают множества значений, принимаемых ими на интервалах постоянства, то существует такая возрастающая функция r, что $r([a_1,\ b_1]) = [a_2,\ b_2]$ и $f_1(t) = f_2(r(t))$ $(a_1 \leqslant t \leqslant b_1)$.*

Лемма 1.3. *Пусть f — скалярная ограниченная на $[0,\ l]$ функция, имеющая не более счетного множества точек разрыва, E — непрерывная о.-ф. ограниченной вариации на $[0,\ l]$, $\{]\alpha_j,\ \beta_j[\}_{j=\overline{1,s}}$ $(s \leqslant \infty)$ — некоторая система интервалов постоянства о.-ф. E. Тогда*

$$\overset{\curvearrowleft}{\int_0^t} \exp\{f(\tau)\, dE(\tau)\} = \overset{\curvearrowleft}{\int_0^{\psi(t)}} \exp\{f(r(\tau))\, dE(r(\tau))\}, \tag{1.3}$$

[1] Вариация оператор-функции, ее непрерывность и т. п. здесь и ниже понимаются в смысле равномерной операторной метрики.

где $\psi(t)=\int\limits_0^t \chi_G(\tau)\,d\tau$ (χ_G—*индикатор множества* $G:=[0,l]\setminus\bigcup\,]\alpha_j,\beta_j[$), r — *функция, обратная для* ψ *на* G.

Доказательство. Очевидно, мультипликативные интегралы (1.3) существуют. Построим последовательности разбиений отрезков $[0, t]$ и $[0, \psi(t)]$:

$$0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_n=t,\ \max_j(\tau_j-\tau_{j-1})\to 0,$$

$$0=\xi_0\leqslant\xi_1\leqslant\cdots\leqslant\xi_n=\psi(t),\ \xi_j=\psi(\tau_j),\ \max_j(\xi_j-\xi_{j-1})\to 0.$$

Если $[\tau_{j-1},\tau_j]\cap G=\varnothing$, то в качестве $\tilde\tau_j$ возьмем любую точку отрезка $[\tau_{j-1},\tau_j]$; если $[\tau_{j-1},\tau_j]\cap G\neq\varnothing$, то $\tilde\tau_j$ — любая точка этого пересечения. Положим $\tilde\xi_j=\psi(\tilde\tau_j)$. Справедливость утверждения леммы вытекает из равенства

$$\overset{n}{\overset{\curvearrowleft}{\prod_{=1}}}\exp\{f(\tilde\tau_j)(E(\tau_j)-E(\tau_{j-1}))\}=\overset{n}{\overset{\curvearrowleft}{\prod_{j=1}}}\exp\{f(r(\tilde\xi_j))[E(r(\xi_j))-E(r(\xi_{j-1}))]\}.$$

Лемма 1.4. *Пусть*

(I) ϑ — *каноническая на* $[0, l]$ *функция,* f *непрерывна на* $[0, 2\pi]$, *о.-ф.* E *имеет ограниченную вариацию, эрмитовозначна и непрерывна на* $[0, l]$.

Тогда существуют такие $\hat l\geqslant l$, *непрерывная неубывающая на* $[0,\hat l]$ *функция* $\hat\vartheta$ ($\hat\vartheta(0)=0$, $\hat\vartheta(\hat l)=2\pi$), *о.-ф.* $\hat E$, *имеющая ограниченную вариацию, эрмитовозначная и непрерывная на* $[0, \hat l]$, *что*

$$\overset{\curvearrowleft}{\int_0^l}\exp\{f(\vartheta(t))\,dE(t)\}=\overset{\curvearrowleft}{\int_0^{\hat l}}\exp\{f(\hat\vartheta(t))\,d\hat E(t)\}.$$

При этом $\hat l$ и $\hat\vartheta$ *строятся по* l и ϑ.

Доказательство. Будем считать, что $\vartheta(0)=0$, и условимся писать $\vartheta(l+0)=2\pi$. Пусть $\vartheta=\vartheta_1+\vartheta_2$, где ϑ_1 — непрерывная на $[0, l]$ функция ($\vartheta_1(0)=0$), ϑ_2 — функция скачков, $\vartheta_2(l+0)=2\pi-\vartheta_1(l)$. Пусть Q — множество значений функции $r(t):=t+\vartheta_2(t)$ на $[0, l]$. Присоединяя к Q множество $\{\rho\,|\,\rho=r(t+0),\ 0\leqslant t\leqslant l\}$, получим компакт $\overline{Q}\subset[0,\hat l]$ ($\hat l=r(l+0)$).

Пусть ψ — функция, обратная на $[0, l]$ функции r; $\overline{\psi}$ определена на Q. Очевидно,

$$\psi(t)=\int\limits_0^t\chi_Q(\tau)\,d\tau.$$

Распространим этой формулой ψ на $[0,\hat l]$. Положим $\hat\vartheta(\tau)=\vartheta(\psi(\tau))$ ($\tau\in Q$), $\hat\vartheta(\tau)=(\beta-\alpha)^{-1}[(\tau-\alpha)\vartheta(\psi(\alpha)+0)+(\beta-\tau)\vartheta(\psi(\alpha))]$, если $\tau\in\,]\alpha,\beta]$, где $]\alpha,\beta[$ — интервал, смежный компакту $\overline{Q}$, $\hat E(\tau)=E(\varphi(\tau))$

($\tau \in [0, \hat{l}]$). Так как $\hat{\vartheta}(r(t)) = \vartheta(t)$, $\tilde{E}(r(t)) = E(t)$ $(t \in [0, l])$, то, применяя лемму 1.3, завершим доказательство.

Лемма 1.5. *Пусть функции* ϑ_j, f_j, E_j $(j=1, 2)$ *удовлетворяют на* $[0, l_j]$ *условиям* (*I*). *Тогда существуют такие* $\hat{l}$, *непрерывная неубывающая на* $[0, \hat{l}]$ *функция* $\hat{\vartheta}$ $(\hat{\vartheta}(0) = 0,\ \hat{\vartheta}(\hat{l}) = 2\pi)$, *эрмитовозначные непрерывные на* $[0, \hat{l}]$ *о.-ф.* $\hat{E}_j$ $(j = 1, 2)$ *ограниченной вариации, что*

$$\overset{l_j}{\underset{0}{\overset{\curvearrowleft}{\int}}} \exp\{f_j(\vartheta_j(t))\, dE_j(t)\} = \overset{\hat{l}}{\underset{0}{\overset{\curvearrowleft}{\int}}} \exp\{f_j(\hat{\vartheta}(t))\, d\hat{E}_j(t)\}.$$

При этом $\hat{l}$ *и* $\hat{\vartheta}$ *строятся по* $l_1, l_2, \vartheta_1, \vartheta_2$.

Доказательство. На основании леммы 1.4 можно считать, что функции ϑ_j непрерывны, $\vartheta_j(0) = 0$, $\vartheta_j(l_j) = 2\pi$. Пусть A_j — множество значений ϑ_j на интервалах постоянства, $(A_1 \cup A_2) \setminus A_j = \{\rho_1^{(j)}, \rho_2^{(j)}, \ldots\}$. Если $\vartheta_j(\alpha_k^{(j)}) = \rho_k^{(j)}$, то рассмотрим функцию $r^{(j)}(t) = t + \sum\limits_k 2^{-k}\chi_k^{(j)}(t)$, где $\chi_k^{(j)}$ — индикатор промежутка $]\alpha_k^{(j)}, l_j]$ на $[0, l_j]$.

Пусть $\psi^{(j)}$ — функция, обратная функции $r^{(j)}$ на $[0, l_j]$, $\hat{l}_j = r^{(j)}(l_j)$. Продолжим $\psi^{(j)}$ на $[0, \hat{l}_j]$ с сохранением монотонности (ср. доказательство леммы 1.4). Положим $\hat{\vartheta}_j(t) = \vartheta_j(\psi)^{(j)}(t))$, $\hat{E}_j(t) = E_j(\psi^{(j)}(t))$; при этом $\hat{\vartheta}_j(r^{(j)}(t)) = \vartheta_j(t)$, $\hat{E}_j(r^{(j)}(t)) = E_j(t)$, $\hat{\vartheta}_j(0) = 0$, $\hat{\vartheta}_j(\hat{l}_j) = 2\pi$. Очевидно, $\hat{\vartheta}_j([0, \hat{l}_j]) = [0, 2\pi]$, а множество значений, принимаемых функцией $\hat{\vartheta}_j$ на интервалах постоянства, есть $A_1 \cup A_2$. На основании леммы 1.2 существует такая возрастающая на $[0, \hat{l}_1]$ функция g, что $g([0, \hat{l}_1]) = [0, \hat{l}_2]$, $\hat{\vartheta}_1(t) = \hat{\vartheta}_2(g(t))$ $(0 \leqslant t \leqslant \hat{l}_1)$. Так как на основании леммы 1.3

$$\overset{l_j}{\underset{0}{\overset{\curvearrowleft}{\int}}} \exp\{f_j(\vartheta_j(t))\, dE_j(t)\} = \overset{\hat{l}_j}{\underset{0}{\overset{\curvearrowleft}{\int}}} \exp\{f_j(\hat{\vartheta}_j(t))\, d\hat{E}_j(t)\} \quad (j = 1, 2), \quad (1.4)$$

то

$$\overset{l_2}{\underset{0}{\overset{\curvearrowleft}{\int}}} \exp\{f_2(\vartheta_2(t))\, dE_2(t)\} = \overset{\hat{l}_1}{\underset{0}{\overset{\curvearrowleft}{\int}}} \exp\{f_2(\hat{\vartheta}_1(t))\, d\hat{E}_2(g(t))\}.$$

Отсюда и из равенства (1.4) (при $j = 1$) вытекает справедливость утверждения леммы.

Из леммы 1.5 непосредственно следует лемма 1.1, а, значит, теорема 1.3 доказана.

2. Пусть функция $f(t, \zeta)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ для любого ζ $(|\zeta| \neq 1)$ ограничена и имеет на $[a, b]$ не более счетного множества точек разрыва, $E(t)$ — непрерывная о.-ф., эрмитовозначная и ограниченной вариации на $[a, b]$.

II

Интервал $]\alpha, \beta[$ $(\subset [a, b])$ назовем нейтральным относительно f и E, если

$$\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{\alpha}^{\beta}} \exp\{f(t, \zeta)\, dE(t)\} = I \quad (|\zeta| \neq 1)$$

и если $]\alpha, \beta[$ не содержится ни в каком другом интервале, обладающем этим свойством.

Теорема 1.4. *Пусть f и E удовлетворяют (II),*

$$F(\zeta) = \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{a}^{b}} \exp\{f(t, \zeta)\, dE(t)\} \quad (|\zeta| \neq 1),$$

$\{]\alpha_j, \beta_j[\}_{j=\overline{1, s}}$ $(s \leqslant \infty)$ — *совокупность попарно непересекающихся интервалов, нейтральных относительно f и E, таких, что $G := [a, b] \setminus \bigcup\limits_j]\alpha_j, \beta_j[$ не содержит других нейтральных интервалов,*

$$\psi(t) = \int\limits_a^t \chi_G(\tau)\, d\tau,$$

r — функция, обратная ψ на G. Тогда

$$F(\zeta) = \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{0}^{\psi(b)}} \exp\{\hat{f}(t, \zeta)\, d\hat{E}(t)\},$$

где $\hat{f}(t, \zeta) = f(\tau(t), \xi)$; $\hat{E}$ — некоторая эрмитовозначная непрерывная, о.-ф. ограниченной вариации на $[0, \psi(b)]$, причем на $[0, \psi(b)]$ нет интервалов, нейтральных относительно $\hat{f}$ и $\hat{E}$.

Доказательство. Будем считать, что E удовлетворяет условию Липшица, перейдя в случае необходимости к новой переменной $\tau = t + \operatorname*{Var}\limits_{[a, t]} E$. Для упрощения записей при $s < \infty$ положим $]\alpha_s, \beta_s[=]\alpha_{s+1}, \beta_{s+1}[= \cdots$. Пусть $M_0(t) = E'(t)$ (слабая производная), $M_j(t) = M_{j-1}(t)$ при $t \in [a, b] \setminus]\alpha_j, \beta_j[$, $M_j(t) = 0$ при $t \in]\alpha_j, \beta_j[$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $M_\infty(t) = \lim\limits_{j \to \infty} M_j(t)$.

Положим

$$E_j(t) = E(a) + \int\limits_a^t M_j(\tau)\, d\tau \quad (j = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Ясно, что $E_\infty(t) = \lim\limits_{j \to \infty} E_j(t)$. Непосредственно проверяется, что при $j < \infty$, $t_1, t_2 \in G$, $t_1 < t_2$

$$\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{t_1}^{t_2}} \exp\{f(t, \zeta)\, dE(t)\} = \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{t_1}^{t_2}} \exp\{f(t, \zeta)\, dE_j(t)\}. \tag{1.5}$$

Воспользовавшись мультипликативным аналогом второй теоремы Хелли, установим справедливость (1.5) и при $j=\infty$.

О.-ф. E_∞ постоянна на интервалах $]\alpha_j, \beta_j[$; поэтому на основании леммы 1.3 получим из (1.5) (при $j=\infty$)

$$\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{t_1}^{t_2}} \exp\{f(t, \zeta)\, dE(t)\} = \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{\psi(t_1)}^{\psi(t_2)}} \exp\{\hat{f}(t, \zeta)\, d\hat{E}(t)\}, \tag{1.6}$$

где $\hat{f}(t, \zeta) = f(r(t), \zeta)$, $\hat{E}(t) = E_\infty(r(t))$.

Докажем, что на $[0, \psi(b)]$ не существует интервалов, нейтральных для $\hat{f}$ и $\hat{E}$. Предположим, что для некоторого $]p, q[\subset [0, \psi(b)]$

$$\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{p}^{q}} \exp\{\hat{f}(t, \zeta)\, d\hat{E}(t)\} = I \quad (|\zeta| \neq 1).$$

Тогда из (1.6) получим

$$\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{r(p)}^{r(q)}} \exp\{f(t, \zeta)\, dE(t)\} = I \quad (|\zeta| \neq 1),$$

а это невозможно в силу условия, наложенного на G, и того, что функция r не принимает значений из $]\alpha_j, \beta_j[$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Теорема доказана.

§ 2. О единственности мультипликативных представлений оператор-функций класса $(A:A)$. 1. Пусть ϑ — каноническая на $[0, l]$ функция. Назовем $t_0 \in]0, l[$ точкой роста ϑ, если всякая окрестность $]t_0-\delta, t_0+\delta[$ содержит такие $t_1 < t_0$ и $t_2 > t_0$, что $\vartheta(t_1) < \vartheta(t_0) < \vartheta(t_2)$. Естественно определяются точки роста слева (справа) функции ϑ. Для $t=0$ $(t=l)$ понятия точки роста и точки роста справа (слева) совпадают по определению.

Лемма 2.1. *Пусть о.-ф.* $X(\zeta)(|\zeta|) \neq 1)$ *имеет вид* (1.1), *где*

(III) V — *унитарный оператор*, ϑ — *каноническая на* $[0, l]$ *функция*, E — *эрмитовозначная непрерывная о.-ф. ограниченной вариации на* $[0, l]$, $E(0)=0$.

Если t_0 — *точка роста функции* ϑ, $\vartheta(t_0) < 2\pi$, *то*

$$\tau_X(\varphi_0) := \lim_{0<\rho\to 1} |1-\rho| \ln^+ \| X(\rho e^{i\varphi_0})\| = 0, \quad \varphi_0 = \vartheta(t_0). \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть

$$X(t_0, \zeta) := \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{0}^{t_0}} \exp\{k(\vartheta(t), \zeta)\, dE(t)\}. \tag{2.2}$$

Если $t_0 > 0$, то $\vartheta(t_0-\delta) < \vartheta(t_0)$ для любого $\delta \in]0, t_0[$ и

$$X(t_0, \zeta) = \Big(\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0}} \exp\{k(\vartheta(t), \zeta)\, dE(t)\}\Big) x(t_0-\delta, \zeta).$$

Отсюда вблизи точки $e^{i\vartheta(t_0)}$

$$\| X(t_0,\ \rho e^{i\vartheta(t_0)}) \| \leqslant \mu_\delta \exp\left\{\left|\frac{1+\rho}{1-\rho}\right| \operatorname*{Var}_{[t_0-\delta,\ t_0]} E\right\},$$

где $\mu_\delta (>0)$ зависит, вообще говоря, от δ. Так как $\operatorname*{Var}_{[t_0-\delta,\ t_0]} E \to 0$ при $\delta \to 0$, то

$$\lim_{0<\rho\to 1} |1-\rho| \ln^+ \| X(t_0,\ \rho e^{i\vartheta(t_0)}) \| = 0. \tag{2.1'}$$

Для $t_0 = 0$ справедливость этого равенства тривиальна.

Аналогично, для

$$Y(t_0,\ \zeta) := \overset{\curvearrowleft}{\int_{t_0}^{l}} \exp\{k(\vartheta(t),\ \zeta)\, dE(t)\} \tag{2.3}$$

установим, что

$$\lim_{0<\rho\to 1} |1-\rho| \ln^+ \| Y(t_0,\ \rho e^{i\vartheta(t_0)}) \| = 0. \tag{2.1''}$$

Воспользовавшись равенством $X(\zeta) = Y(t_0,\ \zeta)\, X(t_0,\ \zeta)$, завершим доказательство.

Замечание. В ходе проведенного доказательства установлено, что если t_0— точка роста слева (справа) функции ϑ, то справедливо (2.1) (соответственно (2.1″)).

Следующее утверждение легко получается с помощью стандартной оценки мультипликативного интеграла.

Лемма 2.2. *Пусть* $e^{i\vartheta(t_0)} \neq 1$ *и о.-ф.* $X(t_0\zeta)$ $(Y(t_0\zeta))$ *имеет представление (2.2) (представление (2.3)). Тогда существуют такие* $B>0$ *и проколотая окрестность* U *точки* $e^{i\vartheta(t_0)}$, *что для* $\zeta = \rho e^{i\varphi} \in U$, $\vartheta(t_0) \leqslant \varphi < 2\pi$ $(0 < \varphi \leqslant \vartheta(t_0))$ $\| X(t_0,\ \zeta) \| \leqslant \exp\{B\,|k \times (\vartheta(t_0),\ \zeta)|\}$ **(2.4′)**, $(\| Y(t_0,\ \zeta) \| \leqslant \exp\{B\,|k(\vartheta(t_0),\ \zeta)|\})$ **(2.4″)**. *Если* $e^{i\vartheta(t_0)} = 1$, *то (2.4′) справедливо в* U.

Существенную роль в этом параграфе будет играть следующее утверждение типа Фрагмена—Линделефа (ср. [5], гл. I, § 14).

Лемма 2.3. *Пусть о.-ф.* F *голоморфна в некоторой проколотой окрестности* U *точки* ζ_0 *и 1) для постоянных* $M>0$, $N>0$ *и любого* $\zeta \in U$

$$\| F(\zeta) \| \leqslant M \exp\left\{N \left|\frac{\zeta+\zeta_0}{\zeta-\zeta_0}\right|\right\},$$

2) $\sup \| F(\zeta) \| < \infty$ *при* $|\zeta| = |\zeta_0|$, $\zeta \in U$,

3) $\lim\limits_{0<\rho\to|\zeta_0|} |\rho - |\zeta_0|| \ln^+ \| F(\rho\zeta_0) \| = 0.$

Тогда F *голоморфна в* ζ_0.

В дальнейшем представление (1.1) будет рассматриваться в следующем предположении (см. теорему 1.4):

(IV) выполняются условия (III) и при этом на $[0,\ l]$ нет интервалов, нейтральных для $f(t,\ \zeta) := k(\vartheta(t),\ \zeta)$ и $E(t)$.

Теорема 2.1. *Пусть X имеет удовлетворяющее (IV) представление (1.1). Тогда* $t_0 \in [0, l]$ $(\vartheta(t_0) < 2\pi)$ *является точкой роста функции* ϑ *в том и только в том случае, если* $\tau_X(\vartheta(t_0)) = 0$.

Доказательство. Если t_0 — точка роста функции ϑ, то согласно лемме 2.1 равенство (2.1) справедливо.

Предположим теперь, что справедливо (2.1), а $t_0 \in [\alpha, \beta]$, где $\vartheta(]\alpha, \beta[) = \vartheta(t_0)$. о.-ф.

$$Z(\zeta) := \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\overset{\curvearrowleft}{\int}}} \exp\{k(\vartheta(t_0), \zeta)\, dE(t)\}$$

голоморфна во всей расширенной плоскости, за исключением, быть может, точки $\zeta_0 = e^{i\vartheta(t_0)}$. На основании леммы 2.2 существуют такие $B > 0$ и проколотая окрестность U точки ζ_0, что $\|Z(\zeta)\| \leqslant \exp \times \times \{M\,|k(\vartheta(t_0), \zeta)|\}$ для $\zeta \in U$. Очевидно, $\|Z(\zeta)\| = 1$ при $\zeta \neq \zeta_0$, $|\zeta| = 1$. Так как α — точка роста слева, β — точка роста справа для ϑ и $Z(\zeta) = Y^{-1}(\beta, \zeta)\, X(\zeta)\, X^{-1}(\alpha, \zeta)$, то вследствие (2.1) и замечания к лемме 2.1 $\tau_Z[\vartheta(t_0)] = 0$. На основании леммы 2.3 о.-ф. Z голоморфна в ζ_0 и, следовательно, является постоянной. Так как $Z(-\zeta_0) = I$, то $Z(\zeta) \equiv I$, что противоречит (IV). Теорема доказана.

Лемма 2.4. *Пусть о.-ф.* $X(t, \zeta)(0 \leqslant t \leqslant l)$ *имеет представление* (2.2), *где* ϑ *и* E *удовлетворяют условию* (IV). *Если* $X(\zeta) = X(l, \zeta)$ *голоморфна на дуге* $\exp\{i]a, b[\}(0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi)$, *то для любого* $t_0 \in [0, l]$ *о.-ф.* $X(t_0, \zeta)$ *голоморфна и унитарна на этой дуге.*

Доказательство. Утверждение леммы нетривиально только при $a < \vartheta(t_0) < b$. В этом случае, очевидно, справедливо (2.1), откуда и из теоремы 2.1 следует, что t_0 — точка роста функции ϑ, а, значит, на основании той же теоремы,

$$\lim_{0<\rho\to 1} |1-\rho|\ \ln^+ \|X(t_0, \rho e^{i\vartheta(t_0)})\| = 0. \tag{2.5}$$

Очевидно, функция $X(t_0, \zeta) = Y^{-1}(t_0, \zeta)\, X(l, \zeta)$ (см. (2.3)) голоморфна и принимает унитарные значения на дугах $\exp\{i\,]\vartheta(t_0), b[\}$ и $\exp \times \times \{i\,]a, \vartheta(t_0)[\}$. Из леммы 2.2 следует, что вблизи точки $e^{i\vartheta(t_0)}$ при некотором $B > 0$ справедливо (2.4′). Воспользовавшись (2.5) и леммой 2.3, завершаем доказательство.

Теорема 2.2. *Пусть о.-ф. X обладает представлением (1.1), удовлетворяющим условию (IV). Для голоморфности X на открытой дуге Δ единичной окружности необходимо и достаточно, чтобы* $\exp\{iv([0, l])\} \cap \Delta = \varnothing$.

Доказательство необходимости проведем сначала для случая, когда $\Delta = \exp\{i\,]a, b[\}$ $(0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi$. Допустим, что $a < \vartheta(t_0) < b$ для некоторой точки $t_0 \in [0, l]$. Поскольку ϑ непрерывна слева, существует такой промежуток $]\beta, t_0] \subset [0, l]$, что $\vartheta(]\beta, t_0]) \subset]a, b[$. Рассмотрим о.-ф.

$$X(t, t_0; \zeta) := \overset{t_0}{\underset{t}{\overset{\curvearrowleft}{\int}}} \exp\{k(\vartheta(\tau), \zeta)\, dE(\tau)\} \quad (\beta < t \leqslant t_0),$$

которая, очевидно, голоморфна вне дуги $\exp\{i[\vartheta(t), \vartheta(t_0)]\}$. С другой стороны, так как $X(t, t_0; \zeta) = X(t_0, \zeta) X^{-1}(t, \zeta)$, а $X(t_0, \zeta) X^{-1}(t, \zeta)$ на основании леммы 2.2 голоморфны на $\exp\{i\,]a, b[\}$, то $X(t, t_0; \zeta)$ голоморфна и на $\exp\{i[\vartheta(t), \vartheta(t_0)]\}$. Таким образом, $X(t, t_0; \zeta)$ не зависит от ζ. Так как почти всюду на $]\beta, t_0]$ $X^{-1}(t, t_0; \zeta) X_t'(t, t_0; \zeta) = -k(\vartheta(t), \zeta) E'(t)$, то E постоянна на $]\beta, t_0[$ (как и при доказательстве теоремы 1.4, мы, не ограничивая общности, считаем, что E удовлетворяет условию Липшица). Таким образом, $]\beta, t_0[$ входит в нейтральный относительно f и E интервал, что противоречит (IV).

Пусть теперь $\Delta = (\exp\{i]b, 2\pi[\}) \cup \exp\{i[0, a[\}$ $(0 < a \leqslant b < 2\pi)$. Тогда $(\exp\{i\vartheta([0, l])\}) \cap \exp\{i]0, a[\} = \varnothing$, $(\exp\{i\vartheta([0, l])\}) \cap \exp\{i]b, 2\pi[\} = \varnothing$. Если $\Delta \cap \exp\{i\vartheta([0, l])\} \neq \varnothing$, то отсюда и из каноничности функции ϑ следует существование такого $t_1 \neq 0$, что $\vartheta(t_1) = 0$. Таким образом, t_1 не является точкой роста функции ϑ. С другой стороны, так как X голоморфна при $\zeta = 1$, то $\tau_X[\vartheta(t_1)] = 0$, что противоречит теореме 2.1.

Достаточность утверждения теоремы очевидна.

При доказательстве теорем 2.3 и 2.5 будет использовано следующее предложение [6].

Лемма 2.5. *Пусть о.-ф. X обладает двумя представлениями вида (1.1) с удовлетворяющими условиям (III) параметрами V_1, l, ϑ, E_1 и V_2, l, ϑ, E_2 соответственно. Тогда $V_1 = V_2$ и $E_1(t_0) = E_2(t_0)$, $X_1(t_0, \zeta) = X_2(t_0, \zeta)$ (см. (2.2)) для любой точки роста t_0 функции ϑ.*

Теорема 2.3. *Пусть для $j = 1, 2$*

$$X_j(t, \zeta) = \int\limits_0^{\overset{t}{\curvearrowleft}} \exp\{k(\vartheta_j(\tau), \zeta)\, dE_j(\tau)\} \quad (0 \leqslant t \leqslant l_j, \ |\zeta| \neq 1),$$

где ϑ_j и E_j удовлетворяют условиям (IV). Тогда, если $X_2(l_2, \zeta) = UX_1(l_1, \zeta)$ $(|\zeta| < 1)$ **(2.6)**, *где U — унитарный оператор, то* (а) *существует возрастающая на* $[0, l_1]$ *функция r, такая, что $r([0, l_1]) = [0, l_2]$ и $\vartheta_1(t) = \vartheta_2(r(t))$ $(0 \leqslant t \leqslant l_1)$;* (б) *для любой точки хотя бы одностороннего роста функции ϑ_1 $E_1(t_0) = E_2(\tau(t_0))$, $X_1(t_0, \zeta) = X_2(r(t_0), \zeta)$ $(|\zeta| \neq 1)$ и, следовательно, $U = I$.*

Доказательство. Из теоремы 2.2 следует, что $\vartheta_1([0, l_1]) = \vartheta_2([0, l_2])$. Воспользовавшись теоремой 2.1, получим, что множества значений, принимаемых функциями ϑ_j $(j = 1, 2)$ на интервалах постоянства совпадают. На основании леммы 1.2 отсюда вытекает справедливость утверждения (а). После этого (2.6) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^{\overset{l_1}{\curvearrowleft}} \exp\{k(\vartheta_1(t), \zeta)\, dE_1(t)\} = U \int\limits_0^{\overset{l_1}{\curvearrowleft}} \exp\{k(\vartheta_1(t), \zeta)\, dE_2(\tau(t))\}.$$

Отсюда и из леммы 2.5 следует утверждение (б).

Из только что доказанной теоремы, теорем 1.3 и 1.4 непосредственно следует

Теорема 2.4. *Каждая о.-ф. $X \in (A : A)$ обладает представлением (1. 1), удовлетворяющим условиям (IV). В таком представлении оператор V определяется однозначно, функция ϑ определяется с точностью до непрерывной возрастающей замены переменной; при выбранной функции ϑ для каждой ее точки роста t_0 оператор $E(t_0)$ определяется также однозначно.*

2. Некоторую характеристику нейтральных интервалов дает следующее предложение.

Теорема 2.5. *Пусть о.-ф. X обладает представлением (1.1) ($V = I$), удовлетворяющим условию (III), и пусть $\{]\alpha_j, \beta_j[\}_{j=\overline{1, s}}$ ($s \leqslant \infty$) — совокупность всех интервалов постоянства функции ϑ на $]\alpha, \beta[\subset [0, l]$. Для того, чтобы*

$$\overset{\curvearrowleft}{\int_{\alpha}^{\beta}} \exp\{k(\vartheta(t), \zeta)\, dE(t)\} = I \quad (|\zeta| \neq 1), \tag{2.7}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$E(t) = E(\alpha) \ (t \in]\alpha, \beta[\setminus H_s, \ H_n = \bigcup_{j=1}^{n}]\alpha_j, \beta_j[, \ n = \overline{1, s}), \tag{2.8}$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\int_{\alpha_j}^{\beta_j}} \exp\{\lambda\, dE(t)\} = I \quad (\lambda \in \boldsymbol{C}, \ j = \overline{1, s}). \tag{2.9}$$

Доказательство. Как и выше, не ограничивая общности, будем считать, что о.-ф. E удовлетворяет условию Липшица.

Пусть справедливо (2.7). Введем в рассмотрение о.-ф. M и $\tilde{M}$. $M(t) = E'(t)$; $\tilde{M}(t) = M(t)$ при $t \in [0, l] \setminus]\alpha, \beta[$, $\tilde{M}(t) = 0$ при $t \in]\alpha, \beta[$. Очевидно,

$$X(\zeta) = \overset{\curvearrowleft}{\int_{0}^{l}} \exp\{k(\vartheta(t), \zeta)\, d\tilde{E}(t)\} \quad \left(\tilde{E}(t) = \int_0^t \tilde{M}(\tau)\, d\tau\right). \tag{2.10}$$

На основании (1.1), (2.10) и леммы 2.5 для любой точки $t \in [\alpha, \beta] \setminus H_s$

$$E(t) = \tilde{E}(t), \ X(t, \zeta) = \tilde{X}(t, \zeta) := \overset{\curvearrowleft}{\int_{0}^{t}} \exp\{k(\vartheta(\tau), \zeta)\, d\tilde{E}(\tau)\}. \tag{2.11}$$

Так как $\tilde{E}(t) = E(\alpha)$ при $t \in]\alpha, \beta[$, то справедливо (2.8). Кроме того, на основании (2.11) $X(\alpha_j, \zeta) = \tilde{X}(\alpha_j, \zeta) = X(\alpha, \zeta)$, $X(\beta_j, \zeta) = \tilde{X}(\beta_j, \zeta) = X(\alpha, \zeta)$, откуда

$$\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j}} \exp\{k(\vartheta(\alpha_j), \zeta)\, dE(t)\} = X(\beta_j, \zeta)\, X^{-1}(\alpha_j, \zeta) = I \quad (\zeta \neq e^{i\vartheta(\alpha_j)}),$$

что равносильно (2.9).

Пусть теперь выполнены условия (2.8), (2.9) и пусть $M_n(t) = M(t)$ при $t \in H_n$, $M_n(t) = 0$ при $t \in [\alpha, \beta] \setminus H_n$,

$$E_n(t) = E(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{t} M_n(\tau)\, d\tau \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{2.12}$$

Так как на основании (2.8) $M(t) = 0$ почти всюду на $[\alpha, \beta] \setminus H_s$, то $\lim M_n(t) = M(t)$ почти всюду на $[\alpha, \beta]$ и, значит, $\lim E_n(t) = E(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$. Из (2.9) и (2.12) следует

$$\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{\alpha}^{\beta}} \exp\{k(\vartheta(t), \zeta)\, dE_n(t)\} = I \quad (|\zeta| \neq 1).$$

Воспользовавшись мультипликативным аналогом теоремы Хелли, получим (2.7), что и завершает доказательство.

Замечание. Введем обозначения: $E_0(t_1, t_2) = E(t_2) - E(t_1)$,

$$E_n(t_1, t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} E_{n-1}(t_1, t)\, dE(t) \quad (n = 1, 2, \ldots; \ t_1, t_2 \in [0, l]).$$

Воспользовавшись разложением мультипликативного интеграла в ряд, легко установить, что (2.9) равносильно следующей системе равенств: $E_n(\alpha_j, \beta_j) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; \ j = \overline{1, s})$.

3. Рассмотрим класс $(A:A)^0$, состоящий из таких о.-ф. $X \in (A:A)$ что $\tau_{X^{+1}}(\varphi) = 0$ при всех $\varphi \in [0, 2\pi[$. Из теорем 1.3, 2.1 и 2.4 непосредственно вытекает справедливость следующего предложения.

Теорема 2.6. *Для принадлежности о.-ф. X классу $(A:A)^0$ необходимо и достаточно наличие представления*

$$X(\zeta) = V \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{0}^{2\pi}} \exp\{k(\varphi, \zeta)\, dS(\varphi)\}, \tag{2.13}$$

в котором V — унитарный оператор, S — эрмитовозначная непрерывная на $[0, 2\pi]$ о.-ф. ограниченной вариации, $S(0) = 0$. При этом оператор V и о.-ф. S определяются по X однозначно.

Список литературы: 1. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура F-нерастягивающих матриц-функций // Тр. Моск. мат. об-ва. 1955. 4. С. 125—236. 2. *Гинзбург Б. Ю.* О делителях и минорантах оператор-функций ограниченного вида //

Мат. исследования. 1967. **2**, № 4. С. 49—72. 3. *Гинзбург Ю. П.* Мультипликативные представления и миноранты ограниченных аналитических оператор-функций //Функцион. анализ и его прил. 1967. **1**, № 3. С. 9—23. 4. *Гинзбург Ю. П.* Мультипликативные представления оператор-функций ограниченного вида // Успехи мат. наук, 1967. **22**, №1. С. 163—165. 5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 6. *Гинзбург Ю. П.* О мультипликативных представлениях J-нерастягивающих оператор-функций. II // Мат. исследования 1967. **2**, № 3. С. 20—51.

Поступила в редколлегию 10.07.87