УДК 517.5

М. Г. ЗАЙДЕНБЕРГ

КРИТЕРИИ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ И СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ

В этой работе мы распространим известные критерии гиперболичности и гиперболической вложенности комплексных многообразий (см. [1—3]) на случай комплексных пространств. С этой целью в пункте 1.1 на комплексных пространствах введена псевдометрика Кобаяси — Ройдена — инфинитезимальный аналог псевдометрики Кобаяси, в гладком случае определенная Ройденом [4]. Основные результаты — теорема 1.1 и ее следствия — применяются в § 2 к исследованию голоморфных сечений семейств комплексных кривых на комплексных поверхностях[1]. Эти исследования продолжены в следующей работе автора[2], где даны их приложения к проблеме мероморфности решений функциональных уравнений.

§ 1. Критерии гиперболичности

1.1. Псевдометрика Кобаяси — Ройдена на комплексных пространствах. Пусть X и Y — комплексные пространства; $Hol(X, Y)$ — пространство всех голоморфных отображений $X \to Y$, снабженное компактно открытой топологией; TX — касательное пространство Зариского (см. например, [5]); $\operatorname{sing} X$ ($\operatorname{reg} X$) — множество особых (гладких) точек пространства X; $\Delta_r = \{|z| < r\} \subset \boldsymbol{C}$; $\Delta = \Delta_1$.

Определение 1.1. *Конусом Кобаяси — Ройдена пространства* $\boldsymbol{X}$ *будем называть множество*

$$Con\,X := \{v \in TX \mid \exists\varphi \in Hol(\Delta_r, X),\ \exists u \in T_0\Delta_r : v = d\varphi(u)\}.$$

Ясно, что множество $Con_p X := Con X \bigcap T_p X$, где $p \in X$, совпадает с множеством касательных векторов в точке p ко всевозможным росткам гладких комплексных кривых, проходящих через p, и является аффинным конусом, т. е. инвариантно относительно умножений на скаляры. Если $\varphi \in Hol(X, Y)$ и $d\varphi : TX \to TY$ — дифференциал, то $d\varphi(Con\,X) \subset Con\,Y$; в частности, конус $Con\,X$ биголоморфно инвариантен. Легко видеть, что $C_1(X) \subset Con\,X \subset C_3(X)$, где $C_i(X)$ ($i = \overline{1,5}$) — конусы Уитни[3].

Определение 1.2 (ср. [5]). *Псевдометрикой Кобаяси — Ройдена комплексного пространства X будем называть дифференциальную псевдометрику K_X, заданную на конусе $Con\,X$ формулой*

$$K_X(v) = \inf\{r^{-1} \mid \exists\varphi \in Hol(\Delta_r, X) : v = d\varphi(e_0)\},$$

где $e_0 := \left.\frac{d}{dz}\right|_{z=0} \in T_0\Delta_r$ *— единичный касательный вектор.*

---

[1] Здесь кривая (поверхность) — комплексное пространство чистой размерности 1 (2). Все комплексные пространства приведены.

[2] См. следующий выпуск данного сб.

[3] См. [6, гл. 2, пп. 8,9].

В силу леммы Шварца K_{Δ_r} совпадает с метрикой Лобачевского — Пуанкаре; все голоморфные отображения $X \to Y$ являются нерастягивающими в псевдометриках K_X и K_Y и, кроме того, K_X — максимальная из всех псевдометрик на $Con\, X$, для которых любое отображение $\varphi \in Hol(\Delta_r, X)$ является нерастягивающим.

По псевдометрике K_X можно обычным способом определить псевдорасстояние на связном комплексном пространстве X. Будем считать, что кусочно-гладкий путь γ в X *допустим*, если вектор скорости $\dot\gamma(t)$ принадлежит конусу $Con\, X$ при почти всех $t \in [0; 1]$. Для любой пары точек $p, q \in X$ множество $\Gamma(p, q)$ всех допустимых соединяющих их путей не пусто,— действительно, в X существует цепочка голоморфных кривых, соединяющая точки p и q и пересекающая множество особенностей $\operatorname{sing} X$ в конечном числе точек (см. [7], гл. VII, п. 2). Определяя функционал длины $l(\gamma) = \int\limits_0^1 K_X(\dot\gamma(t))\, dt$ и беря нижнюю грань $l(\gamma)$ по всем $\gamma \in \Gamma(p, q)$, получим внутреннее псевдорасстояние на X.

Теорема Ройдена о восстановлении [4] утверждает, что в случае, когда X гладко, это псевдорасстояние совпадает с обычной псевдометрикой Кобаяси k_X (см. [7]). Нам не известно, верна ли эта теорема в общем случае; тем не менее, как мы увидим ниже, и в общем случае псевдометрика Кобаяси — Ройдена хранит информацию о столь важных свойствах псевдометрики Кобаяси, как гиперболичность и гиперболическая вложенность.

Напомним, что связное комплексное пространство X называется *гиперболическим*, если псевдометрика Кобаяси k_X — метрика, и *полным гиперболическим*, если k_X — полная метрика [7]. Говорят, что связное относительно компактное аналитическое множество $Y \subset X$ *гиперболически вложено* в X, если для любой пары точек $p, q \in \overline{Y}$ $(p \neq q)$ найдутся в X такие их окрестности V_p, V_q, что $k_Y(V_p \cap Y, V_q \cap Y) > 0$ [8].

Напомним также [9], что на любом комплексном пространстве непрерывное разбиение единицы позволяет задать *эрмитову метрику*, т. е. непрерывную функцию G на TX, сужение которой на каждый слой T_pX $(p \in X)$ является положительно определенной квадратичной (эрмитовой) формой. Пару (X, G) называют *эрмитовым комплексным пространством*.

Лемма 1.1. *Пусть (X, G) — эрмитово комплексное пространство и Y — относительно компактное аналитическое множество в X.* (а) *Множество Y гиперболически вложено в X тогда и только тогда, когда для некоторой константы $c > 0$ выполнено неравенство*

$$K_Y \geqslant cG \mid Con\, Y. \tag{1}$$

(б) *Если X компактно, то его гиперболичность равносильна справедливости неравенства*

$$K_X \geqslant cG \mid Con\, X \tag{2}$$

с некоторой константой $c > 0$.

Доказательство. Утверждение (б) вытекает из (а), если в (а) положить $Y = X$. Докажем (а). Согласно теореме Кирнана ([8], теорема 1) гиперболическая вложенность Y в X равносильна тому, что для некоторой константы $c > 0$ и для всех $\varphi \in Hol(\Delta, Y)$, *где* $\Delta = \Delta_1$ *выполнено неравенство*

$$\varphi^*(cG) \leqslant K_\Delta. \tag{3}$$

Пусть $v \in Con\, Y$, тогда $v = d\varphi(u)$ при некоторых $\varphi \in Hol(\Delta, Y)$ и $u \in T_0\Delta$. Имеем: $\varphi^*(cG)(u) = c\|v\|_G$. Если выполнено (3), то $c\|v\|_G \leqslant K_\Delta(u)$ для всех таких φ и u, откуда

$$c\|v\|_G \leqslant \inf\{K_\Delta(u) \mid \exists\varphi \in Hol(\Delta, Y),\ u \in T_0\Delta : d\varphi(u) = v\} = K_Y(v), \tag{4}$$

т. е. выполнено неравенство (1). Обратно, пусть справедливо неравенство (1). Тогда в силу (4) $c\|v\|_G \leqslant K_\Delta(u)$, где $v = d\varphi(u)$ и $\varphi \in Hol(\Delta, Y)$, так что выполнено (3). Лемма доказана.

1.2. Целые кривые и критерии гиперболичности. Пусть (X, G) — эрмитово комплексное пространство, $\varphi \in Hol(\Delta_r, X)$ — голоморфная кривая в X, т. е. $\varphi \neq \mathrm{const}$, и $e(z) = \frac{d}{dz}$ — стандартное векторное поле в $\boldsymbol{C}$. Положим

$$\|\varphi\|_G = \sup_{z \in \Delta_r} \frac{\|d\varphi(e(z))\|_G}{rK_{\Delta_r}(e(z))} = \sup_{z \in \Delta_r} \frac{r^2 - |z|^2}{r^2} \|d\varphi(e(z))\|_G.$$

Если $\varphi \in Hol(\boldsymbol{C}, X)$ — целая кривая, положим

$$\|\varphi\|_G = \sup_{z \in \boldsymbol{C}} \|d\varphi(e(z))\|_G.$$

Определение 1.3. *Блоховской кривой*[1] *в эрмитовом комплексном пространстве* (X, G) *будем называть такую голоморфную (целую) кривую* φ, *что отображение* φ *нормировано, т. е.* $\|\varphi\|_G = 1$, *и центрировано, т. е.* $\|d\varphi(e_0)\|_G = 1$ *(здесь* $e_0 = e(0)$*).*

Пусть $r_n \uparrow r_0$, где $0 < r_n$, $r_0 \leqslant \infty$, и $\{\varphi_n \in Hol(\Delta_{r_n}, X)\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ (здесь $\Delta_\infty = \boldsymbol{C}$). Будем говорить, что *последовательность* $\{\varphi_n\}$ *сходится*, если при каждом фиксированном $r' < r_0$ последовательность сужений $\{\varphi_n \mid \Delta_{r'}\}_{r_n \geqslant r'}$ равномерно сходится.

Лемма 1.2 (о компактности). (а) *Сужение блоховской кривой на круг меньшего радиуса с центром в нуле является блоховской кривой.* (б) *Пределом сходящейся последовательности блоховских кривых служит блоховская кривая.* (в) *Из любой последовательности блоховских кривых, содержащихся в компакте* $Q \subset X$, *можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Мы опускаем доказательство этой леммы; оно несложно и использует лишь определение 1.3, теорему Арцеля — Асколи и то обстоятельство, что метрика rK_{Δ_r}, непрерывно и монотонно зависящая от r, при

[1] Термин заимствован в работе [10]. В [3] нормированные целые кривые были названы *комплексными прямыми*.

стремлении $r \to \infty$ равномерно на компактах аппроксимирует евклидову метрику в $\boldsymbol{C}$.

На случай эрмитовых комплексных пространств без изменений переносится репараметризационная лемма Броуди [1—2].

Лемма Броуди. *Пусть* $\psi: \Delta_r \to X$ *— такая голоморфная кривая в эрмитовом комплексном пространстве* (X, G), *что* $\| d\psi(e_0) \|_G > 1$. *Тогда найдется такое* $t\,(0 < t < 1)$ *и такой автоморфизм* α *круга* Δ_r, *что* $\varphi = \psi_t \circ \alpha : \Delta_r \to X$ *— блоховская кривая* (*здесь* $\psi_t(z) = \psi(tz)$).

Определение 1.4. *Голоморфная кривая* $\varphi: \Delta_r \to X$ *называется предельной для множества* $Y \subset X$, *если при каждом фиксированном* $r' < r$ *отображение* $\varphi\,|\,\Delta_{r'}$ *равномерно аппроксимируется отображениями* $\psi \in Hol(\Delta_{r'}, X)$, *где* $\psi(\Delta_{r'}) \subset Y$.

Верна следующая

Лемма 1.3 (см. лемму 2.10 в [3]). *Если в* X *существует целая кривая, предельная для аналитического множества* $Y \subset X$, *то* Y *не является гиперболически вложенным в* X.

Напомним такое понятие (см., например, [11], определение 6).

Определение 1.5. *Говорят, что аналитическое множество* $Y \subset X$ *обладает свойством локальной полной гиперболичности* (*л. п. г.*) *в* X, *если у каждой точки* $p \in \overline{Y}$ *найдется в* X *такая окрестность* V_p, *что* $V_p \cap Y$ *— полное гиперболическое комплексное пространство.*

Определение 1.6. (см. [3], определение 1.9). *Область* $U \subset X$ *будем называть полиэдральной, если* $\partial U \subset D$, *где* $D = \bigcup_\alpha D_\alpha$ *— объединение гиперповерхностей*[1] *в* X, *целиком лежащих вне* U. *Локально полиэдральной будем называть такую область* $U \subset X$, *что каждая точка* $p \in \partial U$ *обладает в* X *окрестностью* V_p, *для которой* $V_p \cap U$ *— полиэдральная область в* V_p.

В силу лемм 3.1 и 3.2 из [3], доказательства которых без изменений переносятся на случай комплексных пространств, локально полиэдральные области и их замкнутые аналитические подмножества обладают свойством л. п. г. Примерами полиэдральных областей служат дополнения к гиперповерхностям; полиномиальные полиэдры в $\boldsymbol{C}^n$, рассматриваемые, как области в $\boldsymbol{C}P^n$; выпуклые области в $\boldsymbol{C}^n$. Так как всякая строго псевдовыпуклая область с дважды гладкой границей в комплексном многообразии локально биголоморфно эквивалентна выпуклой области в $\boldsymbol{C}^n$, то такие области являются локально полиэдральными и, стало быть, обладают свойством л. п. г.

Лемма 1.4 (о дихотомии). *Пусть* Z *— связное комплексное пространство,* Y *— локально полное гиперболическое аналитическое множество в комплексном пространстве* X. *Если последовательность отображений* $\varphi_n \in Hol(Z, Y)$ *сходится к отображению* $\varphi_0 \in Hol(Z, X)$, *то либо* $\varphi_0(Z) \subset Y$, *либо* $\varphi_0(Z) \subset \partial Y$.

Доказательство. Допустим, что вопреки утверждению леммы $\varphi_0(Z) \cap Y \neq \varnothing$ и $\varphi_0(Z) \cap \partial Y \neq \varnothing$. Для каждой точки $p \in \overline{Y}$ фиксируем такую ее окрестность V_p, что пересечение $V_p \cap Y$ является полным

[1] То есть локально главных замкнутых аналитических множеств.

гиперболическим (см. определение 1.5). Если $p=\varphi_0(z)$, где $z\in Z$, то обозначим через Ω_z компоненту связности открытого множества $\varphi_0^{-1}(V_p)$, содержащую точку z. Покажем, что существует такая точка $z_0\in\varphi_0^{-1}(\partial Y)$, для которой $\varphi_0(\Omega_{z_0})\not\subset\partial Y$.

Положим $\Omega=\bigcup_{z\in\varphi_0^{-1}(\partial Y)}\Omega_z$. Если $\varphi_0(\Omega_z)\subset\partial Y$ для любой точки $z\in\varphi_0^{-1}(\partial Y)$, то $\Omega\subset\varphi_0^{-1}(\partial Y)$, а так как по определению $\Omega\supset\varphi_0^{-1}(\partial Y)$, имеем: $\Omega=\varphi_0^{-1}(\partial Y)$. По определению Y является замкнутым аналитическим множеством в некотором открытом множестве $U\subset X$, так что его граница $\partial Y=\overline{Y}\setminus Y=\overline{Y}\setminus U$ замкнута в X. Поэтому $\Omega=$ $=\varphi_0^{-1}(\partial Y)$ — замкнутое множество в пространстве Z; с другой стороны, по построению это множество открыто. Так как по условию Z связно и по предположению $\varphi_0^{-1}(\partial Y)\neq\varnothing$, то $\varphi_0^{-1}(\partial Y)=Z$. Но это противоречит второму предположению, согласно которому $\varphi_0^{-1}(Y)\neq\varnothing$.

Итак, в наших предположениях найдется такая точка $z_0\in Z$, что $p_0:=\varphi_0(z_0)\in\partial Y$ и $\varphi_0(\Omega_{z_0})\not\subset\partial Y$. Так как по условию $\varphi_0(Z)\subset\overline{Y}$, то существует такая точка $z_1\in\Omega_{z_0}$, для которой $q_0:=\varphi_0(z_1)\in(V_{p_0}\cap Y)$. Положим $p_n:=\varphi_n(z_0)$ и $q_n:=\varphi_n(z_1)$. Имеем $p_n,\ q_n\in Y$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, и $p_n\to p_0$, $q_n\to q_0$ при $n\to\infty$. Поскольку связное комплексное пространство линейно связно, то в Ω_{z_0} существует путь γ, соединяющий точки z_0 и z_1. Так как Ω_{z_0} локально линейно связно, то существует связная окрестность W компакта γ, относительно компактная в Ω_{z_0}. Так как $\varphi_0(\overline{W})\subset V_{p_0}$, то существует такое n_0, что $\varphi_n(\overline{W})\subset V_{p_0}$ при $n\geqslant n_0$.

Положим $r:=k_W(z_0,z_1)$. Голоморфные отображения $\varphi_n\,|\,W:W\to$ $\to(V_{p_0}\cap Y)$, $n\geqslant n_0$, не растягивают псевдометрику Кобаяси, поэтому

$$k_{(V_{p_0}\cap Y)}(p_n,\ q_n)\leqslant k_W(z_0,\ z_1)=r$$

при всех $n\geqslant n_0$. Пусть $B_{2r}(q_0)$ — шар радиуса $2r$ в метрике $k_{(V_{p_0}\cap Y)}$ с центром в точке q_0. Тогда $p_n\in B_{2r}(q_0)$ при всех достаточно больших значениях n. Так как замкнутые шары в полном гиперболическом комплексном пространстве $V_{p_0}\cap Y$ компактны (см. [7], гл. IV, § 5), то точка $p_0=\lim\limits_{n\to\infty}p_n\in\overline{B_{2r}(q_0)}$ принадлежит множеству $(V_{p_0}\cap Y)\subset Y$. Это противоречит тому, что $p_0\in\partial Y$. Лемма доказана.

Следствие. *Если аналитическое множество $Y\subset X$ обладает свойством л. п. г. в X, то любая предельная для Y голоморфная кривая в X содержится либо в Y, либо в ∂Y.*

Основные результаты § 1 содержатся в следующей теореме.

Теорема 1.1 *Пусть $(X,\ G)$ — эрмитово комплексное пространство, Y — аналитическое множество в X.*

(а) *Если пространство X компактно, то его гиперболичность равносильна тому, что X не содержит блоховских целых кривых.*

(б) *Если множество Y компактно и гиперболично, то оно обладает окрестностью U, гиперболически вложенной в X. В частности, любое* *достаточно близкое к Y аналитическое множество Y' также гиперболично.*

(в) *Если множество Y относительно компактно в X, то его гиперболическая вложенность в X равносильна тому, что X не содержит блоховских целых кривых, предельных для Y. Если к тому же Y обладает свойством л. п. г. в X, то гиперболическая вложенность Y в X равносильна тому, что множество Y не содержит блоховских целых кривых, а его граница ∂Y не содержит предельных для Y блоховских целых кривых; кроме того, выполнение этих условий влечет полную гиперболичность Y.*

Замечание. Пункт (а) теоремы обобщает критерий Броуди [1] гиперболичности компактных комплексных многообразий; второе утверждение пункта (б) обобщает теорему Броуди об устойчивости гиперболичности при малых деформациях комплексной структуры на компактном комплексном многообразии (см. теорему 3.1 в [1]). Пункт (в) усиливает теорему 2.1 из [3], которая, в свою очередь, служит обобщением теоремы Грина [2].

Доказательство. Начнем с доказательства первого утверждения пункта (в). Если множество Y гиперболически вложено в X, то в силу леммы 1.3 оно не допускает предельных целых кривых. Обратно покажем, что если Y не гиперболически вложено в X, то в X существует блоховская целая кривая, предельная для Y. Действительно, в силу леммы 1.1 (а) отсутствие гиперболической вложенности означает, что при любом $c > 0$ нарушено неравенство (1). Поэтому найдется такая последовательность векторов $\{v_n\} \subset ConY$, что $\| v_n \|_G = 1$ и $K_Y(v_n) < 1/n$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$. Согласно определению 1.2 псевдометрики Кобаяси — Ройдена K_Y при каждом $n = 1, 2, \ldots$ существует такая голоморфная кривая $\psi_n : \Delta_n \to Y$, что $d\psi_n(e_0) = c_n v_n$, где $c_n \in \boldsymbol{C}$ и $|c_n| = \| d\psi_n(e_0) \|_G > 1$. Благодаря лемме Броуди последовательность $\{\psi_n\}$ можно заменить последовательностью блоховских голоморфных кривых $\{\varphi_n : \Delta_n \to Y\}$, которая в силу леммы 1.2 о компактности содержит подпоследовательность, сходящуюся к блоховской целой кривой $\varphi_0 : \boldsymbol{C} \to X$. Очевидно, что кривая φ_0 является предельной для множества Y. Первое утверждение пункта (в) доказано.

Второе утверждение пункта (в) следует из первого и леммы 1.4 о дихотомии. Полная гиперболичность гиперболически вложенного аналитического множества, обладающего свойством л. п. г., доказана в лемме 1 в [8].

Считая в пункте (в), что X компактно и $Y = X$, получим утверждение (а).

Для доказательства (б) допустим, что компактное аналитическое множество $Y \subset X$ обладает убывающей фундаментальной последовательностью относительно компактных окрестностей $\{U_n\}$ в X, каждая из которых не является гиперболически вложенной в X. В силу доказанного в пункте (в) для каждого $n = 1, 2, \ldots$ замыкание $\overline{U_n}$ содержит блоховскую целую кривую. По лемме 1.2 о компактности из этой последовательности блоховских целых кривых можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к блоховской целой кривой φ_0, очевидно, содержащейся во множестве $Y = \bigcap \bar{U}_n$. Однако согласно «малой теореме Пикара» гиперболическое пространство Y не содержит целых кривых. Это доказывает пункт (б) и завершает доказательство теоремы.

В ряде случаев возможные положения предельных целых кривых удается «локализовать» (см., например, [3,12]). Примем следующие определения.

Определение 1.7. *Пусть $Y \subset X$ — аналитическое множество и $p \in Y$. Предельной звездой* $\mathrm{star}_p\, Y$ *назовем объединение образов всех предельных для Y голоморфных кривых в X, проходящих через точку p. Будем говорить, что покрытие $\bar{Y} = \bigcup_{i \in I} Y_i$ является слабо поглощающей стратификацией, если каждая предельная для Y голоморфная кривая содержится в одном из подмножеств* («*стратов*») *Y_i. Будем называть это покрытие сильно поглощающей стратификацией, если каждый страт Y_i $(i \in I)$ содержит предельные звезды всех своих точек (эквивалентное условие: если предельная для Y голоморфная кривая пересекает один из стратов Y_i, то она целиком в нем содержится).*

Ясно, что сильно поглощающая стратификация дизъюнктна, т. е. ее страты попарно не пересекаются. Нетрудно видеть, что дизъюнктная слабо поглощающая стратификация является сильно поглощающей; в дальнейшем будем называть такую стратификацию просто *поглощающей*.

Если Y фиксировано, то во множестве всех его (дизъюнктных) поглощающих стратификаций имеется (единственный) минимальный элемент. Им служит разбиение на классы, определяемое следующим отношением эквивалентности на $\bar{Y}$: точки p и q из $\bar{Y}$ эквивалентны, если их можно соединить конечной цепочкой предельных для Y голоморфных кривых.

Недостатком этого описания служит его неэффективность. Если Y связно и обладает свойством л. п. г., то в силу леммы о дихотомии один из стратов минимальной поглощающей стратификации совпадает с Y, а остальные содержатся в ∂Y. Из теоремы 1.1 вытекает такое.

Следствие. *Пусть Y — относительно компактное аналитическое множество в эрмитовом комплексном пространстве (X, G) и $\bar{Y} = \bigcup_{i \in I} Y_i$ — некоторая слабо поглощающая стратификация. Для гиперболической вложенности Y в X необходимо и достаточно, чтобы ни один из стратов Y_i $(i \in I)$ не содержал предельных для Y блоховских целых кривых.*

Другой принцип локализации связан с наличием голоморфных отображений в гиперболические пространства (ср. [3], § 4).

Предложение 1.1. *Пусть $f: \hat{X} \to X$ — собственное голоморфное отображение комплексных пространств, где $\hat{X}$ эрмитово.* (а) *Если пространство $\hat{X}$ компактно, а пространство X и каждый f-слой $f^{-1}(x)$, $x \in X$, гиперболичны, то $\hat{X}$ гиперболично.* (б) *Пусть Y — относительно компактное аналитическое множество в X и $\hat{Y}$ — аналитическое множество в $\hat{X}$, содержащееся в $f^{-1}(Y)$. Если Y гиперболи-*

чески вложено в X и ни один из f-слоев $f^{-1}(p)$, где $p \in \overline{Y}$, не содержит предельных для $\hat{Y}$ блоховских целых кривых, то $\hat{Y}$ гиперболически вложено в $\hat{X}$.

Доказательство сводится к несложной проверке выполнения условий пункта (а) (соответственно, пункта (в)) теоремы 1.1.

1.3. Гиперболическая вложенность двумерных полиэдральных областей. Пусть X — комплексная поверхность[1] и Γ — замкнутая кривая в X, т. е. замкнутое чисто одномерное аналитическое множество.

Определение 1.8. *Будем говорить, что точка $p \in \Gamma$ поглощает, если она служит одноточечным стратом минимальной поглощающей стратификации области $X \setminus \Gamma$, или, что то же, если* $\operatorname{star}_p(X \setminus \Gamma) = \{p\}$, *т. е. Γ не содержит проходящих через точку p предельных для $X \setminus \Gamma$ голоморфных кривых.*

В силу теоремы Гурвица точка $p \in \Gamma$, которая служит общим центром не менее чем двух локально главных ветвей кривой Γ, поглощает. В предложении 2.2 из [12] доказано, что любая точка $p \in (\operatorname{sing}\Gamma \cap \operatorname{reg} X)$ поглощает.

Обозначим через $\operatorname{sing}_0 \Gamma$ множество всех особых точек кривой Γ, удовлетворяющих одному из перечисленных выше условий (т. е. либо содержащихся в $\operatorname{reg} X$, либо служащих центром двух локально главных ветвей Γ). Положим $\operatorname{rg}_0 \Gamma = \Gamma \setminus \operatorname{sing}_0 \Gamma$.

Предложение 1.2. *Пусть (X, G) — эрмитова комплексная поверхность, $\{\Gamma_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ — совокупность замкнутых кривых в X, $\Gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$ и $Y \subset (X \setminus \Gamma)$ $(\partial Y \subset \Gamma)$ — относительно компактная в X полиэдральная область[2]. Если область Y не содержит блоховских целых кривых и каждая из кривых* $\Gamma_\alpha^* = \operatorname{rg}_0 [\partial Y \cap (\Gamma_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} \Gamma_\beta)]$, *где $\alpha \in A$, гиперболична, то Y — полная гиперболическая область, гиперболически вложенная в X.*

Доказательство. В силу сделанных выше замечаний стратификация $\overline{Y} = Y \cup [\bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha^*] \cup [\partial Y \setminus (\bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha^*)]$ локально полной гиперболической области Y (см. [3], лемма 3.1) является поглощающей и в наших предположениях ее страты не содержат блоховских целых кривых. Остается воспользоваться пунктом (в) теоремы 1.1 и ее следствием.

Простейшими изолированными особыми точками комплексной поверхности X являются ее *фактор-особенности*, т. е. точки, в которых X локально биголоморфно эквивалентна фактор-пространству $\boldsymbol{C}^2$ по свободному (в $\boldsymbol{C}^2 \setminus \{0\}$) действию конечной линейной группы.

Лемма 1.5. *Кривая Γ, проходящая через фактор-особенность p_0 поверхности X, является локально главной в точке p_0.*

Доказательство. Пусть V — окрестность точки p_0 в X, биголоморфно эквивалентная фактор-пространству W/G окрестности W точки $0 \in \boldsymbol{C}^2$ по конечной группе $G \subset GL(2, \boldsymbol{C})$, свободно действу-

---

[1] См. сноску 1 на стр. 1.

[2] См. определение 1.6.

ющей в $W\setminus\{0\}$. Можно считать, что кривая Γ замкнута в V. Пусть $\tilde{\Gamma}$ — ее прообраз в W и $\tilde{f}=0$ — уравнение кривой $\tilde{\Gamma}$ (здесь функция $\tilde{f}$ голоморфна в W). В силу G-инвариантности кривой $\tilde{\Gamma}$, при каждом $g\in G$ функция $\tilde{f}\circ g$ также определяет эту кривую. Значит, $\tilde{h}:=$ $=\prod\limits_{g\in G}\tilde{f}\circ g$ — G-инвариантная функция, голоморфная в W и определяющая кривую $\tilde{\Gamma}$. Поэтому она спускается до функции h, голоморфной на базе $V\setminus\{p_0\}$ неразветвленного накрытия $W\setminus\{0\}\to V\setminus\{p_0\}$. Нетрудно проверить, что фактор-особенность p_0 является нормальной особой точкой поверхности X. По теореме Римана, справедливой для нормальных комплексных пространств, функция h голоморфно продолжается в точку p_0. Ясно, что уравнение $h=0$ задает в V кривую Γ. Это доказывает лемму.

Следствие. *Если фактор-особенность p_0 поверхности X служит приводимой особой точкой кривой Γ, то $p_0\in \operatorname{sing}_0\Gamma$.*

Действительно, в силу леммы 1.5 ветви кривой Γ с центром в точке p_0 являются локально-главными.

§ 2. Семейства кривых и гиперболичность

2.1. Основные понятия. Под *семейством кривых* мы понимаем сюръективное голоморфное отображение $f\colon X\to S$ неприводимой комплексной поверхности X в гладкую кривую S (имеется в виду семейство f-слоев $\Gamma_s=f^{-1}(s)$, $s\in S$). Если поверхность X нормальна, то и семейство f будем называть *нормальным*.

Определение 2.1. *Пусть $\bar{f}:\bar{X}\to\bar{S}$ и $f:X\to S$ — два семейства кривых. Если $X\subset\bar{X}$, $S\subset\bar{S}$ — открытые по Зарискому подмножества и $f=\bar{f}\,|\,X$, то семейство f будем называть сужением $\bar{f}$, а $\bar{f}$ соответственно расширением f. Расширение $\bar{f}$ будем называть компактификацией, если поверхность $\bar{X}$ компактна и $A=\bar{X}\setminus X$ — кривая. Неприводимые компоненты кривой A, содержащиеся в слоях проекции $\bar{f}$, будем называть вертикальными, а прочие ее неприводимые компоненты — горизонтальными; их объединение обозначим через A_h.*

Определение 2.2. *Семейство f будем называть собственным, если отображение f собственно, и квазисобственным, если оно допускает собственное расширение $\bar{f}$.*

Определение 2.3. *Слой $\Gamma_s=f^{-1}(s)$ семейства $f\colon X\to S$ будем называть общим или невырожденным, если над некоторой окрестностью U точки s в S семейство f допускает гладкую послойную тривиализацию, т. е. поверхность $f^{-1}(U)$ гладка и имеется послойный диффеоморфизм $f^{-1}(U)\to U\times\Gamma_s$. Прочие слои будем называть вырожденными.*

Лемма 2.1. *Пусть $f:X\to S$ — нормальное компактифицируемое*[1]

[1] То есть обладающее компактификацией.

семейство кривых. Подмножество $\Sigma \subset S$ точек базы, f-слои над которыми вырождены, конечно.

Доказательство. Пусть $\bar{f}: \bar{X} \to \bar{S}$ — нормальная компактификация семейства f и $\pi: \tilde{X} \to \bar{X}$ — разрешение особенностей поверхности $\bar{X}$ и одновременно вложенной кривой $A = \bar{X} \setminus X$, т. е. $\tilde{A} = \pi^{-1}(A)$ — кривая с простыми нормальными пересечениями (см., например, [13]). Положим $\tilde{f} = \bar{f} \circ \pi$. По теореме Реммерта и по теореме Бертини — Сарда множество $\Sigma_c \subset \bar{S}$ критических значений отображения $\tilde{f}$ является собственным аналитическим подмножеством в $\bar{S}$ и потому конечно. Пусть $\Sigma_v = \tilde{f}(\tilde{A}_v)$, где $\tilde{A}_v = \tilde{A} \setminus \tilde{A}_h$, и $\Sigma_h \subset \bar{S}$ — множество точек ветвления проекции $\tilde{f} \mid \tilde{A}_h : \tilde{A}_h \mid \to \bar{S}$; ясно, что эти множества конечны. По теореме Эресмана над дополнением $\bar{S} \setminus \Sigma_c$ отображение $\tilde{f}$ служит проекцией гладкого локально тривиального расслоения; нетрудно видеть, что над дополнением $\bar{S} \setminus \Sigma_0$, где $\Sigma_0 = \Sigma_c \cup \Sigma_v \cup \Sigma_h$, сужение $\tilde{f} \mid (\tilde{X} \setminus \tilde{A})$ является подрасслоением этого расслоения. Положим $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \bar{f}(\operatorname{sing} \bar{X})$; тогда $\Sigma_1 \subset \bar{S}$ — конечное множество, содержащее, очевидно, Σ. Лемма доказана.

Определение 2.4. *Семейство кривых f будем называть примитивным, если общие f-слои связны.*

По теореме о штейновой факторизации (см. теорему 1.24 в [5]) для всякого собственного нормального семейства кривых $f: X \to S$ существует представление $f = \varphi \circ g$, где $g: X \to S_1$ — примитивное семейство кривых и $\varphi: S_1 \to S$ — конечное голоморфное отображение гладких кривых. Очевидно, что эта теорема распространяется на квазисобственные семейства; это позволяет во многих случаях в доказательствах ограничиться примитивными семействами. В случае, когда f — рациональная функция (полином) на $\boldsymbol{C}^2$, в представлении $f = \varphi \circ g$ можно считать φ и g рациональными функциями (соответственно полиномами).

Определение 2.5. *Будем говорить, что квазисобственное семейство кривых f является семейством общего типа, если общие f-слои — гиперболические кривые.*

2.2. Относительная гиперболическая вложенность и доминирование.

Определение 2.6 (ср. [14], определение 1.3). *Пусть $\bar{f}: \bar{X} \to S$ — собственное расширение квазисобственного семейства кривых $f: X \to S$. Будем говорить, что поверхность X f-относительно гиперболически вложена в $\bar{X}$, если каждая точка $s \in S$ обладает в S такой окрестностью V_s, что область $U_s^* = f^{-1}(V_s^*) \subset X$, где $V_s^* = V_s \setminus \{s\}$, гиперболически вложена в $\bar{X}$.*

Предложение 2.1. *Пусть $\bar{f}: \bar{X} \to S$ — собственное нормальное семейство кривых, $A_h \subset \bar{X}$ — «горизонтальная» локально-замкнутая кривая и $f = \bar{f} \mid (\bar{X} \setminus A_h)$ — квазисобственное сужение семейства f. Если каждая из кривых $\Gamma_s^* = \operatorname{rg}_0(\Gamma_s)$, где $s \in S$, гиперболична, то поверхность $X = \bar{X} \setminus A_h$ f-относительно гиперболически вложена в $\bar{X}$.*

Доказательство состоит в очевидной проверке выполнения условий предложения 1.2 для любой области $Y \subset X$ вида $Y = f^{-1}(\Delta^*(s))$, где $\Delta(s)$ — диск в S с центром в точке $s \in S$, не содержащий точек «множества вырождения» Σ семейства f, за исключением, быть может, самой точки s, и $\Delta^*(s) = \Delta(s) \setminus \{s\}$.

Из этого предложения в силу следствия 1.5 вытекает такое

Следствие. *Пусть в условиях предложения* 2.1 *все особые точки поверхности X являются фактор-особенностями и каждая из них служит приводимой особой точкой проходящего через нее f-слоя. Для того, чтобы поверхность X была f-относительно гиперболически вложена в $\overline{X}$, достаточно, чтобы все кривые* $\operatorname{reg} \Gamma_s$ $(s \in S)$ *были гиперболическими.*

Замечание. В действительности это условие является и необходимым. Это следует из лемм 1.3 и 1.2 (см. также следствие 1.3) в [12].

Определение 2.7 (ср. [15], п. 1.1). *Пусть $f: X \to S$ и $g: Y \to R$ — два семейства кривых. Говорят, что семейство g мероморфно (голоморфно) доминирует семейство f, если имеется коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Phi} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ R & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array},$$

в которой φ голоморфно, а отображение Φ мероморфно (соответственно голоморфно) и доминантно и для общей точки $r \in R$ сужение $\Phi \mid \Gamma_r(g): \Gamma_r(g) \to \Gamma_s(f)$, где $\Gamma_r(g) = g^{-1}(r)$ и $s = \varphi(r)$, $\Gamma_s(f) = f^{-1}(s)$,— биголоморфно. Если при этом $R = S$ и $\varphi = id_S$, то говорят, что семейства g и f бимероморфно эквивалентны.

Следующая теорема — центральное утверждение в этом параграфе.

Теорема 2.1. *Пусть $f: X \to S$ — нормальное компактифицируемое семейство кривых, имеющее общий тип. Существует такое нормальное семейство кривых $g: Y \to R$, мероморфно доминирующее f, и такая компактификация $\bar{g}: \overline{Y} \to \overline{R}$ семейства g, что поверхность Y g-относительно гиперболически вложена в $\overline{Y}$.*

Доказательство. Пусть $\bar{f}: \overline{X} \to \overline{S}$ — компактификация семейства f и $\tilde{\Sigma} = \overline{\Sigma} \cup \Sigma$ — множество всех точек $s \in \overline{S}$, $\bar{f}$- или f-слои над которыми вырождены (напомним, что по лемме 2.1 это множество конечно). Положим $E = A_h \cup \overline{\Gamma}_{\tilde{\Sigma}}$, где A_h — горизонтальная часть кривой $A = \overline{X} \setminus X$ и $\overline{\Gamma}_{\tilde{\Sigma}} = \bar{f}^{-1}(\tilde{\Sigma})$. Разрешая особенности поверхности $\overline{X}$ и кривой E, будем считать, что $\overline{X}$ — гладкая компактная поверхность и E — кривая с простыми нормальными пересечениями.

Далее воспользуемся известной конструкцией полустабильной редукции[1]. Эта конструкция, в частности, дает такое семейство $\bar{h}: \overline{Z} \to \overline{R}$ на гладкой компактной поверхности $\overline{Z}$, голоморфно доминирующее

[1] Теорема Делиня — Мамфорда о полустабильной редукции в аналитической ситуации изложена, например, в [16, §§ 8—10].

семейство $\bar{f}$, что выполнены следующие условия: (i) каждый $\bar{h}$-слой $\bar{\Gamma}_r(\bar{h}) = \bar{h}^{-1}(r)$, $r \in \bar{R}$, приведен, т. е. дивизор $D_r(\bar{h}) = \bar{h}^*(r)$ не имеет кратных компонент; (ii) прообраз $F \subset \bar{Z}$ кривой $E \subset \bar{X}$ содержит все вырожденные $\bar{h}$-слои (а также все вырожденные слои семейства $\bar{h} \mid (\bar{Z} \setminus F_h)$, где F_h — горизонтальная часть кривой F) и имеет простые нормальные пересечения.

Напомним вкратце построение семейства $\bar{h}$. В первую очередь доказывается существование такого разветвленного голоморфного накрытия $\varphi: \bar{R} \to \bar{S}$, для которого каждая точка $s \in \Sigma$ служит циклической точкой ветвления порядка, делящегося на кратность каждой неприводимой компоненты слоя $\bar{\Gamma}_s(\bar{f})$. Затем рассматривается на $\bar{R}$ индуцированное семейство кривых $\varphi^* \bar{f}$ и его нормализация $(\varphi^* \bar{f})_{\mathrm{norm}}$; наконец, искомое семейство $\bar{h}$ получается в результате минимального разрешения особенностей поверхности, несущей семейство $(\varphi^* \bar{f})_{\mathrm{norm}}$,— для него проверяется условие (i) и проверяется, что каждый его вырожденный слой имеет простые нормальные пересечения. Нам остается проверить выполнение условия (ii). Для этого заметим, что в наших предположениях A_h — гладкая кривая, трансверсально пересекающая каждый $\bar{f}$-слой в его гладких точках. Нетрудно убедиться в том, что подобными свойствами обладает и кривая F_h — прообраз A_h в $\bar{Z}$. Отсюда с очевидностью следует (ii).

Искомое семейство $\bar{g}$ будет получено из $\bar{h}$ в результате стягивания π некоторых исключительных компонент вырожденных $\bar{h}$-слоев. В итоге будет получена следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccc} Y & \hookrightarrow & \bar{Y} & \xleftarrow{\pi} & Z & \rightarrow & X & \hookleftarrow & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f \\ R & \hookrightarrow & \bar{R} & \xleftarrow{id_{\bar{R}}} & \bar{R} & \xrightarrow{\varphi} & \bar{S} & \hookleftarrow & S \end{array} \quad (5)$$

Здесь $R = \varphi^{-1}(S)$ и открытое по Зарискому подмножество $Y \subset \bar{Y}$ определено условием $\pi^{-1}(Y) = \Phi^{-1}(X)$. Голоморфное отображение π бимероморфно, потому композиция $\Phi \circ \pi^{-1}$ является мероморфным доминированием. Стягивание π будет определено так, что для семейства $\bar{g}$ окажутся выполненными условия следствия из предложения 2.1, гарантирующие g-относительную гиперболическую вложенность поверхности Y в $\bar{Y}$. Определению π посвящена оставшаяся часть доказательства.

Воспользовавшись штейновой факторизацией $\bar{h} = \varphi_1 \circ \bar{h}_1$, получим примитивное семейство кривых $\bar{h}_1: \bar{Z} \to \bar{R}_1$ (см. определение 2.4 и следующий за ним абзац). Поскольку $\bar{h}_1$ собственно, то все $\bar{h}_1$-слои связны. Положим $h_1 = \bar{h}_1 \mid (\bar{Z} \setminus F_h)$. Общий слой квазисобственного семейства h_1 совпадает с одной из неприводимых компонент соответствующего общего слоя семейства $h = \bar{h} \mid (Z \setminus F_h)$, который, в свою очередь, биголоморфно эквивалентен общему слою семейства f. Так как семейство f имеет общий тип, то и h_1 — семейство общего типа. Его вырожденные слои, очевидно, содержатся в кривой F; кроме того, они приведены (см. (i)).

Неприводимую компоненту $\overline{C}$ слоя $\overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1) = \overline{h}_1^{-1}(r)$, где $r \in \overline{R}$, будем называть *свободной* (—1)-*компонентой* (соответственно *свободной* (—2)-*компонентой*), если она рациональна, $C^2 = -1$ и $\overline{C} \cdot F_h \leqslant 1$ (соответственно $\overline{C}^2 = -2$ и $\overline{C} \cdot F_h = 0$). Таким образом, свободная (—1)-компонента $\overline{C}$ пересекает горизонтальную кривую F_h не более чем в одной точке и пересекает объединение $\overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1) \ominus \overline{C}$ остальных компонент слоя $\overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1)$ в единственной точке, а свободная (—2)-компонента $\overline{C}$ пересекает $\overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1) \ominus \overline{C}$ в двух точках и не пересекает кривую F_h. Действительно, из приведенности всех $\overline{h}_1$-слоев и равенства $\overline{C} \cdot \overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1) = 0$ следует, что $\overline{C}^2 = -[\overline{C} \cdot (\overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1) \ominus \overline{C})]$ и остается воспользоваться условием (ii) нормальности пересечений, в силу которого индексы пересечения указанных кривых совпадают с числом точек пересечения.

Если $\overline{C}$ — свободная (—1)- или (—2)-компонента слоя $\overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1)$, то соответствующая компонента связности C кривой $\Gamma_r^*(h_1) = \operatorname{reg}(\overline{\Gamma}_r \times \times (\overline{h}_1) \diagdown F_h)$ не гиперболична. Проверим справедливость обратного утверждения. Очевидно, что достаточно исключить следующие возможности:

(1) $\overline{C}$ — эллиптическая кривая, не пересекающая $\overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1) \ominus \overline{C}$ и кривую F_h;

(2) $\overline{C}$ — рациональная кривая, не пересекающая $\overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1) \ominus \overline{C}$ и пересекающая кривую F_h не более чем в двух точках.

В обоих случаях в силу связности слоя $\overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1)$ примитивного семейства $\overline{h}_1$ он должен быть неприводимым, т. е. $\overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1) = \overline{C}$. Кроме того, так как слой $\overline{\Gamma}_r(\overline{h})$ приведен, то $\overline{h}_1^*(r) = \overline{C}$ и в силу инвариантности арифметического рода в первом случае $\overline{h}_1$ — семейство эллиптических кривых, а во втором — семейство рациональных кривых. Из инвариантности индекса пересечения следует, что в случае (1) $F_h = \varnothing$, а в случае (2) $\overline{\Gamma}_\rho(\overline{h}_1) \cdot F_h \leqslant 2$ для каждого слоя $\overline{\Gamma}_\rho(\overline{h}_1)$, где $\rho \in \overline{R}$. В любом случае общие слои семейства h_1 не гиперболичны, что противоречит общности типа этого семейства.

Итак, мы показали, что каждая негиперболическая компонента кривой $\Gamma_r^*(h_1)$ содержится в одной из свободных (—1)- или (—2)-компонент слоя $\overline{\Gamma}_r(\overline{h}_1)$. Далее мы убедимся в том, что объединение всех таких компонент является исключительной кривой; набор этих кривых будет стянут отображением π.

По теореме Кастельнуово (—1)-компонента слоя, которая является исключительной кривой 1-го рода, может быть стянута в гладкую точку. Легко видеть, что если это свободная (—1)-компонента, то ее стягивание не нарушает справедливость условий (i) и (ii). Последовательными стягиваниями свободных (—1)-компонент вырожденных слоев семейства $\overline{h_1}$ можно добиться того, что в полученном семействе, за которым мы сохраним прежние обозначения, таких компонент не будет.

Нетрудно понять, что каждая свободная (—2)-компонента вырожденного слоя $\overline{\Gamma}_r(\bar{h}_1)$ является одним из звеньев максимальной линейной цепочки таких компонент. Две такие цепочки не пересекаются; каждая из них связна, а ее внутренние звенья не пересекают горизонтальную кривую F_h и компоненты слоя $\overline{\Gamma}_r(\bar{h}_1)$, не вошедшие в эту цепочку. Замкнутую цепочку из (—2)-кривых называют *циклом*, а незамкнутую — *зигзагом*.

Проверим, что ни в одном вырожденном слое $\overline{\Gamma}_r(\bar{h}_1)$ семейства $\bar{h}_1$ не может содержаться цикл. Действительно, такой цикл $O = \sum_{i=1}^{n} \overline{C}^i$ не пересекает кривую F_h и прочие компоненты слоя $\overline{\Gamma}_r(\bar{h}_1)$, так что в силу связности этого слоя должно быть $\overline{\Gamma}_r(\bar{h}_1) = O$, а так как кривая $\overline{h}_1^*(r)$ приведена, то $\overline{h}_1^*(r) = O$. Пусть $K_{\overline{Z}}$ — канонический дивизор поверхности $\overline{Z}$. По формуле присоединения получим

$$2\pi_a(O) - 2 = OK_{\overline{Z}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i K_{\overline{Z}} = \sum_{i=1}^{n} [(\overline{C}_i^2 + \\ + \overline{C}_i \cdot K_{\overline{Z}}) - \overline{C}_i^2] = \sum_{i=1}^{n} [(2\pi_a(\overline{C}_i) - 2) + 2] = 0$$

(здесь π_a — арифметический род), откуда $\pi_a(O) = 1$. Так как $O \cap F_h = \varnothing$ и $\overline{\Gamma}_r(\bar{h}_1) = O$, то $F_h = \varnothing$. Следовательно, $h_1 = \bar{h}_1$ и в силу инвариантности арифметического рода h_1 — семейство эллиптических кривых. Это вновь противоречит общности типа семейства h_1.

Пусть C — (—2)-зигзаг длины n. Его матрица пересечений противоположна картановской матрице типа A_n; в частности, она отрицательно определена, откуда, согласно известному критерию Мамфорда — Грауэрта, следует стягиваемость кривой C (т. е. C — исключительная кривая). При ее стягивании возникает двойная рациональная особенность поверхности типа A_n, локально биголоморфно реализуемая как особенность $V_n \subset \boldsymbol{C}^3_{x,\, y,\, z}$, $V_n = \{z^{n+1} - xy = 0\}$ (см., например, гл. III, § 5 в [16]). Такая особенность является фактор-особенностью (действительно, отображение $\boldsymbol{C}^2_{u,\, v} \ni (u, v) \mapsto (u^{n+1}, v^{n+1}, uv) \in V_n$ реализует факторизацию $\boldsymbol{C}^2$ под действием циклической группы порядка $n + 1$).

Если зигзаг C содержится в слое $\overline{\Gamma}_r(\bar{h}_1)$, то он пересекает кривую $\overline{\Gamma}_r(\bar{h}_1) \ominus C$ (объединение прочих компонент слоя $\overline{\Gamma}_r(\bar{h}_1)$) трансверсально в двух различных ее гладких точках (и не пересекает горизонтальную кривую F_h) Пусть $\overline{Y}$ — поверхность, полученная из $\overline{Z}$ в результате стягивания каждого (—2)-зигзага в вырожденных слоях семейства $\bar{h}_1$, и $\pi: \overline{Z} \to \overline{Y}$ — соответствующее голоморфное отображение (напомним, что в действительности π служит композицией последовательных стягиваний свободных (—1)-компонент с последующим одновременным стягиванием свободных (—2)-зигзагов). Тогда $\overline{Y}$ — нормальная поверхность и по теореме Римана существует голоморфное отображение $\overline{g}$, замыкающее коммутативную диаграмму (5). В силу сделанного выше замечания, каждая особая точка поверхности $\overline{Y}$ служит приводимой особой точкой одного из $\overline{g}$-слоев (каждый $\overline{g}$-слой является объединением π-образов нескольких $\overline{h}_1$-слоев) и не принадлежит горизонтальной кривой $B_h = \pi(F_h) \subset \overline{Y}$. Нетрудно видеть, что по построению все кривые $\operatorname{reg}(\Gamma_r(\overline{g}) \setminus B_h)$ $(r \in \overline{R})$ гиперболичны, так что выполнены все условия следствия из предложения 2.1, согласно которому поверхность $\tilde{Y} = \overline{Y} \setminus B_h$ $\tilde{g}$-относительно гиперболически вложена в $\overline{Y}$ (здесь $\tilde{g} = \overline{g} \mid \tilde{Y}$). Тем более поверхность $Y \subset \tilde{Y}$ g-относительно гиперболически вложена в $\overline{Y}$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Очевидно, что верен (с тем же доказательством) локальный вариант этой теоремы — для квазисобственных семейств кривых общего типа над кругом Δ с единственным (нулевым) вырожденным слоем. 2. Для семейств компактных кривых рода $p \geqslant 2$ аналог конструкции, приведенной в доказательстве теоремы, имеется в [15, п. 1.1], но без анализа гиперболической вложенности. В этой же ситуации близкое к теореме 2.1, но более сильное утверждение имеется в [14, теорема 5.2]. Пользуясь теоремой 2.1, можно проверить, что теорема 5.2 из [14] остается верной для некомпактных семейств кривых общего типа: каждое такое семейство после подходящей бимероморфной перестройки допускает компактификацию, в которой оно обладает относительной гиперболической вложенностью.

В следующей работе мы укажем приложения теоремы 2.1.

Список литературы: 1. *Brody R.* Compact manifolds and hyperbolicity // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. 235. P. 213—219. 2. *Green M. L.* The hyperbolicity of complement of 2n + 1 hyperplanes in general position in P^n, and related results // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. **66.** N 1. P. 109—113. 3. *Зайденберг М. Г.* Теоремы Пикара и гиперболичность // Сиб. мат. журн. 1983. **24,** № 6. С. 44—55. 4. *Royden H. L.* Pemarks on the Kobayashi metric // Lect. Notes Math. 1971. № 185. P. 125—137. 5. *Fischer G.* Complex analytic geometry // N. Y. e. a: Springer. 1976. 201p. 6. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества. М., 1985. 272 с. 7. *Кобаяси С.* Гиперболические многообразия и голоморфные отображения // Математика. Сб. пер. 1973. **17,** № 1. С. 47—96. 8. *Kiernan P.* Hyperbolically imbedded spaces and the big Picard theorem // Math. Ann. 1973. **204.** P. 203—209. 9. *Grauert H., Reckziegel H.* Hermitesche Metriken und normale Familien holomorpher Abbildungen // Math. Zeit. 1965. **89.** S. 108—125. 10. *Hahn K. T., Kim K. T.* Hyperbolicity of a complex manifold and other eguivalent properties // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. **91**, 1. P. 49—53. 11. Kiernan P., *Kobayashi S.* Holomorphic mappings into projective space with lacunary hyperplanes // Nagoya Math. J. 1973. 50. P. 199—216. 12. *Зайденберг М. Г.* О гиперболической вложенности дополнений к дивизорам и предельном поведении метрики Кобаяси—Ройдена // Мат. сб. 1985. **127,** 1. С. 55—71. 13. *Laufer H. B.* Normal two — dimensional singularities. Princeton, 1971. 161 p. 14. *Noguchi J.* Hyperbolic fibre spaces and Mordell's conjecture over function fields // Publ. RIMS, 1985. **21,** N 1. P. 27—46. 15. *Nishino T.* Nouvelles recherches sur les fonctions entieres de plusieurs variables complexes. (V) Fonctions qui se reduisent aux polynômes // J. Math. Kyoto Univ. 1975. 15, N 3. P. 527—553. 16. *Barth W., Peters C., Van de Ven A.* Compact complex surfaces. Berlin, 1984. 304 p.

Поступила в редколлегию 19.03.87