УДК 517.977. 52

А. А. АСЛАНЯН

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Управляемые системы с разрывами фазовых траекторий встречаются во многих прикладных задачах, в которых рассматриваются воздействия импульсного характера [1, 2]. На некоторые классы таких систем в работах [2 — 4] распространяется принцип максимума [5].

В настоящей статье получены необходимые условия оптимальности для управляемых систем, испытывающих воздействие импульсного характера в моменты достижения фазовой траекторией заданной поверхности фазового пространства.

Рассмотрим управляемую систему с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\frac{dX}{dt} = F(X, u) \text{ при } R(X(t)) \neq 0; \\ X(t+0) = G(X(t-0), w) \text{ при } R(X(t-0)) = 0,\end{gathered} \qquad (1)$$

где $R(x) = 0$ — уравнение гладкой поверхности разрыва, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — фазовый вектор, $F = (F_1, \ldots, F_n)$, $G = (G_1, \ldots, G_n)$. Для того, чтобы ход управляемого процесса был определен на некотором отрезке времени $[T_0, T]$, достаточно, чтобы было задано начальное состояние X^0, управляющая функция $u(t)$, $T_0 \leqslant t \leqslant T$ и управляющие параметры $w_1, \ldots, w_N$ в каждый из моментов достижения фазовой траекторией $X(t)$ поверхности разрыва. Для определенности траектория системы (1) предполагается непрерывной слева в точках разрыва. Векторы $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$, $w_k = (w_{k,1}, \ldots, w_{k,r})$, являющиеся управляющими воздействиями, принимают значения в множествах U и W соответственно.

Для управляемой системы (1) рассматривается следующая задача оптимального управления: среди всех допустимых управляющих воздействий $\{u(t), w_1, \ldots, w_N\}$, переводящих систему из положения X^0 в положение X^1 на некотором интервале $[T_0, T]$, найти такое, для которого функционал

$$I = \int_{T_0}^{T} F_0(X(s), u(s))\, ds + \sum_{k=1}^{N} L_0(X(t_k - 0), w_k) \tag{2}$$

принимает наименьшее значение. Здесь t_k, $k = 1, \ldots, N$ — моменты достижения фазовой траекторией поверхности разрыва, N — число этих моментов на интервале $[T_0, T]$.

Предположим, что в моменты достижения траекторией $X(t)$ поверхности разрыва при любых управляющих параметрах выполнены условия

$$(R_x(X(t)),\ F(X(t), u(t)))|_{t=t_k-0} \neq 0; \ |R(G(X(t_k - 0), w))| \geqslant d > 0;$$
$$(R_x(G^{-1}(X(t), w)),\ F(X(t), u(t)))|_{t=t_k+0} \neq 0,$$

где R_X — градиент функции $R(X)$. Эти условия обеспечивают применимость теории возмущений.

Относительно функций, входящих в соотношение (1) — (2), предположим: $F_i(X, u)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ — определены и непрерывны вместе со своими частными производными по X на прямом произведении $E_n U$, $G_i(X, w)$, $L_0(X, w)$, $i = 1, \ldots, n$ — определены и непрерывно дифференцируемы на прямом произведении $E_n W$; $R(X_1, \ldots, X_n)$ — непрерывно дифференцируема и имеет ограниченные вторые частные производные; отображение $G(X, w)$ при фиксированном $w \in W$ взаимнооднозначно; множество U компактно, множество W компактно и выпукло. Допустимыми управляющими функциями $u(t)$, $T_0 \leqslant t \leqslant T$ считаются кусочно-непрерывные функции со значениями в U. Предполагается существование обоих пределов в точках разрыва и непрерывность слева функции $u(t)$ в этих точках, а также непрерывность управляющей функции в концах интервала $[T_0, T]$.

С каждой траекторией $X(t)$, $T_0 \leqslant t \leqslant T$ можно связывать множество моментов достижения этой траекторией поверхности разрыва. Это множество обозначим $C_x[T_0, T]$. В силу сделанных предложений $C_x[T_0, T]$ конечно.

Для формулировки теоремы, которая определяет необходимые условия, удовлетворяющие решение задачи оптимального управления (1) — (2), введем в рассмотрение координату $X_0(t)$, меняющуюся по закону $\frac{dX_0}{dt} = F_0(X, u)$, при $R(X(t)) \neq 0$; $X_0(t_k + 0) = X_0(t_k - 0) + L_0(X(t_k - 0), w_k) \equiv G_0(X_0(t_k - 0), X(t_k - 0), w_k)$ при $R(X(t_k - 0)) = 0$, и функции $H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i F_i(X, u)$; $M(t) = \sup_{v \in U} \times H(\psi(t), X(t), v)$; $h_k = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(t_k + 0)\, G_i(x(t_k - 0), w_k)$, $k = 1, \ldots, N$, где вектор-функция $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ является решением системы с импульсным воздействием

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H(\psi, X(t), u(t))}{\partial x_i} \text{ при } R(X(t)) \neq 0;$$
$$\psi(t_k - 0) = A_k^* \psi(t_k + 0) \text{ при } R(X(t_k - 0)) = 0, \tag{3}$$
$$i = 0, 1, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots, N,$$

а $x(t) = (X_0(t), X_1(t), \ldots, X_n(t))$. Невырожденная матрица A_k, $k = 1, \ldots, N$ имеет вид $A_k = \frac{\partial g_i(x(t), w)}{\partial x_j} + \Big[f(x(t_k + 0), u(t_k + 0)) - \frac{\partial g_i(x(t), w)}{\partial x_j} f(x(t), u(t)) \Big] \frac{R_x(x(t))}{(R_x(x(t)), f(x(t), u(t)))} \Big|_{\substack{t = t_k - 0 \\ w = w_k}}$

$(k = 1, \ldots, N, \; i = 0, \ldots, n, \; j = 0, \ldots, n)$, где $g = (G_0, \ldots, G_n)$, а $f = (F_0, \ldots, F_n)$.

Теорема. *Для того, чтобы управляющее воздействие* $\{u(t), w_1, \ldots, w_N\}$ *и соответствующая траектория* $X(t)$, $[T_0, T]$ *были решением задачи оптимального управ ения (1) — (2), необходимо существование ненулевого решения системы (3), такого, что: а) во всех точках отрезка* $[T_0, T]$, кроме, может быть, точки, выполнено условие максимума $H(\psi(t), X(t), u) = M(t)$, *б) в конечный момент времени выполнено* $\psi_0(T) \leqslant 0$, $M(T) = 0$, *в) производные функций* h_k, $k = 1, \ldots, N$ *по всем возможным относительно множества* W *направлениям в точках* w_k *неположительны.*

Доказательство теоремы проводится при помощи конструкций принципа максимума [5]. Отметим отдельные моменты доказательства, связанные с наличием разрывов у фазовых траекторий. Предположим, что X^1 не лежит на поверхности разрыва, т. е. $R(X^1) \neq 0$. Для системы (1) при сделанных предположениях справедливы теоремы существования и единственности решения задачи Коши, а также теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий. Пусть управляющему воздействию $\{u(t), w_1, \ldots, w_N\}$ в расширенном фазовом пространстве E_{n+1} соответствует траектория $x(t)$ с начальным условием $x(T_0) = x^0$. Траектория, соответствующая этому же управляющему воздействию, но с начальным условием $y(T_0) = x^0 + \varepsilon h + o(\varepsilon)$ в любой момент $t \notin C_X[T_0, T]$ имеет вид $y(t) = x(t) + \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon)$; $T_0 \leqslant t \leqslant T$ (4),

где ε — достаточно малый положительный параметр, $h = (h_0, \ldots, h_n)$ — произвольный вектор пространства E_{n+1}, $\delta x(t) = (\delta x_0(t), \ldots, \delta x_n(t))$ — удовлетворяет системе дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_i(x(t), u(t))}{\partial x_j} \delta x_j \text{ при } R(X(t)) \neq 0; \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$\delta x(t_k+0)=A_k\delta x(t_k-0)$ при $R(X(t_k-0))=0$, $k=1, 2, \ldots, N$, при начальном условии $\delta x(T_0)=h$. Система уравнений (5) позволяет каждому вектору $h=\delta x(T_0)$ с началом в точке $x(T_0)$ поставить в соответствие вектор $h_t=\delta x(t)$ с началом в точке $x(t)$. Линейное невырожденное преобразование, осуществляющее это соответствие, обозначим A_{t,T_0}. Элементы матрицы этого преобразования непрерывны слева по t на промежутке $[T_0, T]$. Так как $\delta x(t)=A_{t,T_0}h$, то соотношение (4) может быть записано в виде

$$y(t)=x(t)+\varepsilon A_{t,T_0}h+o(\varepsilon). \tag{6}$$

Сравнивая системы (3) и (5), можно получить следующее утверждение.

Лемма. *Если $\psi(t)=(\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ произвольное решение системы (3), а h — произвольный вектор, заданный в точке $x(T_0)$, то на всем отрезке $[T_0, T]$ скалярное произведение $(\psi(t), A_{t,T_0}h)$ постоянно.*

Осуществим вариацию управляющей функции $u(t)$ конечным числом вариаций Макшейна, а управления ω_k вариациями $\varepsilon\delta\omega_k$ такими, что $\omega+\varepsilon\delta\omega_k\in W$. Обозначим $x^*(t)$ — траекторию, отвечающую проварьированному управляющему воздействию и исходящую в момент T_0 из той же точки x^0. В конечный момент времени при достаточно малом ε имеет место следующее соотношение $x^*(T+\varepsilon\delta t)=x(T)+\varepsilon\Delta x+o(\varepsilon)$, где Δx, не зависящий от ε вектор, определяемый

$$\Delta x=f(x(T), u(T))\delta t+\sum_{i=1}^{s}A_{T,\tau_i}[f(x(\tau_i),v_i)-f(x(\tau_i),u(\tau_i))]\,\delta t_i+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}A_{T,t_k}\left[\frac{\partial g(x(t_k-0),\omega)}{\partial\omega}\,\delta\omega_k\right]\Bigg|_{\omega=\omega_k} \tag{7}$$

В (7) δt, δt_i, τ_i, v_i, s — параметры, определяющие вариацию управления $u(t)$. Векторы Δx, соответствующие различным варьированным управляющим воздействиям, образуют выпуклый конус K с вершиной в точке $x(T)$.

Пусть $\{u(t), \omega_1, \ldots, \omega_N\}$ — оптимальное управляющее воздействие, а $X(t)$, $T_0\leqslant t\leqslant T$ — оптимальная траектория. Тогда конус K не содержит луч L, исходящий из точки $x(T)$ и идущий в направлении отрицательной полуоси X_0 пространства E_{n+1}. Это значит, что существует плоскость их разделяющая, которая имеет вектор нормали $c=(c_0, \ldots, c_n)$ и также проходит через точку $x(T)$. Можно считать, что луч L лежит в положительном полупространстве, а конус K — в отрицательном. Обозначим $\psi(t)=$ $=(\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ решение системы (3) с начальным условием $\psi(T)=c$. Отсюда сразу следует, что $\psi_0(T)\leqslant 0$ и $(\psi(T), \Delta x)\leqslant 0$. (8)
Полагая в (7) $\delta t=0$, $s=1$, $\delta t_1=1$, $\delta t_2=\ldots=\delta t_s=\delta\omega_1=\ldots=$ $=\delta\omega_N=0$, получим $(\psi(T), A_{T,\tau_1}[f(x(\tau_1),v_1)-f(x(\tau_1),u(\tau_1))])\leqslant 0$. В силу леммы $(\psi(\tau_1), f(x(\tau_1), v_1))\leqslant(\psi(\tau_1), f(x(\tau_1), u(\tau_1)))$ для лю-

бой точки из интервала $[T_0, T]$, являющейся одновременно точкой непрерывности управления $u(t)$ и траектории $X(t)$. Учитывая то, что все рассматриваемые функции непрерывны слева, получим условие *а*) теоремы.

Полагая в (7) $\delta t_1 = \ldots = \delta t_s = \delta w_1 = \ldots = \delta w_N = 0$ и учитывая (8), получаем $(\psi(T), f(x(T), u(T)))\,\delta t \leqslant 0$. Так как δt может принимать как положительные, так и отрицательные значения и в конечной точке $t = T$ условие а) имеет место, то $(\psi(T), f(x(T), u(T))) = M(T) = 0$.

Полагая в (7) $\delta t = \delta t_1 = \ldots = \delta t_s = \delta w_2 = \ldots = \delta w_N = 0$ и учитывая (8), получаем $\left(\psi(T), \quad A_{T,\,t_1}\left[\frac{\partial g_1(x(t_1-0),\ w)}{\partial w}\,\delta w_1\right]\right)\Bigg|_{w=w_1} \leqslant 0.$

В силу леммы $\left(\psi(t_1+0), \quad \frac{\partial g_1(x(t_1-0),\ w)}{\partial w}\,\delta w_1\right)\Bigg|_{w=w_1} =$

$= \left(\frac{\partial h_1(\psi(t_1+0),\ x(t_1-0), w)}{\partial w}, \ \delta w_1\right)\Bigg|_{w=w_1} \leqslant 0$ для любого допустимого направления δw_1. Следовательно, производная функции h_1 по любому допустимому направлению относительно множества W в точке w_1 неположительна. Аналогично доказывается утверждение *в*) теоремы для функций h_k, $k = 2, \ldots, N$. Таким образом, в случае, когда конечная точка X^1 не лежит на поверхности разрыва, теорема доказана.

Пусть теперь $R(X_1) = 0$, а управляющее воздействие $\{u(t), w_1, \ldots, w_N\}$ и соответствующая ему траектория $X(t)$, $T_0 \leqslant t \leqslant T$ являются оптимальными. При достаточно малом $\tau > 0$ точка $X(T-\tau)$ не лежит на поверхности разрыва и, в силу приведенных выше выкладок, существует ненулевая функция $\psi_\tau(t)$, $T_0 \leqslant t \leqslant T-\tau$, удовлетворяющая условиям теоремы, применительно к участку $[T_0, T-\tau]$. Не ограничивая общности, можно считать $\|\psi_\tau(T_0)\| = 1$. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{\tau_k\}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$. В силу компактности единичной сферы конечномерного пространства можно выбрать такую подпоследовательность $\{\tau_i\}$, сходящуюся к нулю, что соответствующая последовательность $\{\psi\tau_i(T_0)\}$, $i = 1, 2, \ldots$ имеет предел ψ^0. Очевидно, что функция $\psi(t)$, $T_0 \leqslant t \leqslant T$, соответствующая траектории $X(t)$ и удовлетворяющая начальному условию $\psi(T_0) = \psi^0$, является той функцией, существование которой утверждается в теореме. Теорема полностью доказана.

Следует отметить, что функции $\psi_0(t)$ и $M(t)$ оказываются постоянными на всем промежутке $[T_0, T]$. Следовательно, проверку условия *б*) теоремы можно проводить в любой момент времени из этого промежутка.

Рассмотренная теорема позволяет получить необходимые условия оптимальности и в случае, когда функции $F(t, X, u)$, $F_0(t,$

X, u), $R(t, X)$ явно зависят от времени и являются непрерывно дифференцируемыми по переменной t, а также когда конечный момент времени фиксирован. Обе эти задачи сводятся к рассмотренной стандартным приемом расширения фазового пространства [5].

Если рассматривать задачу оптимального управления (1) — (2) с подвижными концами, то к соотношениям теоремы обычным образом добавляются условия трансверсальности.

Список литературы: 1. *Мезон Дж., Дикерсон В., Смит Д.* Вариационный метод оптимального разбиения. — Ракетная техника и космонавтика. 1965, № 11, с. 32—49. 2. *Волин Ю. М., Островский Г. М.* Принцип максимума для разрывных систем и его применение к задачам с фазовыми ограничениями. — Изв. вузов. Радиофизика, 1969, **12**, № 11, с. 1609—1621. 3. *Горбунов В. К., Нурахунова Г. У.* Процессы с управляемыми разрывами фазовых траекторий и моделирование производства с перемещением основных фондов. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1975, № 6, с. 55—61. 4. *Горбунов В. К.* К оптимизации процессов с управляемыми разрывами. — Науч. тр. Ташкентского ун-та, вып. 455, с. 19—25. 5. Математическая теория оптимальных процессов/Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрилидзе, Е. Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1969. — 384 с. 6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев.: Изд-во при Киев. гос. ун-те, 1980. — 80 с.

Поступила в редколлегию 15. 09. 81.