УДК 517.925.71

В. Р. СМИЛЯНСКИЙ

РЕШЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ И БОКОВОЙ ЗАДАЧИ СВЯЗИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА. I

Пусть задано уравнение

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(z)\, y^{(\nu)} = 0;\ p_\nu(z) = \sum_{\mu=\nu} a_{\nu,\mu} z^\mu,\ a_{n,n} = 1, \tag{1}$$

где $a_{\nu,\mu}$ — постоянные. Оно имеет регулярную особую точку $z = 0$ и иррегулярную (первого ранга) $z = \infty$. Если все корни λ_j уравнения $Q(\zeta) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,n} \zeta^\nu = 0$ различны, то уравнение (1) имеет формальные решения вида

$$\hat{\varphi}_j = z^{r_j} e^{\lambda_j z} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{j\nu} z^{-\nu},\ j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где r_j, $C_{j\nu}$ — постоянные. Фундаментальную систему решений уравнения (1) будем рассматривать в виде соответствующей однострочечной фундаментальной матрицы (ф. м.). Тогда к уравнению (1) непосредственно приложимы все определения, обозначения и факты, приведенные во введении к работе [1] (они предполагаются известными), а также результаты [1].

Для получения излагаемых ниже результатов использован метод, развитый в [1]. Решения $y_k(z)$ уравнения (1) представляются в виде контурных интегралов Лапласа

$$y_k(z) = e^{\lambda_k z} \int_{\Sigma_k} e^{z(\xi-\lambda_k)} v_k(\xi)\, d\xi, \quad k = \overline{1, n}, \tag{3}$$

(Σ_k — контур интегрирования). При дополнительных условиях (6), (7) функция $v_k(\zeta)$ решение уравнения Жордана — Похгаммера. Использованы также свойства решений этого уравнения из работы [2].

Полагаем, что нумерация λ_k выбрана из условия $\operatorname{Re}\lambda_\alpha z < \operatorname{Re}\lambda_{\alpha+1} z$ в секторе $l_1 < \arg z < l_2$. Пусть однострочечные ф. м. $z_{(\nu-1)L+1}(z)$ ($\nu = 1, 2, 3$) асимптотически базисны соответственно в С. С.

$$l_2 - \pi + (\nu - 1)\pi \leqslant \arg z < l_2 + (\nu - 1)\pi, \quad \nu = 1, 2, 3 \tag{4}$$

и такие, что для них $C_{j0} = 1$ в асимптотическом представлении (2). Как известно, $z_1(z) = z_{L+1}(z) F_1$, $z_{L+1}(z) = z_{2L+1}(z) F_2$, где F_1, F_2 — соответственно верхняя и нижняя треугольные постоянные матрицы с единичными элементами на главной диагонали. Матрицы F_1, F_2 дают решение боковой задачи связи. Введем обозначения

$$\begin{gathered}\gamma_{(k+m),\,(k+1)} = (k+m)(k+m-1)\ \ldots\ (k+1);\\ \gamma_{(k+1),\,(k+1)} \equiv (k+1), \quad \gamma_{kk} \equiv 1; \quad \gamma_{l,\,m} \equiv 1 \text{ при } l < m;\\ C^m_{(\xi+n)} \equiv \binom{\xi+n}{m} = \frac{(\xi+n)(\xi+n-1)\ \ldots\ (\xi+n-m+1)}{m!}; \ C^0_{\xi+n} = 1,\end{gathered} \tag{5}$$

где ξ — постоянная. Введем также постоянные q_k, p_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) и $q_n \equiv 1$. Далее будем рассматривать следующий частный случай уравнения (1):

$$a_{k,\,n} = q_k \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n); \tag{6}$$

$$\begin{gathered}a_{k,\,n-m} = q_{(k+m)}\gamma_{(k+m),\,(k+1)} C^m_{(\xi+n)} +\\ + p_{(k+m-1)}\gamma_{(k+m-1),\,(k+1)} C^{m-1}_{(\xi+n)};\\ m = \overline{1, n}, \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-m.\end{gathered} \tag{7}$$

Введем полиномы

$$\begin{gathered}Q(\xi) = q_n\xi^n + q_{n-1}\xi^{n-1} + \ldots + q_0;\\ k(\xi) = p_{n-1}\xi^{n-1} + p_{n-2}\xi^{n-2} + \ldots + p_0.\end{gathered} \tag{8}$$

Так как все λ_k по предположению различны, то отношение $k(\xi)/Q(\xi)$ может быть представлено в виде $k(\xi)/Q(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k/(\xi - \lambda_k)$ **(9)**, где α_k — постоянные.

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (1) *с коэффициентами* (6), (7): 1) *все* λ_k *различны;* 2) *все* r_k, α_k, *а также* ζ *не равны целому числу;* $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \zeta) \neq 0, -1, -2\ldots$; 3) *нумерация* λ_k *выбрана из условия* $\operatorname{Re}\lambda_k z < \operatorname{Re}\lambda_{k+1} z$ *в секторе* $l_1 < \arg z < l_2$.

Тогда элементы $[F_1]_{km}$ *матрицы* F_1 *и элементы* $[F_2]_{mk}$ *матрицы* F_2 *имеют вид*

$$[F_1]_{km} = \varkappa_{km}\delta_m; \quad [F_2]_{mk} = \varkappa_{mk}\delta_k e^{i2\pi \sum\limits_{\nu=k}^{m-1}(r_\nu+\zeta)};$$

$$r_k = -(\zeta + n + \alpha_k), \; m = k+1, \; k+2, \; \ldots, \; n, \; k = \overline{1, n}; \tag{10}$$

$$\delta_k = (1 - e^{-i2\pi(r_k+\zeta)}) = (1 - e^{i2\pi\alpha_k}); \tag{11}$$

$$\varkappa_{km} = \frac{e^{i2\pi r_m}\Gamma(1+n+\zeta+r_m)\prod\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m}}^{n}(\lambda_m-\lambda_\nu)^{(1+n+\zeta+r_\nu)}}{e^{i2\pi r_k}\Gamma(1+n+\zeta+r_k)\prod\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n}(\lambda_k-\lambda_\nu)^{(1+n+\zeta+r_\nu)}}, \tag{12}$$

где $\Gamma(1+n+\zeta+r_k)$ — гамма-функция и $(\lambda_k - \lambda_\nu) = (\lambda_\nu - \lambda_k)e^{i\pi}$, если $\nu < k$.

Ф. м. уравнения (1) в окрестности точки $z = 0$ может быть представлена в виде $\Psi^1(z) = S(z) z^\Delta$, где однострочечная матрица $S(z)$ голоморфна при $z = 0$, а Δ — некоторая постоянная матрица. Как известно, $\Psi^1(z) = z_1(z) T_{10}$, где T_{10} — постоянная неособая матрица («матрица связи»). Матрица T_{10} дает решение центральной задачи связи ([1]). Матрицу $\Psi^1(z)$ выбираем в виде ([1])

$$\Psi'(z) = \{\Psi_1'(z), \; \ldots, \; \Psi_n'(z)\} = \int\limits_{\Omega_n} X_\infty e^{z\zeta}\, d\zeta, \tag{13}$$

где о контуре Ω_n см. [1], а однострочечная матрица X_∞ составлена из контурных интегралов Жордано — Похгаммера и совпадает с X_∞ из работы [2]. Для выбранной ф. м. $\Psi'(z)$ первый член разложения элементов $\Psi_\nu'(z)\,(\nu = \overline{1, n})$ по z в окрестности точки $z = 0$ имеет вид

$$\Psi_\nu'(z) \approx z^{h_\nu - 1}u_{1\nu} \equiv z^{h_\nu-1}x_{\infty,0}^{(\nu)}e^{-i\pi(h_\nu-1)}(e^{-i2\pi(h_\nu-1)} - 1)\,\Gamma(-[h_\nu - 1]); \tag{14}$$

$h_1 = x$; $h_k = -(\zeta + n - 1)\,(k = \overline{2, n})$; $\Gamma(-[h_\nu - 1])$ — гамма-функция

$$x_{\infty,0}^{(j)} = e^{-i\pi(\zeta+n-1)}\int\limits^{(\lambda_{j-1}+,\,\lambda_j+,\,\lambda_{j-1}-,\,\lambda_j-)}(t-\lambda_1)^{\alpha_1-1}\ldots(t-\lambda_n)^{\alpha_n-1}\,dt, \tag{15}$$

$$j = \overline{2, n}, \; i = \sqrt{-1};$$

$$x_{\infty,0}^{(1)} = (1 - e^{i2\pi x})(1 - e^{i2\pi y})\,B(x, y); \tag{16}$$

$x = -(\alpha_1 + \ldots \alpha_n + \zeta)$; $y = \zeta + n$; $B(x, y)$ — бета-функция, где интеграл в выражении (15) взят по двойной петле.

Введем ф. м. $\Psi^*(z) \equiv \{\Psi_1^*(z), \; \ldots, \; \Psi_n^*(z)\} = \Psi'(z)\operatorname{diag}\{u_{11}^{-1}, \ldots, \ldots, u_{1n}^{-1}\}$. Первый член разложения элементов $\Psi_\nu^*(z)$ по z в окрест-