УДК 517.53

А. Э. ЕРЕМЕНКО, М. Л. СОДИН

ИТЕРАЦИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ПУАНКАРЕ

Рассмотрим рациональную функцию R степени $d \geqslant 2$. Предположим, что функция R имеет отталкивающую неподвижную точку ζ, т. е. $R(\zeta) = \zeta$, $|R'(\zeta)| > 1$. Согласно теореме Пуанкаре [1, гл. VII] существует единственная мероморфная в $\mathbb{C}$ функция f, удовлетворяющая уравнению

$$f(\lambda z) = R[f(z)], \ \lambda = R'(\zeta), \tag{1}$$

и начальным условиям $f(0) = \zeta$, $f'(0) = 1$. Уравнение (1) называется уравнением Пуанкаре, а его решение f — функцией Пуанкаре. Уравнение Пуанкаре удобно записать в виде коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\lambda\cdot"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "f"] \\ \bar{\mathbb{C}} \arrow[r, "R"] & \bar{\mathbb{C}} \end{tikzcd} \tag{2}$$

Пусть R^n — n-я итерация функции R. В классических работах Жюлиа, Фату и Латтэ отмечалась тесная связь между распределением значений функции f и распределением корней уравнения $R^n(z) = a$. Мы продолжим изучение этой связи, привлекая неванлинновскую теорию распределения значений мероморфных функций [2, 3]. В частности, будет дано новое доказательство единственности инвариантной уравновешенной меры функции R и асимптотически равномерного распределения корней уравнения $R^n(z) = a$ относительно этой меры [4, 5].

Определение уравновешенной меры и точная формулировка результата содержится в разделе 5.

Все сведения об итерациях рациональных функций, используемые в статье, содержатся в [6, гл. VIII].

1. *Исключительные значения.* Множество $E(R)$ исключительных значений рациональной функции R состоит по определению из таких $a \in \overline{\mathbb{C}}$, что уравнения $R^n(z) = a$, $n \in N$ имеют в совокупности конечное число корней. Иначе говоря, точки $a \in E(R)$ имеют лишь конечное число предшествующих. Как известно, $\operatorname{card} E(R) \leqslant 2$.

Рациональные функции R и S называются сопряженными, если $R \circ \varphi = \varphi \circ S$ для некоторой дробно-линейной функции φ. Если $\operatorname{card} E(R) = 2$, то функция R сопряжена с $z \mapsto z^{\pm d}$. Если $\operatorname{card} E(R) = 1$, то R сопряжена с многочленом степени d.

Обозначим через $E_P(f) = \{a \in \overline{\mathbb{C}} : f(z) \neq a,\ z \in \mathbb{C}\}$ множество пикаровских исключительных значений функции f. Если f — функция Пуанкаре для R, то $E_P(f) = E(R)$. В частности, f целая тогда и только тогда, когда R — многочлен.

Нам понадобится одна элементарная лемма.

Лемма 1. *Если уравнение* $R^3(z) = a$ *имеет корень порядка* d^3, *то* $a \in E(R)$.

Приведем для полноты доказательство этой леммы.

Пусть уравнение $R^3(z) = a$ имеет корень порядка d^3. Тогда у него имеется только один корень. В этом случае уравнение $R(z) = a$ имеет единственный корень a_{-1} порядка d и уравнение $R(z) = a_{-1}$ имеет единственный корень a_{-2} порядка d. Поскольку уравнение $R(z) = a_{-2}$ имеет также единственный корень d, мы приходим к выводу, что среди точек a, a_{-1}, a_{-2} хотя бы две равны (так как суммарное число критических точек функции R с учетом кратности равно $2d - 2$). Отсюда следует, что $a \in E(R)$.

2. *Характеристики Неванлинны* [2, 3]. Для произвольной мероморфной в $\mathbb{C}$ функции f положим

$$N(r, a, f) = \sum_{|b_j| < r} \log \frac{r}{|b_j|} + k \log r,$$

где суммирование распространяется на все ненулевые корни b_j уравнения $f(z) = a$ с учетом кратности, а k — порядок значения a в точке $z = 0$ (если $f(0) \neq a$, то $k = 0$). Далее,

$$m(r, f) = m(r, \infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta,$$

$$m(r, a, f) = m\left(r, \frac{1}{f - a}\right), \quad a \in \mathbb{C},$$

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, \infty, f).$$

Величина $T(r, f)$ называется неванлинновской характеристикой функции f. Порядком функции f называется число

$$\rho = \limsup_{r \to \infty} \log T(r, f) / \log r.$$

1-я основная теорема Неванлинны утверждает, что

$$m(r, a, f) + N(r, a, f) = T(r, f) - \log|f(0) - a| + \varepsilon(a, r),$$

где $|\varepsilon(a, r)| \leqslant \log^+|a| + \log 2$.

Если $f(0) = a$, $f'(0) \neq 0$, то $\log|f(0) - a|$ следует заменить на $\log|f'(0)|$.

Согласно II-й основной теореме Неванлинны, для любых попарно различных значений $a_1, \ldots, a_n \in \overline{\mathbb{C}}$ выполняется

$$\sum_{j=1}^{n} m(r, a_j, f) \leqslant 2T(r, f) + Q(r, f; a_1, \ldots, a_n).$$

Здесь Q — остаточный член, малый по сравнению с $T(r, f)$. Для функций конечного порядка справедливо $Q(r, f) = O(\log r)$, $r \to \infty$.

3. *Валироновские исключительные значения функции Пуанкаре.* Значение $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется исключительным в смысле Валирона для функции f, если

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} > 0.$$

Множество таких исключительных значений обозначается через $E_V(f)$. Очевидно, что $E_P(f) \subset E_V(f)$. Множество $E_V(f)$ всегда имеет нулевую логарифмическую емкость, но может иметь мощность континуума [2, 3].

Известно, что для рациональной функции R степени d и для любой мероморфной функции f справедливо $T(r, R \circ f) = dT(r, f) + O(1)$, $r \to \infty$ (см. например [3, гл. 1]). Отсюда и из (1) получаем для функции Пуанкаре

$$T(|\lambda| r, f) = (d + o(1))T(r, f), r \to \infty, \tag{3}$$

в частности, f имеет конечный порядок

$$\rho = \log d / \log|\lambda| \tag{4}$$

и нормальный тип. Это результат Валирона [1, гл. VII].

Теорема 1. *Пусть f и R связаны уравнением Пуанкаре. Тогда* $E_V(f) = E(R)$.

Доказательство. Заметим сначала, что если S — рациональная функция и $b_1, \ldots, b_q$ — все корни уравнения $S(z) = a$, причем корень b_j имеет порядок k_j, то

$$m(r, a, S \circ t) \leqslant \sum_{j=1}^{q} k_j m(r, b_j, f) + O(1), \; r \to \infty.$$

В самом деле, достаточно доказать это соотношение при $a = \infty$, $b_1, \ldots b_q \in \mathbb{C}$. Тогда

$$|S(w)| \leqslant K(\sum_{j=1}^{q} |w - b_j|^{-k_j} + 1),$$

и мы имеем

$$m(r, \infty, S \circ f) \leqslant \sum_{j=1}^{q} m(r, \infty, (f - b_j)^{-k_j}) + O(1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{q} k_j m(r, b_j, f) + O(1).$$

Применим теперь лемму 1. Если $a \notin E(R)$, то порядок всех корней уравнения $R^{3n}(z) = a$ не превосходит $(d^3 - 1)^n$. Из (1) следует, что $f(\lambda^{3n}z) = R^{3n} \circ f(z)$, $n \in \mathbb{N}$.
Поэтому

$$m(r, a, f) \leqslant \sum_{b: R^{3n}(b)=a} (d^3 - 1)^n m\left(\frac{r}{|\lambda|^{3n}}, b, f\right),$$

где сумма берется по всем различным корням уравнения $R^{3n}(z) = a$. Отсюда по II-й основной теореме с учетом (3) заключаем

$$m(r, a, f) \leqslant (2 + o(1))(d^3 - 1)^n T\left(\frac{r}{|\lambda|^{3n}}, f\right) =$$
$$= (2 + o(1))\left(\frac{d^3 - 1}{d^3}\right)^n T(r, f), \quad r \to \infty.$$

Выбирая число n произвольно большим, получаем $m(r,a,f) = o(T(r, f))$, $r \to \infty$.
Мы доказали, что $E_V(f) \subset E_P(f)$. Противоположное включение очевидно. Теорема 1 доказана.

Отметим, что схожим методом Н. Янагихара [7] ранее показал, что у функции f нет неванлинновских дефектных значений, отличных от $E(R)$, т. е.

$$\liminf_{r \to \infty} m(r, a, f)/T(r, f) = 0$$

для всех $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E(R)$.

4. *Равнораспределение прообразов мер*. Пусть f — произвольная мероморфная функция, μ — мера в $\overline{\mathbb{C}}$. Поднимем меру μ с помощью функции f, полагая для произвольного ограниченного борелевского множества $X \subset \mathbb{C}$

$$(f^*\mu)(X) = \int_{\overline{\mathbb{C}}} n(a, X)\, d\mu_a, \tag{5}$$

где $n(a, X)$ — количество корней уравнения $f(z) = a$, принадлежащих X (с учетом кратности). Локально конечную меру $f^*\mu$ будем называть прообразом меры μ под действием f. Очевидно, что оператор f^* линеен. Например, если $\mu = \delta_a$ — единичная атомарная мера, сосредоточенная в точке $a \in \overline{\mathbb{C}}$, то $f^*\delta_a(X) = n(a, X)$.

Далее в этом разделе изучаются мероморфные функции конечного порядка ρ и нормального типа, т. е.

$$T(r, f) = O(r^\rho), \ r \to \infty. \tag{6}$$

Пусть W — сопряженное пространство, к пространству непрерывных финитных функций в $\mathbb{C}$ (т. е. W — пространство локально конечных зарядов в $\mathbb{C}$), наделенное топологией слабой сходимости. Обозначим через L^1_{loc} пространство локально суммируемых функций в $\mathbb{C}$ с топологией сходимости в среднем на каждом компакте. Субгармонические функции содержатся в L^1_{loc}, и мы рассмотрим плотное подпространство $\delta SH \subset L^1_{\mathrm{loc}}$, состояшее из разностей субгармонических функций. Оператор Лапласа продолжается до линейного оператора $\Delta : \delta SH \to W$, обладающего следующим свойством непрерывности: если

$u_t \to 0$, $u_t \in \delta SH$, $t \to \infty$, и вариации зарядов Δu_t ограничены на компактах равномерно по t, то $\Delta u_t \to 0$.

Следуя В. С. Азарину [8], для любого $t \in \mathbb{C}$ определим линейные операторы $L_t : \delta SH \to \delta SH$, $T_t : W \to W$ формулами

$$L_t u(z) = |t|^{-\rho} u(tz), \ (T_t \nu)(X) = |t|^{-\rho} \nu(tX).$$

Тогда $T_t \Delta = \Delta L_t$ для любого $t \in \mathbb{C}$.

Меры $\mu_1, \mu_2 \in W$ назовем ρ-равнораспределенными, если заряд $\nu = \mu_1 - \mu_2$ удовлетворяет условию $T_t \nu \to 0$, $t \to \infty$.

Замечание. Если f — мероморфная функция конечного порядка ρ и нормального типа, то для любой вероятностной меры μ в $\overline{\mathbb{C}}$ справедливо $f^*\mu(D(0, r)) = O(r^\rho)$, $r \to \infty$ (7), где $D(a, t) = \{z : |z - a| < t\}$. Докажем (7). Будем считать, что интегралы

$$\int_{\overline{\mathbb{C}}} \log |f(0) - a| \, d\mu_a, \quad \int_{\overline{\mathbb{C}}} \log^+ |a| \, d\mu_a$$

конечны, в противном случае сделаем преобразование

$$f(z) \mapsto \frac{1}{f(z + \zeta) - w}$$

с подходящими $\zeta, w \in \mathbb{C}$. Теперь, используя (5), (6) и 1-ю основную теорему Неванлинны, получаем

$$f^*\mu(D(0, r)) = \int_{\overline{\mathbb{C}}} f^*\delta_a(D(0, r)) \, d\mu_a \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\overline{\mathbb{C}}} N(er, a, f) \, d\mu_a \leqslant T(er, f) + O(1) = O(r^\rho), \ r \to \infty.$$

Из (6) и (7) следует, что семейство функций $\{L_t \log |f|\}_{|t| \geqslant 1} \subset \delta SH$ и семейство мер $\{T_t f^* \mu\}_{|t| \geqslant 1} \subset W$ предкомпактны соответственно в δSH и W.

Теорема 2. *Пусть f — мероморфная функция порядка ρ и нормального типа, μ_j — вероятностные меры в $\overline{\mathbb{C}}$ такие, что $\mu_j(E_V(f)) = 0$, $j = 1, 2$. Тогда меры $f^*\mu_1$ и $f^*\mu_2$ ρ-равнораспределены.*

Эта теорема является ослабленным вариантом результата одного из авторов, анонсированного в [9], в котором вместо $\mu_j(E_V(f)) = 0$, $j = 1, 2$, требуется лишь, чтобы $\mu_j(\{a\}) = 0$, $j = 1, 2$, для всякой точки $a \in E_V(f)$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется

Лемма 2. *Для любой мероморфной функции f существуют постоянные r_0 и C такие, что $m(r, a, f) \leqslant T(r, f) + C$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $r \geqslant r_0$.*

Доказательство. Ограничимся для простоты случаем, когда $f'(0) \neq 0$. (Далее теорема 2 и лемма 2 используются только в этом случае). Выберем настолько малые числа $r_0 > 0$ и $\delta > 0$, чтобы функция f была однолистной в $D(0, r_0)$ и чтобы выполнялось $D(f(0), \delta) \subset fD(0, r_0)$.

Пусть $G(z, \zeta, V)$ — функция Грина области V с полюсом в точке ζ, продолженная нулем в $\mathbb{C} / V$. Тогда, если $f(0) \neq a$, то $N(r_0, a, f) = G(f^{-1}a, 0, D(0, r_0)) = G(a, f(0), fD(0, r_0))$, здесь $f^{-1}a$ — a-точка функции f, ближайшая к началу координат. Из монотонности $N(r)$ и принципа максимума получаем при $r \geqslant r_0$

$$N(r, a, f) \geqslant N(r_0, a, f) \geqslant G(a, f(0), D(f(0), \delta)) = \\ = \log^+ \frac{\delta}{|f(0) - a|} \geqslant \log^+ \frac{1}{|f(0) - a|} + \log \delta.$$

Теперь из 1-й основной теоремы Неванлинны следует, что

$$m(r, a, f) \leqslant T(r, f) - N(r, a, f) + \log \frac{1}{|f(0) - a|} + \varepsilon(a, r) \leqslant \\ \leqslant T(r, f) - \log^+ \frac{1}{|f(0) - a|} + \log \frac{1}{|f(0) - a|} + \log \frac{1}{\delta} + \log^+ |a| + \\ + \log 2 \leqslant T(r, f) + C_f, \ a \neq f(0).$$

Если же $a = f(0)$, то нужное неравенство сразу вытекает из 1-й основной теоремы. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Существует точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$, в которой логарифмические потенциалы обеих мер μ_j конечны и $a \notin E_V(f)$. Достаточно доказать, что каждая мера $f^*\mu_j$ ρ-равнораспределена с $f^*\delta_a$. Предполагая, что $a = \infty$ (этого можно добиться, заменив f на $\frac{1}{f - a}$), приходим к следующей ситуации.

Доказать, что меры $f^*\mu$ и $f^*\delta_a$ ρ-равнораспределены при условии, что

$$\int_{\mathbb{C}} \log^+ |a| \, d\mu_a < \infty, \tag{8}$$

$$\infty \notin E_V(f), \tag{9}$$

$$\mu(E_V(f)) = 0. \tag{10}$$

Следуя методу Фростмана [2, гл. X], рассмотрим логарифмический потенциал

$$u(w) = \int_{\mathbb{C}} \log |w - a| \, d\mu_a$$

(в силу (8) интеграл сходится для почти всех w). Тогда $U = u \circ f \in \delta SH$, $\Delta U = 2\pi(f^*\mu - f^*\delta_\infty)$ и в силу непрерывности лапласиана достаточно доказать, что

$$L_t U(z) = |t|^{-\rho} U(tz) \to 0, \ t \to \infty. \tag{11}$$

Зафиксируем произвольное число $r_1 < \infty$. Имеем при $0 < r \leqslant r_1$, $t \to \infty$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |L_t U(re^{i\theta})| \, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi |t|^\rho} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\log |f(tre^{i\theta}) - a|| \, d\mu_a \, d\theta$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi |t|^{\rho}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left\{ \log^+ |f(tre^{i\theta})| - a| + \log^+ \frac{1}{|f(tre^{i\theta}) - a|} \right\} d\mu_a \, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|t|^{\rho}} \int_{\mathbb{C}} \{ m(|t| r, \infty, f) + \log 2 + \log^+ |a| + m(|t| r, a, f) \} d\mu_a \leqslant$$

$$\leqslant Cr^{\rho} \int_{\mathbb{C}} \frac{m(s, \infty, f) + \log 2 + \log^+ |a| + m(s, a, f)}{T(s, f)} d\mu_a,$$

где $s = |t| r$. Подынтегральное выражение в силу (8) и леммы 2 имеет μ-суммируемую мажоранту. По теореме Лебега можно перейти к пределу под знаком интеграла при $s \to \infty$, а в силу (9) и (10) этот предел нулевой. Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} | L_t U(re^{i\theta}) | \, d\theta \rightrightarrows 0 \quad t \to \infty,$$

равномерно относительно r, $0 < r \leqslant r_1$. Отсюда следует (11). Теорема доказана.

5. *Уравновешенная мера и равнораспределенность корней уравнения* $R^n z = a$. Пусть M — множество всех вероятностных мер в $\overline{\mathbb{C}}$ со свойством $\mu(E(R)) = 0$. Определим оператор Q: $M \to M$ следующим образом:

$$Q\mu = \frac{1}{d} R^* \mu. \tag{12}$$

Мера $\mu \in M$ называется уравновешенной (balanced), если $Q\mu = \mu$. Грубо говоря, это означает, что мера $\mu(E)$ для каждого борелевского множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ поровну распределяется между прообразами множества E под действием функции R.

Теорема 3. *Для любой рациональной функции R существует единственная уравновешенная мера μ_R, причем для любой меры $\mu \in M$ выполняется $Q^n \mu \to \mu_R$, $n \to \infty$* (13).

Если R — многочлен, то мера μ_R совпадает с равновесной (в смысле теории потенциала) мерой множества Жюлиа $J(R)$. В этом случае теорему 3 доказал Бролин [10]. В общем случае теорему 3 доказал М. Ю. Любич [4] и независимо Фриере, Лопес и Мане [5]. Доказательство в [4] основано на исследовании средствами функционального анализа оператора $A: C(\overline{\mathbb{C}}) \to C(\overline{\mathbb{C}})$, для которого $Q = A^*$.

Далее нам понадобится следующая простая

Лемма 3. *Пусть R — рациональная функция, $\mu \in M$. Тогда для каждой окрестности U множества $E(R)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $(Q^n \mu)(U) < \varepsilon$ при $n \geqslant N$.*

Доказательство этой леммы немедленно вытекает из описания множества $E(R)$, приведенного в разделе 1.

Доказательство теоремы 3. Существование меры μ_R устанавливается при помощи обычной конструкции Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова. Пусть M — множество вероятностных мер ν на $\overline{\mathbb{C}}$ таких, что $\nu(E(R)) = 0$. Рассмотрим последовательность чезаровских средних

$$\nu^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} Q^s \delta_a, \quad a \notin E(R).$$

Ясно, что $\nu^{(N)} \in M$. Пусть ν — какая-либо предельная мера для последовательности $\nu^{(N)}$. Тогда ν — вероятностная мера и $Q\nu = \nu$. Из леммы 3 следует, что $\nu \in M$.

Предположим сперва, что R имеет отталкивающую неподвижную точку ζ и рассмотрим уравнение Пуанкаре (1). Обозначим через T оператор T_λ, определенный в п. 4, где $\lambda = R'(\zeta)$.

В силу соотношения (4) $d = |\lambda|^\rho$, поэтому для любого заряда $\nu \in W$ и любого борелевского ограниченного множества $X \subset \mathbb{C}$ справедливо $T\nu(X) = \frac{1}{d}\nu(\lambda X)$. Из определения операторов Q, T, f^* и диаграммы (2) следует, что $f^*Q = Tf^*$. Очевидно, что оператор $f^*: M \to W$ непрерывен и инъективен.

Для любой меры $\mu \in M$ в силу теоремы 1 и 2

$$0 = \lim_{n\to\infty} T^n (f^*\mu_R - f^*\mu) = f^*\mu_R - \lim_{n\to\infty} T^n f^*\mu,$$

отсюда сразу следует единственность инвариантной меры μ_R и (13).

Избавимся от предположения о том, что R имеет отталкивающую неподвижную точку. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что R^k имеет отталкивающие неподвижные точки (это можно сделать, так как число всех неотталкивающих периодических точек функции R конечно).

Мера μ_R, построенная методом Крылова — Боголюбова, очевидно, является уравновешенной и для R^k, и, по доказанному, μ_R — единственная уравновешенная мера для R.

Для любой меры $\mu \in M$ $Q^{kn}\mu \to \mu_R$, $n \to \infty$. Тогда для любого $q \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ $Q^{kn+q}\mu = Q^{kn}(Q^q\mu) \to \mu_R$, $n \to \infty$, поэтому выполнено (13).

Теорема 3 доказана.

Список литературы: 1. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М., 1957. 120 с. 2. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М., 1941. 139 с. 3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 150 С. 4. *Ljubich M. Yu.* Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere // Ergod. Theory and Dynam. Syst. 1983. 3. P. 351—385. 5. *An invariant* measure for rational maps / A. Friere, A. Lopez, R. Mane // Bol. Soc. Bras. Mat. 1983. **11**. P. 10—39. 6. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. М., 1936. 90 с. 7. *Yanagihara N.* Exceptional values for meromorphic solutions of some difference equations // J. Math. Soc. Jap. 1982 34. No 3. P. 489—499. 8. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. 1979. **108**, № 2. С. 217—238. 9. *Содин М. Л.* О распределении значений мероморфных функций конечного порядка по аргументам // Сиб. мат. журн. 1990. Вып. 2. С. 10—20. 10. *Brolin H.* Invariant sets under iteration of rational functions // Ark. Math. 1965. **6**. P. 103—144.

Поступила в редколлегию 20.07.88