УДК 517.956

И. И. АНТЫПКО, В. М. БОРОК

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

Целью статьи является исследование корректной разрешимости в классах гладких функций, имеющих различный характер роста или убывания (при $\|x\|\to\infty$), задачи Неймана в слое $\Pi_T = \boldsymbol{R}^m \times [0, T]$ для уравнения 2-го порядка (по t):

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) = 0, \tag{1}$$

$(x, t) \in \Pi_T$, $P(s)$, $Q(s)$ — произвольные комплекснозначные полиномы; граничные условия Неймана имеют вид

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_0(x), \ \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = u_T(x), \ x \in \boldsymbol{R}^m. \tag{2}$$

Пусть $\gamma \in \boldsymbol{R}$; обозначим $C_\gamma^k = \{\varphi \in C^k(\boldsymbol{R}^m) : \|\varphi\|_{\gamma,k} = \sup\limits_{R^m} \max\limits_{|\alpha|<k} |D^\alpha \varphi| \times$ $\times (1 + \|x\|)^{-\gamma} < \infty\}$.

Определение 1. *Задача (1) — (2) называется корректно разрешимой из пространства $C_\gamma^{k_1}$ в пространство $C_\gamma^{k_2}$, если для любых функций $u_0(x) \in C_\gamma^{k_1}$, $u_T(x) \in C_\gamma^{k_1}$ задача (1) — (2) имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее при каждом $t \in]0, T[$ пространству $C_\gamma^{k_2}$ и удовлетворяющее оценке*

$$\sup_{[0, T]} \| u(x, t) \|_{\gamma,k_2} \leqslant C\{\| u_0(x) \|_{\gamma,k_1} + \| u_T(x) \|_{\gamma,k_1}\}. \tag{3}$$

Обозначим $C_\gamma = \bigcup\limits_{k\geqslant 0} C_\gamma^k$ индуктивный предел пространств C_γ^k.

Определение 2. *Задача (1) — (2) называется корректной в пространстве C_γ, если для любого $k \geqslant 0$ существует $l \geqslant 0$ такое, что задача (1) — (2) корректно разрешима из пространства C_γ^l в пространство C_γ^k.*

Отметим, что в случае задачи Коши для уравнения (1) определение 2 при $\gamma = 0$ превращается в определение корректности задачи Коши, данное И. Г. Петровским в 1938 г. [1]. Необходимым и достаточным условием корректности задачи Коши, как показано в [1], является условие А. Задача Дирихле в слое Π_T для уравнения (1) была исследована в [2], где также были найдены необходимые и достаточные условия ее корректной разрешимости. В [3] найдены достаточные условия корректной разрешимости в C_γ двухточечной локальной краевой задачи в слое Π_T для системы уравнений вида

$$\frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} = \mathscr{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{u}(x, t), \tag{4}$$

$$\bar{u}(x, t) = \{u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t)\} : \Pi_T \to \boldsymbol{C}^n,$$

$\mathscr{H}(s)$ — произвольная полиномиальная $n \times n$-матрица, граничные условия имеют вид

$$u_i(x, 0) = u_{0i}(x), \ i = i_1, \dots, i_s, \ u_j(x, T) = u_{Tj}(x),$$
$$j = j_1, \dots, j_l, \ s + l = n. \tag{5}$$

Задачу (1) — (2) легко привести к виду (4) — (5). Используя специальный вид задачи (4) — (5), возникающий при таком сведении, и результаты работы [4], мы сможем найти необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задачи (1) — (2) в пространствах C_γ, а также исследовать вопрос о корректной разрешимости этой задачи в некоторых других пространствах.

§ 1. **Разрешающие функции задачи Неймана.** Наряду с задачей (1) — (2) рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, коэффициенты которого зависят от параметра $s = (s_1, \dots, s_m)$:

$$\frac{d^2 v(s, t)}{dt^2} + P(is)\frac{dv(s, t)}{dt} + Q(is)v(s, t) = 0, \tag{6}$$

$$v_t'(s, 0) = v_{-1}(s), \ v_t'(s, T) = v_1(s). \tag{7}$$

Для того чтобы записать решение задачи (6) — (7), введем следующие обозначения:

$$\lambda_{-1}(s) = -\frac{1}{2}[P(is) + D(is)], \ \lambda_1(s) = \frac{1}{2}[P(is) - D(is)],$$

здесь $D^2(is) \equiv P^2(is) - 4Q(is)$ (в качестве $D(is)$ выбираем ту ветвь $\sqrt{D^2(is)}$, на которой $\operatorname{Re} D(is) \geqslant 0$),

$$\varphi_j(s, \alpha, t) = -\frac{P(is)}{2}(1 - e^{-\alpha t}) - \frac{\alpha}{2} j (1 + e^{-\alpha t}),$$

$$F_j(s, t) = \frac{\varphi_j(s, D(is), t)}{1 - e^{-TD(is)}}, \ h_{-1}(t) = t, \ h_1(t) = T - t,$$

$$R_j(s, t) = \begin{cases} e^{h_j(t)\lambda_j(s)} Q^{-1}(is) F_j(s, h_{-j}(t)) & \\ \text{при } D(is) \neq 0, & (8) \\ e^{\frac{j h_j(t) P(is)}{2}} Q^{-1}(is)\left[-\frac{j}{T} - \frac{P(is)\, h_{-j}(t)}{2T}\right]. & (8') \\ \text{при } D(is) = 0. & \end{cases}$$

Формулы (8) и (8′) имеют смысл при всех s, для которых $Q(is) \neq 0$ $D^2(is) \neq -4k^2\pi^2 T^{-2}$, $k \in N$.

Тогда нетрудно видеть, что решение $v(s, t)$ задачи (6) — (7) записывается в виде

$$v(s, t) = R_{-1}(s, t)v_{-1}(s) + R_1(s, t)v_1(s). \tag{9}$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки производных функций $R_j(s, t)$, $j = \pm 1$, при $\sigma \in \boldsymbol{R}^m$. Для их получения предварительно оцениваем эти функции в некоторой области пространства $\boldsymbol{C}^m$, примыкающей к пространству $\boldsymbol{R}^m$.

Обозначим

$$D^q R(s,\ t) = \max_{j=\pm 1} |D^q R_j(s,\ t)|$$

$$\left(D^q = \frac{\partial^{|q|}}{\partial s_1^{q_1} \dots \partial s_m^{q_m}},\ D^0 R(s,\ t) \equiv R(s,\ t)\right),$$

$$\Omega_{L,\lambda} = \{s = \sigma + i\tau : \| \tau \| \leqslant L(1 + \|\sigma\|)^{\lambda}\},\ L > 0,\ \lambda \in \boldsymbol{R}.$$

Лемма. *Пусть многочлены $Q(is)$ и $D^2(is)$ таковы, что*

$$Q(i\sigma) \neq 0,\ \sigma \in \boldsymbol{R}^m, \tag{10}$$

$$D^2(is) \neq -4k^2\pi^2 T^{-2},\ k \in N,\ \sigma \in \boldsymbol{R}^m. \tag{11}$$

Тогда существует область $\Omega_{L,\lambda}$ такая, что при $s \in \Omega_{L,\lambda}$ и $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$R(s,\ t) \leqslant C_1 \exp\{c(t)\Lambda(s)\}(1 + \|s\|)^{C_2}, \tag{12}$$

где $C_1 > 0$, $C_2 \in \boldsymbol{R}$, $0 \leqslant c(t) \leqslant T$,

$$\Lambda(s) \equiv \frac{1}{2}[|\operatorname{Re} P(is)| - \operatorname{Re} D(is)]. \tag{13}$$

Доказательство леммы опирается на следующие факты:

Утверждение 1. *Пусть $Q(i\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \boldsymbol{R}^m$. Тогда в некоторой области Ω_{L_1,λ_1}*

$$|Q(is)| \geqslant A_1(1 + \|s\|)^{\alpha_1}, \tag{14}$$

где $A_1 > 0$, $\alpha_1 \in \boldsymbol{R}$.

Обоснование этого утверждения проводится с использованием теоремы Хермандера [5], техники использования теоремы Зайденберга — Тарского [6] и асимптотического представления алгебраических функций (см., например, [7]).

Обозначим $\varphi(s,\ \alpha,\ t)$ функцию, определенную при $s \in \boldsymbol{C}^m$, $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$, $t \in [0,\ T]$ и удовлетворяющую условию

$$|\varphi(s,\ \alpha,\ t)| \leqslant M(1 + \|s\|)^{\mu_1}(1 + |\alpha|)^{\mu_2},\ M > 0,\ M_j > 0,\ j = 1,\ 2,$$

и пусть

$$f(s,\ \alpha,\ t) = \frac{\varphi(s,\ \alpha,\ t)}{1 - e^{-T\alpha}} \quad (T\alpha \neq 2k\pi i,\ k \in \boldsymbol{Z}).$$

Пусть, кроме того, функция $\varphi(s,\ \alpha,\ t)$ такова, что

$$\lim_{\alpha \to 0} f(s,\ \alpha,\ t) = \Psi(s,\ t),\ |\Psi(s,\ t)| \leqslant M_1(1 + \|s\|)^{\mu_3},\ M_1 > 0,\ \mu_3 > 0.$$

Тогда функцию $f(s,\ \alpha,\ t)$ можно доопределить при $\alpha = 0$, полагая $f(s,\ 0,\ t) = \Psi(s,\ t)$.

Утверждение 2. *Пусть $D^2(i\sigma) \neq -4k^2\pi^2 T^{-2}$, $k \in \boldsymbol{N}$, $\sigma \in R^m$. Тогда в некоторой области Ω_{L_2,λ_2} справедлива оценка*

$$|F(s,\ t)| \leqslant A_2(1 + \|s\|)^{\alpha_2}, \tag{15}$$

где $F(s,\ t) = f(s,\ D(is),\ t)$, $A_2 > 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$.

Обоснование этого утверждения аналогично доказательству леммы 6 в [2]. Функции $F_j(s,t)$, $j = \pm 1$ (см.(8)) удовлетворяют оценке (15) (в качестве $\varphi(s,\ \alpha,\ t)$ выбираем $\varphi_j(s,\ \alpha,\ t)$, $j = \pm 1$). Учитывая (8), (8′) и (13), в силу утверждений 1 и 2 получаем оценку (12). Лемма доказана.

§ 2. **Корректность в классе ограниченных функций. Теорема 1.** *Для того чтобы задача (1) — (2) была корректно разрешимой в классе C_0 ограниченных функций, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (10) и (11) и*

$$\sup_{R^m} \Lambda(\sigma) < \infty. \tag{16}$$

Доказательство.

Необходимость. Если $Q(i\sigma_0)=0$, то $u(x, t) = e^{i(\sigma_0, x)}$ является решением задачи (1) — (2) при $u_0(x) \equiv u_T(x) \equiv 0$, т. е. нарушается единственность решения задачи (1) — (2) в C_0. Если $D^2(i\sigma_0) = -4k^2\pi^2T^{-2}$ при некотором $k \in N$, то, обозначив $\lambda_{1,2}$ — корни уравнения $\lambda^2 + P(i\sigma_0)\lambda + Q(i\sigma_0) = 0$, найдем функцию $v(t) \equiv C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} \not\equiv 0$, удовлетворяющую условиям $v'(0) = v'(T) = 0$. Тогда $u(x, t) \equiv v(t)\exp\{i(\sigma_0, x)\} \not\equiv 0$ снова является решением однородной задачи вида (1) — (2) и $u(x, t) \in C_0$.

Пусть теперь условия (10) и (11) выполнены. Тогда задача (1) — (2) в пространстве C_0 не может иметь двух разных решений. Это вытекает из теоремы 8 единственности решения задачи (4) — (5) [4], требующей, чтобы определитель $\Delta(\sigma)$ этой задачи удовлетворял условию $\Delta(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in R^m$. При этом $\Delta(\sigma)$ можно определить следующим образом: запишем условия (5) в виде

$$A\bar{u}(x, 0) + B\bar{u}(x, T) = \bar{u}_0(x) \quad (5'),$$

где A и B — скалярные $n \times n$ матрицы, $\bar{u}_0(x)$ — вектор-функция, координатами которой являются функции, стоящие в (5) справа; тогда $\Delta(\sigma) = \det(A + B\exp\{TH(-i\sigma)\})$. Приводя задачу (1) — (2) к виду (4) — (5,) получим

$$\Delta(\sigma) = \begin{cases} e^{-T\lambda_1(-\sigma)}\, Q(-i\sigma)\, \dfrac{1 - e^{-TD(-i\sigma)}}{D(-i\sigma)} \\ \qquad\qquad \text{при } D(-i\sigma) \neq 0, \\ TQ(-i\sigma)\, e^{-\frac{TP(-i\sigma)}{2}} \quad \text{при } D(-i\sigma) = 0, \quad \Delta(\sigma) \neq 0. \end{cases} \tag{17}$$

Если при этом нарушено условие (16) теоремы, то, обозначив $\mu(r) = \max\limits_{\|\sigma\|=r} \Lambda(\sigma)$ и учитывая, что $\mu(r)$ — алгебраическая функция (см. лемму 5 в [2]), получим $\mu(r) = ar^\alpha(1 + 0(1))$, где $0(1) \to \infty$ при $r \to \infty$. Наше предположение о том, что нарушено условие (16), означает, что $\alpha > 0$. Выберем r_n из условия $\mu(r_n) = n$; ясно, что для достаточно больших

$$a_1 n^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant r_n \leqslant a_2 n^{\frac{1}{\alpha}}, \quad a_1 > 0, \ a_2 > 0. \tag{18}$$

Пусть $\|\sigma_n\| = r_n$, $\Lambda(\sigma_n) = n$. Выберем подпоследовательность $n_k \to \infty$ так, чтобы либо при всех k

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re} P(i\sigma_{n_k}) - \frac{1}{2}\operatorname{Re} D(i\sigma_{n_k}) = n_k,$$

либо

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Re} P(i\sigma_{n_k}) - \frac{1}{2}\operatorname{Re} D(i\sigma_{n_k}) = n_k.$$

Тогда, например, во втором случае, в силу (8)

$$\left|\frac{\partial R_{-1}(\sigma_{n_k}, t}{\partial t}\right| = e^{tn_k}\left|\frac{1-e^{-(T-t)D(i\sigma_{n_k})}}{1-e^{-TD(i\sigma_{n_k})}}\right|. \tag{19}$$

При достаточно малых значениях τ

$$D^2(i\sigma) \neq -4k^2\pi^2\tau^{-2}, \ k \in \boldsymbol{N}, \ \sigma \in \boldsymbol{R}^m, \tag{20}$$

что вытекает из условия (11), поскольку при его выполнении множество вещественных значений многочлена $D^2(i\sigma)$ ограничено снизу. Теперь можно применить установленное при доказательстве леммы утверждение 2 к функции

$$\Phi(s, t) = \left[\frac{1-e^{-\tau D(is)}}{1-e^{-TD(is)}}\right]^{-1}, \ \tau = T - t:$$

$$|\Phi(s, t)| \leqslant C_1(1+\|\sigma\|)^{C_2}, \ C_1 > 0, \ C_2 \geqslant 0.$$

Из (18) и (19) теперь следует, что

$$\left|\frac{\partial R_{-1}(\sigma_{n_k}, t)}{\partial t}\right| \geqslant C_3 e^{n_k t} n_k^{-C_4}, \ C_3 > 0, \ C_4 > 0.$$

Выберем $u_{0k}(x) \equiv \varepsilon_{n_k} \exp\{i(\sigma_{n_k}, x)\}$,

$$\varepsilon_{n_k} = n_k^{-\left(\varepsilon + \frac{l}{\alpha}\right)}; \ u_{Tk}(x) \equiv 0. \text{ Тогда } |D^q u_{0k}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_{n_k}\|\sigma_{n_k}\|^{|q|} \leqslant \frac{C_5}{n_k^{\varepsilon}} \underset{k\to\infty}{\to} 0,$$

если $|q| \leqslant l$, $|D^2 u_{Tk}(x)| \equiv 0$. Но, как легко проверить,

$$\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial R_{-1}(\sigma_{n_k}, t)}{\partial t} u_{0k}(x),$$

и поэтому при $\tau = T - t$ достаточно малом

$$\left|\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t}\right| \geqslant C_3 e^{n_k t} n_k^{-C_4-\varepsilon-\frac{l}{\alpha}} \underset{k\to\infty}{\to} \infty.$$

Значит, задача (1) — (2) не является корректной в C_0.

Достаточность. Запишем задачу (1) — (2) в форме (4) — (5), полагая $\bar{u}(x, t) = (u(x, t), u'_t(x, t))$, и применим теорему 1 из [3], дающую достаточное условие корректной разрешимости задачи (4) — (5), в частности, в пространстве C_0. Условия вышеуказанной теоремы в нашей ситуации равносильны следующим: 1) $\Delta(\sigma) \neq 0$; 2) $D^q\ \tilde{R}(\sigma, t) \leqslant \leqslant A_q(t)(1+\|\sigma\|)^{\alpha_q}$, $A_q(t) > 0$, $\alpha_q > 0$, $\sigma \in \boldsymbol{R}^m$. Здесь $\tilde{R}(\sigma, t) = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} |R_{ij}(\sigma, t)|$; $R_{11}(\sigma, t) = R_{-1}(\sigma, t)$; $R_{12}(\sigma, t) = R_1(\sigma, t)$; $R_{21}(\sigma, t) = \frac{\partial R_{-1}(\sigma, t)}{\partial t}$; $R_{22}(\sigma, t) = \frac{\partial R_1(\sigma, t)}{\partial s}$.

Первое из этих условий совпадает с условиями (10) и (11). Справедливость второго устанавливается с помощью формулы Коши для производных функций $R_{ij}(\sigma, t)$, если предварительно оценить сами функции $R_{ij}(\sigma, t)$ в области вида $\Omega_{L,\lambda}$. Последнее осуществляется на основании утверждения 2 леммы.

§ 3. Корректная разрешимость в других пространствах. Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при любом $\gamma \in \boldsymbol{R}$ задача (1) — (2) корректно разрешима в пространстве C_γ.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и основано на использовании теоремы 1 из [3]; в качестве фигурирующей там функции $g(x)$ следует выбрать $g(x) = (1 + \| x \|)^{\gamma}$.

Корректная разрешимость в пространствах C_γ означает, вообще говоря, потерю гладкости решения относительно краевых функций $u_0(x)$ и $u_T(x)$, причем (конечный) порядок этой потери зависит от степенного порядка роста функции $R(\sigma, t)$. Однако возможна ситуация, когда решение $u(x, t)$ задачи (1)—(2) при $0 < t < T$ имеет большую гладкость, чем функции $u_0(x)$ и $u_T(x)$. В связи с этим дадим следующее

Определение 3. *Задача (1) — (2) называется сильно корректной в пространстве C_γ, если для любых функций $u_0(x)$ и $u_T(x)$ из C_γ задача (1) — (2) имеет единственное решение $u(x, t)$, которое при каждом $t \in]0, T[$ принадлежит пространству $C_\gamma^\infty = \bigcap_k C_\gamma^k$ (проективный предел пространств C_γ^k) и при любом $k \geqslant 0$ имеет место оценка*

$$\sup_{[0,T]} \| u(x, t) \|_{\gamma,k} \leqslant C_k (\| u_0(x) \|_{\gamma,0} + \| u_T(x) \|_{\gamma,0}). \tag{20}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (10) и (11) и*

$$\Lambda(\sigma) \leqslant -A_1 \| \sigma \|^h + A_2, \ A_1 > 0, \ h > 0. \tag{21}$$

Тогда при любом $\gamma \in \boldsymbol{R}$ задача (1) — (2) сильно корректна в пространстве C_γ.

Доказательство. Поскольку при выполнении (21) заведомо справедливо (16), то в силу теоремы 2 задача (1) — (2) корректна в C_γ, а потому имеет в C_γ не более одного решения. Обозначим $G_j(x, t)$ — обратные преобразования Фурье функций $R_j(s, t)$, для которых в силу леммы и условия (21) верна оценка

$$R(\sigma, t) \leqslant C_1 \exp\{c(t)[-A_1 \| \sigma \|^h + A_2]\} (1 + \| \sigma \|)^{C_2}, \tag{22}$$
$$C_1 > 0, \ A_1 > 0, \ h > 0, \ 0 < c(t) < T, \ \sigma \in \boldsymbol{R}^m.$$

Мы установим оценки функций $G_j(x, t)$, $j = \pm 1$, и их производных, показывающие, что корректны свертки $G_j(x, t) \ast \varphi(x)$, где $\varphi(x) \in C_\gamma$. Тогда, как видно из (9), функция

$$u(x, t) = G_{-1}(x, t) \ast u_0(x) + G_1(x, t) \ast u_T(x) \tag{23}$$

дает решение задачи (1) — (2).

Из оценок (12) и (22) в силу теоремы 1 § 7 гл. IV из [8] делаем заключение о справедливости оценки вида (22) в некоторой области $\Omega_{L,\lambda}$. Тогда, пользуясь формулой Коши, в которой выбирается в качестве контура интегрирования полукруг с центром в точке $\sigma \in \boldsymbol{R}^m$, лежащий в $\Omega_{L,\lambda}$, приходим к оценкам

$$D^q R(\sigma, t) \leqslant C(t) B^q(t) q^{q\beta} e^{-A(t)\|\sigma\|^h} \tag{24}$$

при некотором $\beta > 0$, $A(t) > 0$. Следовательно, функции $R_{-1}(\sigma, t)$ и $R_1(\sigma, t)$ являются элементами основного пространства $S^{\beta,B}_{\frac{1}{h},A}$, $A = A(t)$, $B = B(t)$ [8]. Поэтому их обратные преобразования Фурье $G_{-1}(x, t)$ и $G_1(x, t)$ — бесконечно дифференцируемые функции, принадлежащие пространству $S^{\frac{1}{h},A}_{\beta,B}$ и тем самым удовлетворяющие оценке

$$D^q G(x, t) \leqslant C_q \exp\{-B_1(t) \|x\|^{\frac{1}{\beta}}\}, \tag{25}$$

где $D^q G(x, t)$ имеет смысл, аналогичный $D^q R(\sigma, t)$, $B_1(t) > 0$ зависит от $B(t)$. Возвращаясь к формуле (23), убеждаемся, используя (25), что $u(x, t) \in C_\gamma^\infty$ и имеет место оценка (20). Теорема доказана.

Пусть $\alpha > 0$, $A > 0$; обозначим

$M^k_{\alpha,A} = \{\varphi \in C^k(\boldsymbol{R}^m) : \|\varphi\|_{\alpha,A,k} = \sup\limits_{R^m} \max\limits_{|q|<k} |D^q\varphi| \exp\{-A\|x\|^\alpha\} < \infty\}$,

$M^k_\alpha = \bigcup\limits_{A>0} M^k_{\alpha,A}$ — индуктивный предел $M^k_{\alpha,A}$.

Определение 4. *Задача (1) — (2) называется корректно разрешимой из пространства $M^{k_1}_\alpha$ в пространство $M^{k_2}_\alpha$, если для любых функций $u_0(x) \in M^{k_1}_\alpha$ и $u_T(x) \in M^{k_1}_\alpha$ задача (1) — (2) имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее при каждом $t \in]0, T[$ пространству $M^{k_2}_\alpha$, причем, если последовательности $u_{0k}(x)$ и $u_{Tk}(x)$ стремятся к нулю в топологии $M^{k_1}_\alpha$, то соответствующее решение $u_k(x, t)$ стремится к нулю в топологии $M^{k_2}_\alpha$.*

Обозначим $M_\alpha \bigcup\limits_{k>0} M^k_\alpha$.

Определение 5. *Задача (1) — (2) называется сильно корректной в пространстве M_α, если для любых $u_0(x)$ и $u_T(x)$ из M_α задача (1) — (2) имеет единственное решение $u(x, t)$ которое при каждом $t \in]0, T[$ принадлежит пространству $M^\infty_\alpha = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} M^k_\alpha$, причем, если последовательности $u_{0k}(x)$ и $u_{Tk}(x)$ стремятся к нулю в топологии M^0_α, то соответствующее решение $u_k(x, t)$ при любом $m \geqslant 0$ стремится к нулю в топологии M^m_α.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда при малом $\alpha > 0$ задача (1) — (2) сильно корректна в пространстве M_α.*

Аналогично доказательству теоремы 3 устанавливается утверждение теоремы 4.

§ 4. Некоторые замечания и примеры. Рассмотрим сначала уравнение (1) вида

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0 \quad (P(s) \equiv 0). \tag{26}$$

В данном случае $D^2(s) \equiv -4Q(s)$. Применяя теоремы 1 и 2, видим, что необходимым и достаточным условием корректной разрешимости задачи (26) — (2) в пространстве C_γ является требование

$$Q(i\sigma) \neq k^2\pi^2T^{-2},\ k \in \boldsymbol{Z},\ \sigma \in \boldsymbol{R}^m.$$

Так, это требование выполняется для уравнения $\Delta u + cu = 0$ при $c < 0$ и не выполняется, например, для волнового уравнения, уравнения Лапласа, уравнения $\Delta u + cu = 0$ при $c > 0$. Отметим, что для уравнения $\Delta u + cu = 0$, $c < 0$, выполнены условия теорем 3 и 4. Примером уравнения, для которого имеет место корректная разрешимость задачи Неймана в C_γ, но условие сильной корректности (21) не выполнено, служит уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x} + u(x,\ t) = 0.$$

Для следующих двух уравнений:

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} - u(x,\ t) = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} + 4\frac{\partial^3 u(x,\ t)}{\partial t \partial x^2} + 3\frac{\partial^4 u(x,\ t)}{\partial x^4} + u(x,\ t) = 0 \tag{28}$$

выполнены условия (10) и (11), и тем самым решение задачи Неймана для этих уравнений единственно в классе ограниченных функций. Однако в случае уравнения (27) имеем $\Lambda(\sigma) = -1$ и поэтому выполнено условие корректности в C_γ (16) (но не сильной корректности (21)!); для уравнения (28) функция $\Lambda(\sigma) = 2\sigma^2 - \sqrt{\sigma^4 - 1}$, и потому задача Неймана для этого уравнения не является корректной в классе C_0 ограниченных функций.

Список литературы: 1. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. Моск. гос. ун-та (А). 1938. **1**, № 7. С. 1—72. 2. *Борок В. М.* О корректной разрешимости краевой задачи в бесконечном слое для линейных уравнений с постоянными коэффициентами // Изв. АН СССР. 1971. **35**, № 4. С. 922—939. 3. *Борок В. М.* Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. 1971. **35**, № 1. С. 185—201. 4. *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений // Мат. сб. 1969. **79** (121), **2**. С. 293—304. 5. *Хермандер Л.* О делении обобщенных функций на полиномы // Математика 1959. **3** : 5. С. 117—131. 6. *Горин Е. А.* Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных // Успехи мат. наук. 1961. **16**, вып. 1. С. 91—118. 7. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. 396 с. 8. *Гельфанд И. М.*, *Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М., 1958. 307 с.

Поступила в редколлегию 21.10.87