УДК 517.5+517.9

Д. З. АРОВ

ГАММА-ПРОИЗВОДЯЩИЕ МАТРИЦЫ, J-ВНУТРЕННИЕ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ЗАДАЧИ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ. 3 *

§ 3. Доказательство теорем 1—6. Другие свойства гамма-производящих матриц. 1°. Предложение 1. *Для того чтобы м.-ф.* χ *из* $B_{m\times n}$ *отвечала по формуле (1.6) некоторой м.-ф.* A *из* $\boldsymbol{M}(n, m)$ *(из* $\boldsymbol{M}^\circ(n, m)$*), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\ln\det(I-\chi^*\chi)\in L^1 \text{ (и } \chi(0)=0). \tag{3.1}$$

При выполнении этого условия A восстанавливается по χ с точностью до постоянного унитарного (и j-унитарного) левого блочно-диагонального множителя вида $\begin{vmatrix} u & 0 \\ 0 & v\end{vmatrix}$, где u и v — унитарные матрицы порядков n и m, а A из $M^\circ(n, m)$ восстанавливается по χ ($\chi(0)=0$) однозначно.

Доказательство. Из равенств (1.5) и (1.6) вытекает, что для внешних м.-ф. p_+^{-1} и $(p_-^*)^{-1}$ должны иметь

$$\begin{aligned} p_-^{-1}(\zeta)(p_-^*)^{-1}(\zeta) &= I-\chi^*(\zeta)\chi(\zeta), \\ p_+^{-1}(\zeta)[p_+^{-1}(\zeta)]^* &= I-\chi(\zeta)\chi^*(\zeta). \end{aligned} \tag{3.2}$$

По теореме Засухина — Крейна для существования таких м.-ф. необходимо и достаточно выполнение условия (3.1). При выполнении этого условия p_+^{-1} и $(p_-^*)^{-1}$ определяются по χ с точностью до постоянных унитарных множителей u^* и v ($(p_+^{-1}\to p_+^{-1}u^*$, $(p_+^*)^{-1}\to\to v(p_-^*)^{-1}$, а при нормировке $(p_+^{-1})(0)>0$ и $(p_-^*)^{-1}(0)>0$ — однозначно. М.-ф. $q_\pm$ выражаются через $p_\pm$ и χ по формулам $q_-(\zeta)=-p_-(\zeta)\chi^*(\zeta)$, $q_+(\zeta)=-p_+(\zeta)\chi(\zeta)$ **(3.3)**.

Замечание. М.-ф. χ из $B_{m\times n}$, удовлетворяющая условию (3.1) с $\chi(0)=0$, рассматривается в статье [1] как характеристическая функция изометрического оператора со специфическим свойством. Там же по существу по χ восстанавливается A из $\boldsymbol{M}(n, m)$ и сформулирован критерий (отличный от рассмотренного в настоящей работе) того, когда для полученного A имеем $F_A(B_{n\times m})=F_\Gamma$, где F_Γ — множество решений задачи (1.2) с $\gamma_k=\gamma_k(f_0)$, $f_0=f_A(0)$. 2°. **Предложение 2.** *Для* A *из* $\boldsymbol{M}(n, m)$ *при любой постоянной* j*-унитарной матрице* U *имеем* $AU\in\boldsymbol{M}(n, m)$*, и среди этих* U *существует единственная* U_0 *такая, что* $AU_0\in\boldsymbol{M}^\circ(n, m)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{A}=AU$, где $A, U\in\boldsymbol{M}(n, m)$, $U=\text{const}$, $U=[u_{jk}]_1^2$. Для блоков $p_\pm$ м.-ф. $\tilde{A}$ будем иметь $\tilde{p}_-^*=u_{11}^*\times$

---

* Первая и вторая часть работы опубликованы в вып. 51 и 52 этого сборника.

$\times(I-E\chi)p_-^*$, $\tilde{p}_+=p_+(I-\chi E)u_{22}$ **(3.4)**, где $E=u_{12}u_{22}^{-1}$, $E^*E<I$, а $\chi=-p_+^{-1}q_+\in B_{m\times n}$. Известно, что если $h\in B_n$ и $\|h(\zeta)\|<1$ п.в., то I_n+h — внешняя м.-ф. Произведение внешних м.-ф. из D_+ является внешней м.-ф. из D_+. Поэтому $\tilde{p}_+$ и $\tilde{p}_-^*$ — внешние м.-ф. из D_+. Из того, что $\tilde{A}(\zeta)$ принимает j-унитарные значения п.в., следует, что $\|\tilde{p}_+^{-1}\|_\infty\leqslant 1$ и $\|(\tilde{p}_-^*)^{-1}\|_\infty\leqslant 1$. Известно, что если $h\in D_+$ и $h(\zeta)\in L_{m\times n}^p$, то $h\in H_{m\times n}^p$. Получим, что $\tilde{p}_+^{-1}$ и $(\tilde{p}_-^*)^{-1}$ — внешние функции из B_m и B_n.

Для $\tilde{\chi}=-\tilde{p}_+^{-1}\tilde{q}_+$ имеем

$$\tilde{\chi}=(u_{22}-\chi u_{12})^{-1}(u_{21}-\chi u_{11}). \tag{3.5}$$

Учитывая, что $\chi\in B_{m\times n}$, а $U=[u_{jk}]$ — j-унитарная матрица, получаем, что $\tilde{\chi}\in B_{m\times n}$. Следовательно, $\tilde{A}\in \boldsymbol{M}(n,\ m)$. Желая теперь, чтобы $\tilde{A}\in \boldsymbol{M}^0(n,\ m)$, получим для $U_0=U=[u_{jk}]_1^2$ условия

$$u_{12}=\chi^*(0)u_{22},\ u_{21}=\chi(0)u_{11},$$
$$u_{11}=(I-\chi^*(0)\chi(0))^{-1/2}u,\ u_{22}=(I-\chi(0)\chi^*(0))^{-1/2}v,$$

где u и v — унитарные матрицы такие, что

$$\begin{aligned} &p_+(0)(I-\chi(0)\chi^*(0))^{1/2}v>0\\ &u_*(I-\chi^*(0)\chi(0))^{1/2}(p_-^*)(0)>0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Замечание. Таким же образом для $A\in \boldsymbol{M}(n,\ m)$ строится единственная j-унитарная матрица U_{z_0} такая, что для $\tilde{A}=AU_{z_0}$ будем иметь $\tilde{p}_+(z_0)>0$, $(\tilde{p}_-^*)(z_0)>0$, $\tilde{q}_+(z_0)=0$. При этом

$$\tilde{p}_+(z_0)\tilde{p}_+^*(z_0)=p_+(z_0)p_+^*(z_0)-q_+(z_0)q_+^*(z_0)$$
$$[(\tilde{p}_-^*)(z_0)]^*(\tilde{p}_-^*)(z_0)=[p_-^*(z_0)]^*(p_-^*)(z_0)-[q_-^*(z_0)]^*(q_-^*)(z_0).$$

3°. Для A из $\boldsymbol{M}(n,\ m)$ рассмотрим

$$\varphi_E=(q_+E+p_+)^{-1},\ \psi_E=(Eq_-^*+p_-^*)^{-1}.\ E\in B_{n\times m}. \tag{3.7}$$

Лемма 1. ([2]). *φ_E и ψ_E — внешние м.-ф. из* $H_{n\times n}^2$ и $H_{m\times m}^2$.

Доказательство. М.-ф. φ_E и ψ_E — внешние из D_+, так как $\varphi_E=(I-\chi E)^{-1}p_+^{-1}$, $\psi_E=(p_-^*)^{-1}(I-E\chi)^{-1}$, p_+ и p_-^*, $I-\chi E$ и $I-E\chi$ — внешние м.-ф.

Так как $\varphi_E\in D_+$, $\psi_E\in D_+$, то для того, чтобы убедиться, что $\varphi_E=H_{n\times n}^2$, $\psi_E\in H_{m\times m}^2$, достаточно показать, что $\varphi_E\varphi_E^*\in L_{n\times n}^1$, $\psi_E^*\psi_E\in L_{m\times m}^1$. Рассмотрим $\Phi_E=(I+\chi E)(I-\chi E)^{-1}$, $\Psi_E=I+E\chi)(I-E\chi)^{-1}$. М.ф. Φ_E и Ψ_E принадлежат классу $\boldsymbol{C}$ м.-ф. Φ, голоморфных в D с $\operatorname{Re}\Phi(z)\geqslant 0$ в D. Поэтому $\operatorname{Re}\Phi_E(\zeta)\in L_{n\times n}^1$, $\operatorname{Re}\Psi_E(\zeta)\in L_{m\times m}^1$. Но $\varphi_E(\zeta)\varphi_E^*(\zeta)\leqslant\operatorname{Re}\Phi_E(\zeta)$, $\Psi_E^*(\zeta)\Psi_E(\zeta)\leqslant\operatorname{Re}\Psi_E(\zeta)$. Поэтому $\varphi_E\psi_E^*\in L_{n\times n}^1$, $\psi_E^*\psi_E\in L_{m\times m}^1$.

Предложение 3. *Пусть $A\in \boldsymbol{M}(n,\ m)$. Тогда $\forall f,\ f_0\in F_A(B_{n\times m})$: $f-f_0\in H_{n\times m}^\infty$, т. е. $F_A(B_{n\times m})\subset F_\Gamma$, где F_Γ — множество решений задачи (1.2) с $\gamma_k=\gamma_k(f_0)$, $f_0\in F_A(B_{n\times m})$.*

Доказательство. Пусть $A \in \boldsymbol{M}(n, m)$, $f_E = f_A(E)$, $E \in B_{n\times m}$. Пользуясь тем, что $A(\zeta)$ принимает j-унитарные значения, получаем

$$I - f_E^* f_E = \varphi_E^* (I - E^* E)\varphi_E,\ E \in B_{n\times m}; \tag{3.8}$$

$$f_E = (Eq_-^* + p_-^*)^{-1}(Ep_+^* + q_+^*),\ E \in B_{n\times m}. \tag{3.9}$$

Из (3.8) видно, что $\| f_E \|_\infty \leqslant 1$. Записывая f_{E_1} в виде (1.7), а f_{E_2} — в виде (3.9) и пользуясь снова тем, что $A(\zeta)$ принимает j-унитарные значения, получаем $f_{E_1} - f_{E_2} = \psi_{E_1}(E_1 - E_2)\varphi_{E_2}$, $\forall E_1,\ E_2 \in B_{n\times m}$ **(3.10)**, где φ_E и ψ_E определены по формулам (3.7). Из этого выражения и леммы 1 вытекает, что $f_{E_1} - f_{E_2} \in H^1_{n\times m} (\subset D_+)$, $(E_1, E_2 \in \in B_{n\times m})$. Так как при этом $f_{E_1} - f_{E_2} \in L^\infty_{n\times m}$, то $f_{E_1} - f_{E_2} \in H^\infty_{n\times m}$.

4°. **Лемма 2.** *Если* $A \in \boldsymbol{M}(n, m)$, *то* $\det A(\zeta) \equiv c$, *где* $c = \mathrm{const}$, $|c| = 1$; *если* $A \in \boldsymbol{M}^0(n, m)$, *то* $\det A(\zeta) \equiv 1$.

Доказательство. Для $A \in \boldsymbol{M}(n, m)$ имеем $\det A(\zeta) = \det p_+(\zeta)/\det p_-^*(\zeta)$. Поэтому $\det A(\zeta)$ — внешняя функция. Так как при этом $|\det A(\zeta)| = 1$, что следует из (1.5), то $\det A(\zeta) \equiv c$, где $c = \mathrm{const}$, $|c| = 1$. Если же $A \in \boldsymbol{M}^0(n, m)$, то $\det A(\zeta) = \det A(0) = \det p_+(0)/\det(p_-^*)(0) > 0$, и потому $c = 1$.

Лемма 3. *Для того чтобы* $W = [w_{jk}]_1^2 \in U(n, m)$, *необходимо и достаточно, чтобы* W *имела* j*-унитарные граничные значения п.в. и чтобы*

$$\begin{gathered}(w_{11}^*)^{-1} \in B_n,\ w_{22}^{-1}w_{21} \in B_{m\times n},\\ w_{12}w_{22}^{-1} \in B_{n\times m},\ w_{22}^{-1} \in B_n.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Доказательство. Рассмотрим известное преобразование Потапова — Гинзбурга, отображающее биективно класс B_j на множество м.-ф. $\tilde{s} = [s_{jk}]_1^2$ класса B_{n+m} с $\det s_{22}(z) \not\equiv 0$:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} w_{11} - w_{12}w_{22}^{-1}w_{21} & w_{12}w_{22}^{-1} \\ -w_{22}^{-1}w_{21} & w_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

При этом преобразовании j-унитарным матрицам W отвечают унитарные матрицы $\tilde{s}$ и для таких W дополнительно к (3.12) имеем $s_{11} = (w_{11} - w_{12}w_{22}^{-1}w_{21}) = (w_{11}^*)^{-1}$ **(3.13)**. Поэтому если $W = [w_{jk}]_1^2 \in U(n, m)$, то выполняются условия (3.11). Пусть теперь выполняются условия (3.11) и $W = [w_{jk}]_1^2$ имеет j-унитарные граничные значения. Рассмотрим м.-ф. $\tilde{s} = [s_{jk}]_1^2$, определенную по формуле (3.12). Для нее будем иметь и (3.13), и $\tilde{s} \in H^\infty_{(n+m)\times(n+m)}$ в силу условия (3.11). Учитывая, что $\tilde{s}(\zeta)$ имеет унитарные граничные значения, получаем, что $\| \tilde{s} \|_\infty = 1$. Следовательно, $\tilde{s} \in B_{n+m}$ и потому $W \in B_j$. Получили, что $W \in U(n, m)$.

5°. **Предложение 4.** $(A \in \boldsymbol{M}_s(n, m)) \leftrightarrow (A \in \boldsymbol{U}(n, m))$ *и* A — *внешняя функция (из* D_+*).*

Доказательство. Для $W = [w_{jk}]_1^2 = A \in \boldsymbol{M}_s(n, m)$ имеем $(w_{11}^*)^{-1} = (p_-^*)^{-1} \in B_n$, $w_{22}^{-1}w_{21} = p_+^{-1}q_+ = -\chi \in B_{m\times n}$, $w_{12}w_{22}^{-1} = q_-p_+^{-1} = F_A(0) \in$

$\in B_{n\times m}$, $w_{22}^{-1}=p_+^{-1}\in B_m$. Для W выполняются условия леммы 3, и потому $W\in \boldsymbol{U}(n, m)$. Кроме того, $w_{22}=p_+\in D_+$, $w_{12}=F_A(0)\,w_{22}\in D_+$, $w_{21}=-w_{22}\chi\in D_+$, $w_{11}=(w_{11}^*)^{-1}+w_{12}w_{22}^{-1}w_{21}\in D_+$, так что $W^{\pm 1}\in D_+$. Учитывая при этом лемму 2, получаем, что $W^{\pm 1}\in D_+$, а это возможно лишь, если W — внешняя м.-ф. (из D_+). Пусть теперь $W\in \boldsymbol{U}(n, m)$ и $W=[w_{jk}]_1^2$ — внешняя м.-ф. из B_m. Тогда $W\in \boldsymbol{M}_s(n, m)$. Действительно, по лемме 3, для W выполняются условия (3.11). Так как $w_{22}\in D_+$ и $w_{22}^{-1}\in B_m$, то $w_{22}^{-1}(=p_+^{-1})$ — внешняя м.-ф. из B_m. Имеем также согласно (3.11): $\chi\overset{\text{def}}{=}-w_{22}^{-1}w_{21}\in B_{n\times m}$. Осталось показать, что $(w_{11}^*)^{-1}$ — внешняя функция. Так как W — внешняя м.-ф., то $\det W(z)$ — внешняя функция; из того, что $W\in \boldsymbol{U}(n, m)$, следует: $|\det W(\zeta)|=1$ п.в. Поэтому $\det W(z)\equiv c=\text{const}$, $|c|=1$. Но для $W=[w_{jk}]$ из $U(n, m)$ имеем $\det W(z)=\det w_{22}(z)/\det w_{11}^*(1/\bar z)$. Получаем, что $\det w_{11}^*(1/\bar z)=\bar c\det w_{22}(z)$ — внешняя функция.

Из того, что $(w_{11}^*)^{-1}\in B_n$ и $\det w_{11}^*$ — внешняя функция, следует, что $(w_{11}^*)^{-1}$ — внешняя м.-ф.

Замечание. Если $A\in \boldsymbol{M}_s(n, m)$, то $F_A(B_{n\times m})\subset B_{n\times m}$, ибо $\boldsymbol{M}_s(n, m)\subset U(n, m)(\subset B_J)$.

6°. Для A_1, $A_2\in \boldsymbol{M}(n, m)$ будем писать $A_1\sim A_2$, если при $f_1\in F_{A_1}(B_{n\times m})$ и $f_2\in F_{A_2}(B_{n\times m})$ имеем $f_1-f_2\in H^\infty_{n\times m}$.

Лемма 4. *Пусть* A, $\tilde A\in \boldsymbol{M}(n, m)$. *Тогда* $(A\sim \tilde A)\leftrightarrow A^{-1}\tilde A\, D_+$.

Доказательство. Пусть A, $\tilde A\in \boldsymbol{M}(n, m)$; $p_\pm$, $q_\pm$ и $\tilde p_\pm$, $\tilde q_\pm$ — их соответствующие блоки (1.4). Пусть $f_E=F_A(E)$, $f_{\tilde E}=F_{\tilde A}(\tilde E)$ (E, $\tilde E\in B_{n\times m}$). Запишем $f_{\tilde E}$ в виде (3.9). Получим

$$f_E-\tilde f_{\tilde E}=\psi_E(-Eu_{21}\tilde E-Eu_{22}+u_{11}\tilde E+u_{12}\ \tilde\varphi_{\tilde E},$$

где $[u_{jk}]_1^2=u^{-1}\tilde u\,(=jA^*j\tilde A)$, $\psi_E=(Eq_-^*+p_-^*)^{-1}$, $\tilde\varphi_{\tilde E}=(\tilde q_*\tilde E+\tilde p_*)^{-1}$.

Утверждение леммы вытекает из записанного выражения для $f_E-f_{\tilde E}$ и леммы 1.

7°. Доказательство теоремы 3. Пусть A_1, $A_2\in \boldsymbol{M}(n, m)$ и пусть $A_1\prec A_2$, т. е. $U\overset{\text{def}}{=}A_2^{-1}A_1\in \boldsymbol{M}_s(n, m)$. Тогда $F_U(B_{n\times m})\subset B_{n\times m}$ и потому $F_{A_1}(B_{n\times m})=F_{A_2U}(B_{n\times m})\subset F_{A_2}(B_{n\times m})$. Пусть теперь $F_{\tilde A}(B_{n\times m})\subset F_A(B_{n\times m})$ ($\tilde A$, $A\in \boldsymbol{M}(n, m)$). Положим $U=[u_{jk}]_1^2=U^{-1}\tilde U$. Имеем $F_U(B_{n\times m})\subset B_{n\times m}$. Поэтому $E\overset{\text{def}}{=}u_{12}u_{22}^{-1}(=F_U(0))\in B_{n\times m}$. Для блоков м.-ф. A, $\tilde A$ и U имеют место соотношения (3.4), из которых следует, что u_{11}^* и u_{22} — внешние м.-ф. из D_+. Пользуясь леммой 4, получаем, что $U\in D_+$, в частности, $u_{21}\in D_+$. Так как u_{22} — внешняя м.-ф., а $u_{21}\in D_+$, то $u_{22}^{-1}u_{21}\in D_+$. Поскольку $U(\zeta)$ принимает j-унитарные значения п.в., то $\|(u_{11}^*)^{-1}\|_\infty\leqslant 1$, $\|u_{22}^{-1}\|_\infty\leqslant 1$, $\|u_{22}^{-1}u_{21}\|_\infty\leqslant 1$. Следовательно, $(u_{11}^*)^{-1}\in B_n$, $u_{22}^{-1}\in B_m$, $u_{22}^{-1}u_{21}\in B_{m\times n}$. Получили, что $U\in \boldsymbol{M}(n, m)$. Так как $F_U(0)\in B_{n\times m}$, то $U\in \boldsymbol{M}_s(n, m)$. Доказано утверждение а) теоремы.

Пусть теперь $\tilde{A} \simeq A$, т. е. $\tilde{A} = AU$; $\tilde{A}$, $A \in \boldsymbol{M}(n, m)$, $U = \text{const}$. Тогда $F_{\tilde{A}}(B_{n\times m}) = F_{AU}(B_{n\times m}) = F_A(B_{n\times m})$, так как $F_U(B_{n\times m}) = B_{n\times m}$. Обратно, пусть $F_{\tilde{A}}(B_{n\times m}) = F_A(B_{n\times m})$, $U = A^{-1}\tilde{A}$; A, $\tilde{A} \in \boldsymbol{M}(n, m)$. Согласно утверждению а) теоремы будем иметь $U^{\pm 1} \in M_s(n, m)$. Следовательно, $U(z)$ — мероморфная в D м.-ф., принимающая там j-унитарные значения. Это возможно лишь при $U(z) = \text{const}$. Если к тому же A, $\tilde{A} \in M^0(n, m)$, то согласно предложению 2 будем иметь $\tilde{A} = A$.

8°. Доказательство теоремы 4. а) Пусть $A \in \boldsymbol{M}(n, m)$, $z_0 \in D$ и A нормирована так, что $p_+(z_0) > 0$, $p_-^*(z_0) > 0$, $q_+(z_0) = 0$. Рассмотрим $f_E = F_A(E)$, $f_0 = F_A(0)$. В силу соотношения (3.10) имеем $h_E \overset{\text{def}}{=} f_E - f_0 = \psi_E E \varphi_0$, $\psi_E = (p_-^*)^{-1}(I - E\chi)^{-1}$, $\varphi_0 = p_+^{-1}$. Поэтому $h_E(z_0) = (p_-^*)^{-1}(z_0) E(z_0) p_+^{-1}(z_0)$, откуда видно, что $K(A; z_0) \overset{\text{def}}{=} \{h_E(z_0): E \in B_{n\times m}\}$ — матричный шар с левым и правым полурадиусами $R_\Lambda(A; z_0) = (p_-^*)^{-1}(z_0)$ и $R_\Pi(A; z_0) = p_+^{-1}(z_0)$. Пусть теперь A ($\in \boldsymbol{M}(n, m)$) не нормирована указанным образом. Тогда согласно замечанию к предложению 2 существует постоянная j-унитарная матрица U такая, что $\tilde{A} = AU$ уже нормирована так, что $\tilde{p}_+(z_0) > 0$, $(\tilde{p}_-^*)(z_0) > 0$, $\tilde{q}_+(z_0) = 0$. Согласно уже доказанному, $R_\Lambda(\tilde{A}; z_0) = (\tilde{p}_-^*)(z_0)$, $R_\Pi(\tilde{A}; z_0) = \tilde{p}_+^{-1}(z_0)$. Так как $F_{\tilde{A}}(B_{n\times m}) = F_A(B_{n\times m})$, то $R_\Lambda(\tilde{A}, z_0) = R_\Lambda(A; z_0)$, $R_\Pi(\tilde{A}; z_0) = R_\Pi(A; z_0)$. Получаем, что $R_\Pi^{-2}(A; z_0) = \tilde{p}_+(z_0)\tilde{p}_+^*(z_0)$, $R_\Lambda^{-2}(A; z_0) = [\tilde{p}_-^*(z_0)]^* \tilde{p}_-^*(z_0)$. Равенства (1.9) и (1.10) получаются, если учесть, что

$$\tilde{p}_+(z_0) = p_+(z_0)[I - \chi(z_0)\chi^*(z_0)]^{1/2} v,$$
$$(\tilde{p}_-^*)(z_0) = u^*[I - \chi^*(z_0)\chi(z_0)]^{1/2}(p_-^*)(z_0),$$

где u и v — унитарные матрицы.

б). Пусть A, $\tilde{A} \in \boldsymbol{M}(n, m)$ и $\tilde{A} \prec A$, то есть $U = [u_{jk}]_1^2 \overset{\text{def}}{=} A^{-1}\tilde{A} \in M_s(n, m)$. Можно считать, что $\tilde{A}$ и A нормированы так, что $\tilde{p}_+(z_0) > 0$, $(\tilde{p}_-^*)(z_0) > 0$, $\tilde{q}_+(z_0) = 0$, $p_+(z_0) > 0$, $(p_-^*)(z_0) > 0$, $q_+(z_0) = 0$. Тогда, пользуясь уже доказанным, получаем

$$R_\Lambda^{-2}(\tilde{A}; z_0) = [(\tilde{p}_-^*)(z_0)]^*(p_-^*(z_0)) = [(p_-^*)(z_0)]^* u_{11}(z_0) u_{11}^*(z_0)(p_-^*(z_0)) \geqslant$$
$$\geqslant [(p_-^*)(z_0)]^*(p_-^*)(z_0) = R_\Lambda^{-2}(A; z_0);$$
$$R_\Pi^{-2}(\tilde{A}; z_0) = \tilde{p}_+(z_0)\tilde{p}_+^*(z_0) = p_+(z_0) u_{22}(z_0) u_{22}^*(z_0) p_+^*(z_0) \geqslant$$
$$\geqslant p_+(z_0) p_+^*(z_0) = R_\Pi^{-2}(A; z_0).$$

в). Пусть A, $\tilde{A} \in \boldsymbol{M}(n, m)$, $\tilde{A} \prec A$ и $\det R_\Lambda(\tilde{A}, z_0) = \det(R_\Lambda(A, z_0)$. Можно считать, что $\tilde{A}$ и A нормированы рассмотренным выше образом. Тогда

$$\det R_\Lambda^{-2}(\tilde{A}, z_0) = |\det p_+(z_0)|^2 |\det u_{22}(z_0)|^2 =$$
$$= \det R_\Lambda^{-2}(A; z_0) \cdot |\det u_{22}(z_0)|^2.$$

Получаем, что $|\det u_{22}(z_0)|^2 = 1$. Но $u_{22}^{-1} \in B_m$. Это возможно лишь, когда $u_{22} = \text{const}$, u_{22} — унитарная матрица. Так как $U = [u_{jk}]_1^2 \times$

$\times(=U^{-1}\tilde{U})\in \boldsymbol{M}_s(n,\ m)$, то $|\det(u_{11}^*)(z_0)|=|\det u_{22}(z_0)|$. Следовательно, для $(u_{11}^*)^{-1}$ $(\in B_n)$ имеем $|\det(u_{11}^*)^{-1}(z_0)|=1$, а это возможно лишь когда $(u_{11}^*)^{-1}=\mathrm{const}$, $(u_{11}^*)^{-1}$ — унитарная матрица. Но тогда и $u_{11}=\mathrm{const}$, u_{11} — унитарная матрица. Пользуясь при этом тем, что $U(\zeta)$ принимает j-унитарные значения, получаем, что $u_{12}=0$, $u_{21}=0$. Следовательно, $U=\mathrm{const}$, т. е. $\tilde{A}=A$.

9°. Доказательство теоремы 1. Утверждение а) теоремы уже доказано в предложении 3. Так как $F_A(B_{n\times m})\subset F_\Gamma$ при $\gamma_k=\gamma_k(f_0)(k\geqslant 1)$, $f_0=F_A(0)$, то K (A; 0) $\subset K_\Gamma$. Так как у шара K (A; 0) левый и правый полурадиусы невырождены, то такими являются левый и правый полурадиусы шара K_Γ, то есть задача (1.2) является вполне неопределенной. Осталось доказать утверждение в) теоремы.

По теореме A для рассматриваемой вполне неопределенной задачи (1.2) существует $A_0\in \boldsymbol{M}(n,\ m)$ такая, что $F_\Gamma=F_{A_0}(B_{n\times m})$. Можно считать, что $A_0\in M^0(n,\ m)$. Если $F_A(B_{n\times m})\neq F_\Gamma$, то по теореме 3 имеем $A=A_0U$, где $U\in M_s(n,\ m)$, $U\neq\mathrm{const}$. Следовательно, $A\bar{\in}\ \boldsymbol{M}_r(n,\ m)$. Пусть теперь $A\bar{\in}\ \boldsymbol{M}_r(n,\ m)$. Тогда $A=A_1U$, где $A_1\in M(n,\ m)$, $U\in M_s(n,\ m)$, $U\neq\mathrm{const}$. Получаем, что $F_A(B_{n\times m})\subset F_{A_1}(B_{n\times m})\subset F_\Gamma$, причем $F_A(B_{n\times m})\neq F_{A_1}(B_{n\times m})$. Следовательно, $F_A(B_{n\times m})\neq F_\Gamma$.

10°. Доказательство теоремы 5. Пусть $A\in \boldsymbol{M}(n,m)$, $f_0\in F_A(0)$, $\gamma_k=\gamma_k(f_0)$, $k\geqslant 1$. По теореме А существует $A_0\in \boldsymbol{M}(n,\ m)$ такая, что $F_\Gamma=F_A(B_{n\times m})$. Имеем $F_A(B_{n\times m})\subset F_{A_0}(B_{n\times m})=F_\Gamma$. По теореме 4 получаем $R_\Lambda^{-2}(\Gamma)=R_\Lambda^{-2}(A_0;\ 0)\leqslant R_\Lambda^{-2}(A;\ 0)$, $R_\Pi^{-2}(\Gamma)=R_\Pi^{-2}(A_0,\ 0)\leqslant R_\Pi^{-2}(A,\ 0)$ и $(F_\Gamma=)F_{A_0}(B_{n\times m})=F_A(B_{n\times m})\leftrightarrow(d(\Gamma)=)\det R_\Pi(A_0,\ 0)=\det R_\Pi(A;\ 0)(=d(A))$. Остается заметить, что по теореме 1 имеем $A_0\in \boldsymbol{M}_r(n,\ m)$.

11°. Доказательство теоремы 2. а) Пусть $A=A_1A_2$; A_1, $A_2\in \boldsymbol{M}_s(n,\ m)$. Тогда по предложению 4 A_1 и A_2 — внешние м.-ф., и они из $U(n,\ m)$. Получаем, что A — внешняя м.-ф., $A\in \boldsymbol{U}(n,\ m)$. Пользуясь снова предложением 4, получаем, что $A\in \boldsymbol{M}_s(n,\ m)$.

Утверждение б) теоремы доказывается так же, как предложение 2. Осталось доказать предложение в) теоремы.

Пусть $A\in \boldsymbol{M}(n,\ m)$, $f_0=F_A(0)$, $\gamma_k=\gamma_k(f_0)$, $(k\geqslant 1)$. Согласно уже доказанному для задачи (1.2) существует $A_r\in \boldsymbol{M}_r(n,\ m)$ такая, что $F_\Gamma=F_{A_r}(n,\ m)$. Так как $F_A(B_{n\times m})\subset F_{A_r}(B_{n\times m})$ $(=F_\Gamma)$, то $A=A_r\cdot A_s$, где $A_s\in \boldsymbol{M}_s(n,\ m)$. Пусть наряду с полученным представлением $A=A_rA_s$ имеем также $A=A'_rA'_s$, где $A'_r\in \boldsymbol{M}_r(n,\ m)$, $A'_s\in M_s(n,\ m)$. Тогда

$$F_A(B_{n\times m})\subset F_{A'_r}(B_{n\times m})(=F_\Gamma)=F_{A_r}(n,\ m).$$

По теореме 3 получаем, что $A'_r\simeq A_r$. Если же A_r, $A'_r\in M_r^0(n,m)$, то $A'_r=A_r$. При этом будем иметь и $A'_s=A_s$.

12°. Доказательство теоремы 6. Будем предполагать, что $n\geqslant m$. Случай $n<m$ сводится к случаю $n>m$ путем перехода от м.-ф. $f_{E_0}(\zeta)$ к м.-ф. $f_{E_0}^*(\bar{\zeta})$. Пусть $A\in \boldsymbol{M}(n,\ m)$, E_0 — матрица порядка $n\times m$, $E_0^*E_0=I_m$, $f_{E_0}=F_A(E_0)$. Рассмотрим задачу (1.2) с $\gamma_k=$

$= \gamma_k(f_{E_0})$ $(k \geqslant 1)$. По теореме 1 имеем $F_\Gamma = F_A(B_{n \times m})$ тогда и только тогда, когда $A \in \boldsymbol{M}_r(n, m)$. Если выполнено это условие, то рассматриваемые решения f_{E_0} задачи (1.2) называются каноническими (сведения о них см. в [3] при $n = m = 1$ и в [4] при произвольных n и m). Они обладают следующим характеристическим свойством. Пусть f — произвольное решение рассматриваемой задачи (1.2) такое, что $f^*(\zeta) f(\zeta) = I_m$ п.в. Рассмотрим изометрический оператор V умножения на ζ в пространстве $\boldsymbol{H} = \zeta \overline{\boldsymbol{H}}_n^2 \vee f \overline{\boldsymbol{H}}_m^2$ с областью определения $D_V = \bar{\zeta}^2 \overline{\boldsymbol{H}}_n^2 \vee f H_m^2$ и областью значений $\Delta_V = \bar{\zeta} \overline{\boldsymbol{H}}_n^2 \vee \zeta f H_m^2$. Очевидно, что оператор U умножения на ζ в L_n^2 является минимальным унитарным расширением оператора V. Условие полной неопределенности задачи (1.2) можно записать в виде $\dim(H \ominus D_V) = n$, $\dim(H \ominus \Delta_V) = m$, а это означает, что V имеет индекс дефекта (n, m). Условие того, что f — каноническое решение этой задачи, записывается в виде $U^* \boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{H}$. Рассмотрим отдельно случаи $m = n$ и $m < n$.

Пусть $m = n$. Тогда условие $U^* H \subset H$ означает, что U — расширение V без выхода из $\boldsymbol{H}$, т. е., что $\boldsymbol{H} = L_n^2$. Для унитарнозначной м.-ф. $f = \bar{f}_{E_0}$ условие $\boldsymbol{H} = L_n^2$ означает, что задача (1.12) имеет лишь нулевое решение. Пусть теперь выполнено последнее условие при $E_0 = \pm I_n$. Имеем $A = \tilde{A} U$, где $\tilde{A} \in \boldsymbol{M}_r(n, m)$, $U \in \boldsymbol{M}_s(n, m)$, причем $F_\Gamma = F_{\tilde{A}}(B_n)$. Покажем, что $U = \mathrm{const}$, т. е. что $A \in \boldsymbol{M}_r(n, m)$. Так как f_{E_0} при $E_0 = \pm I_n$ — канонические решения задачи (1.2), то для них имеем $f_{\pm I} = F_{\tilde{A}}(E_{\pm 1})$, где $E_{\pm 1} = \mathrm{const}$, $E_{\pm 1} = I_n$. Получаем, что $F_U(\pm I) = E_{\pm 1} = \mathrm{const}$. Пользуясь при этом тем, что для блоков u_{jk} м.-ф. U по лемме 1 имеем $(u_{11}^* + u_{12}^*)^{-1} \in H_{n \times n}^2$, $(u_{21} + u_{22})^{-1} \in H_{n \times n}^2$, и равенствами $(u_{21} \pm u_{22})^{-1} = (u_{11} \pm u_{12})^{-1} E_{\pm 1}$, заключаем, что $u_{21} \pm \pm u_{22} = \mathrm{const}$, $u_{11} \pm u_{12} = \mathrm{const}$, а значит, $U = \mathrm{const}$.

Покажем теперь, что для f_{E_0} условие существования лишь нулевого решения задачи (1.12) равносильно тому, что $\operatorname{ind} f_{E_0} = 0$. Пусть выполнено это условие. Тогда f_{E_0} — каноническое решение задачи (1.2), т. е. $\boldsymbol{H} = L_n^2$. Тогда для $N \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{H} \ominus \Delta_V$ имеем $N \{h: h \in H_n^2, f_{E_0}^* h \in \overline{\boldsymbol{H}}_n^2\}$. Рассматриваемая задача по теореме 1 является вполне неопределенной, и потому $\dim N = n$. Для $f = f_{E_0}$ уже имеем представление (1.11) с $\overset{\circ}{\varphi}_- = \psi_{E_0}^*$, $\overset{\circ}{\varphi}_+ = E_0 \varphi_{E_0}$, где φ_{E_0} и ψ_{E_0} определены по формуле (3.7) при $E = E_0$. Так как $f_{E_0}^* \overset{\circ}{\varphi}{}_-^* = \overset{\circ}{\varphi}{}_+^*$, то $\overset{\circ}{\varphi}{}_-^* \boldsymbol{C}^n \subset N$. Поскольку при этом $\det \overset{\circ}{\varphi}{}_-^*(\zeta) \neq 0$ п.в. и $\dim N = n$, то $\overset{\circ}{\varphi}{}_-^* \boldsymbol{C}^n = N$. Пусть имеем произвольное представление $f = f_{E_0}$ в виде (1.11). Тогда $f_{E_0}^* \varphi_-^* = \varphi_+^*$ и потому $\varphi_-^* \boldsymbol{C}^n \subset N$. Получаем, что $\varphi_-^* \boldsymbol{C}^n \subset \overset{\circ}{\varphi}{}_-^* \boldsymbol{C}^n$, откуда следует, что $\varphi_- = X \overset{\circ}{\varphi}_+$, где $X = \mathrm{const}$ $(\det X \neq 0)$. Учитывая при этом, что $(f_{E_0} =)\, \varphi_-^{-1} \varphi_+ = \overset{\circ}{\varphi}{}_-^{-1} \overset{\circ}{\varphi}_+$, получаем, что и $\varphi_+ = X \overset{\circ}{\varphi}_+$. Пусть теперь имеем $\operatorname{ind} f_{E_0} = 0$. Покажем, что тогда задача (1.12) имеет лишь нулевое решение. Пусть это не так. Тогда f_{E_0} не является каноническим решением этой задачи, и потому $f_{E_0}=F_{\tilde{A}}(E)$, где $\tilde{A}\in \boldsymbol{M}_r(n, m)$, $E\neq$ $\neq \mathrm{const}$, $E^*(\zeta)E(\zeta)=I_n$. Определим м.-ф. $\tilde{\varphi}_E$ и $\tilde{\psi}_E$ по блокам $\tilde{p}_\pm$ и $\tilde{q}_\pm$ м.-ф. $\tilde{A}$ согласно формулам (3.7). Получим для $f=f_{E_0}$ два существенно различных представления (1.11), в одном из них $\varphi_+=\tilde{\varphi}_E$, а в другом $\varphi_+=E\tilde{\varphi}_E$: $f_{E_0}=(\tilde{\psi}_E^*)^{-1}(E\tilde{\varphi}_E))=[(\tilde{\psi}_E E)^*]^{-1}\tilde{\varphi}_E$.

Пусть теперь $m<n$. Пусть $A\in \boldsymbol{M}_r(n, m)$, $f_{E_0}=f_A(E_0)$, $E_0=$ $=\mathrm{const}$, $E_0^*E_0=I_m$. Тогда f_{E_0} — каноническое решение соответствующей задачи (1.2), т. е. $U^*\boldsymbol{H}\subset \boldsymbol{H}$. Рассмотрим $\boldsymbol{H}^\perp=L_n^2\ominus \boldsymbol{H}$. Имеем $\zeta \boldsymbol{H}^\perp\subset \boldsymbol{H}^\perp\subset H_n^2$ и $\dim(\boldsymbol{H}^\perp\ominus\zeta\boldsymbol{H}^\perp)$ $(=\dim(\boldsymbol{H}\ominus U^*\boldsymbol{H}))=n-m$. По теореме Берлинга — Лакса для инвариантного в $\boldsymbol{H}_n^2$ подпространства $\boldsymbol{H}^\perp$ относительно оператора умножения на ζ существует внутренняя м.-ф. в $(\in B_{n\times(n-m)})$ такая, что $\boldsymbol{H}^\perp=b\boldsymbol{H}_{n-m}^2$. Так как $f_{E_0}\boldsymbol{H}_m^2\subset \boldsymbol{H}$, то $f_{E_0}H_m^2\perp bH_{n-m}^2$, а это возможно лишь, когда $b^*f_{E_0}=0$. Пусть теперь h_+, h_- — решение задачи (1.12), т. е. $h_+\perp \boldsymbol{H}$. Тогда $h_+\in bH_{n-m}^2$ и потому $f_{E_0}^*h_+\in f_{E_0}^*bH_{n-m}^2=\{0\}$, т. е. $h_-=0$.

Обратно, пусть для любого решения задачи (1.12) имеем $h_-=0$. Тогда получаем, что $\boldsymbol{H}^\perp=\{h_+\colon h_+\in H_n^2,\ f_{E_0}^*h_+=0\}$, откуда видно, что $\zeta H^\perp\subset H^\perp$ и, следовательно, $U^*\boldsymbol{H}\subset\boldsymbol{H}$. Получаем, что при всех рассматриваемых E_0 м.-ф. f_{E_0} — канонические решения задачи (1.2). Пусть $A=\tilde{A}U$, где $\tilde{A}\in \boldsymbol{M}_r(n, m)$, $U=[u_{jk}]_1^2\in \boldsymbol{M}_s(n, m)$. Покажем, что $U=\mathrm{const}$, т. е. $A\in \boldsymbol{M}_r(n, m)$. Так как все f_{E_0} — канонические решения задачи (1.2), то получаем, что $f_{E_0}=f_{\tilde{A}}(E)$, где $E=\mathrm{const}$, $E^*E=I_m$. Поэтому $E=F_A(E_0)=\mathrm{const}$. Из равенства $(E_0u_{12}+$ $+u_{11})^{-1}E=E_0(u_{21}E_0+u_{22})^{-1}$ с учетом леммы 1 получаем, что $u_{21}E_0+u_{22}=\mathrm{const}$ при любом рассматриваемом E_0. Отсюда вытекает, что u_{21} и u_{22} — постоянные матрицы, а значит, и $u_{22}^{-1}u_{21}=\mathrm{const}$. Пользуясь теперь предложением 1, получаем, что $U=\mathrm{const}$.

Замечание. Если b — внутренняя м.-ф., рассмотренная при доказательстве теоремы в случае $n>m$, то $\tilde{f}\overset{\mathrm{def}}{=}(f_{E_0}, b)$ — унитарнозначная м.-ф. такая, что

$$\begin{gathered}\{h\colon h\in \boldsymbol{H}_n^2,\ f^*h\in\bar{\zeta}\,\overline{\boldsymbol{H}}_n^2\}=0,\\ \dim\{h\colon h\in H_n^2,\ \tilde{f}^*h\in\overline{H}_n^2\}=n.\end{gathered}\tag{1.14}$$

Из этих условий вытекает, что $\operatorname{ind}\tilde{f}=0$. Обратно, если $b\,(\in B_{n\times(n-m)})$ — внутренняя м.-ф. такая, что $b^*f_{E_0}=0$, т. е. $\tilde{f}\overset{\mathrm{def}}{=}(f_{E_0}b)$ — унитарнозначная м.-ф., и выполняются условия (1.14), то для f_{E_0} задача (1.12) разрешима лишь при $h_-=0$.

Список литературы: 1. *Adamjan V. M., Arov D. Z., Krein M. G.* Some function theoretic problems connected with the theory of spectral measures of isometric operator // Lect. Notes in Mathem. 1984. 1043. Linear and Complex Analysis Problem Book. P. 160—163. 2. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Бесконечные ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения// Изв. АН АрмССР, сер. мат. 1971. VI, № 2—3. С. 87—112. 3. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори—Фейера и И. Шура// Функцион. анализ и его прил. 1968. 2, вып. 4. С. 1—17. 4. *Адамян В. М.* Невырожденные унитарные сцепления унитарных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1973. 7, вып. 4. С. 1—16.

Поступила в редколлегию 06.01.86