

УДК 517.925.71

В. Р. СМЛЯНСКИЙ

**РЕШЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ И БОКОВОЙ ЗАДАЧИ СВЯЗИ
ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ n -ГО ПОРЯДКА. I**

Пусть задано уравнение

$$\sum_{v=0}^n p_v(z) y^{(v)} = 0; \quad p_v(z) = \sum_{\mu=v}^n a_{v,\mu} z^\mu, \quad a_{n,n} = 1, \quad (1)$$

где $a_{v,\mu}$ — постоянные. Оно имеет регулярную особую точку $z = 0$ и иррегулярную (первого ранга) $z = \infty$. Если все корни λ_j уравнения

$Q(\xi) \equiv \sum_{v=0}^n a_{v,n} \xi^v = 0$ различны, то уравнение (1) имеет формальные решения вида

$$\hat{\varphi}_j = z^{r_j} e^{\lambda_j z} \sum_{v=0}^{\infty} C_{jv} z^{-v}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $r_j, C_{j\nu}$ — постоянные. Фундаментальную систему решений уравнения (1) будем рассматривать в виде соответствующей однострочечной фундаментальной матрицы (ф. м.). Тогда к уравнению (1) непосредственно приложимы все определения, обозначения и факты, приведенные во введении к работе [1] (они предполагаются известными), а также результаты [1].

Для получения излагаемых ниже результатов использован метод, развитый в [1]. Решения $y_k(z)$ уравнения (1) представляются в виде контурных интегралов Лапласа

$$y_k(z) = e^{\lambda_k z} \int_{\Sigma_k} e^{z(\xi - \lambda_k)} v_k(\xi) d\xi, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3)$$

(Σ_k — контур интегрирования). При дополнительных условиях (6), (7) функция $v_k(\xi)$ решение уравнения Жордана — Похгаммера. Используются также свойства решений этого уравнения из работы [2].

Полагаем, что нумерация λ_k выбрана из условия $\operatorname{Re} \lambda_{\alpha z} < \operatorname{Re} \lambda_{\alpha+1 z}$ в секторе $l_1 < \arg z < l_2$. Пусть однострочечные ф. м. $z_{(v-1)L+1}(z)$ ($v = 1, 2, 3$) асимптотически базисны соответственно в С. С.

$$l_2 - \pi + (v-1)\pi \leq \arg z < l_2 + (v-1)\pi, \quad v = 1, 2, 3 \quad (4)$$

и такие, что для них $C_{j0} = 1$ в асимптотическом представлении (2). Как известно, $z_1(z) = z_{L+1}(z) F_1$, $z_{L+1}(z) = z_{2L+1}(z) F_2$, где F_1, F_2 — соответственно верхняя и нижняя треугольные постоянные матрицы с единичными элементами на главной диагонали. Матрицы F_1, F_2 дают решение боковой задачи связи. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_{(k+m), (k+1)} &= (k+m)(k+m-1) \dots (k+1); \\ \gamma_{(k+1), (k+1)} &\equiv (k+1), \quad \gamma_{kk} \equiv 1; \quad \gamma_{l, m} \equiv 1 \text{ при } l < m; \\ C_{(\xi+n)}^m &\equiv \binom{\xi+n}{m} = \frac{(\xi+n)(\xi+n-1) \dots (\xi+n-m+1)}{m!}; \quad C_{\xi+n}^0 = 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где ξ — постоянная. Введем также постоянные q_k, p_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) и $q_n \equiv 1$. Далее будем рассматривать следующий частный случай уравнения (1):

$$a_{k, n} = q_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n); \quad (6)$$

$$\begin{aligned} a_{k, n-m} &= q_{(k+m)} \gamma_{(k+m), (k+1)} C_{(\xi+n)}^m + \\ &+ p_{(k+m-1)} \gamma_{(k+m-1), (k+1)} C_{(\xi+n)}^{m-1}; \\ m &= \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-m. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем полиномы

$$\begin{aligned} Q(\xi) &= q_n \xi^n + q_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + q_0; \\ k(\xi) &= p_{n-1} \xi^{n-1} + p_{n-2} \xi^{n-2} + \dots + p_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как все λ_k по предположению различны, то отношение $k(\xi)/Q(\xi)$

может быть представлено в виде $k(\xi)/Q(\xi) = \sum_{k=1}^n \alpha_k / (\xi - \lambda_k)$ (9),

где α_k — постоянные.

Теорема 1. Пусть для уравнения (1) с коэффициентами (6), (7); 1) все λ_k различны; 2) все r_k, α_k , а также ζ не равны целому числу; $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \zeta) \neq 0, -1, -2, \dots$; 3) нумерация λ_k выбрана из условия $\operatorname{Re} \lambda_k z < \operatorname{Re} \lambda_{k+1} z$ в секторе $l_1 < \arg z < l_2$.

Тогда элементы $[F_1]_{km}$ матрицы F_1 и элементы $[F_2]_{mk}$ матрицы F_2 имеют вид

$$[F_1]_{km} = \kappa_{km} \delta_m; [F_2]_{mk} = \kappa_{mk} \delta_k e^{i2\pi \sum_{v=k}^{m-1} (r_v + \zeta)};$$

$$r_k = -(\zeta + n + \alpha_k), m = k + 1, k + 2, \dots, n, k = \overline{1, n}; \quad (10)$$

$$\delta_k = (1 - e^{-i2\pi(r_k + \zeta)}) = (1 - e^{i2\pi\alpha_k}); \quad (11)$$

$$\kappa_{km} = \frac{e^{i2\pi r m} \Gamma(1 + n + \zeta + r_m) \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq m}}^n (\lambda_m - \lambda_v)^{(1+n+\zeta+r_v)}}{e^{i2\pi r k} \Gamma(1 + n + \zeta + r_k) \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^n (\lambda_k - \lambda_v)^{(1+n+\zeta+r_v)}}, \quad (12)$$

где $\Gamma(1 + n + \zeta + r_k)$ — гамма-функция и $(\lambda_k - \lambda_v) = (\lambda_v - \lambda_k) e^{i\pi}$, если $v < k$.

Ф. м. уравнения (1) в окрестности точки $z = 0$ может быть представлена в виде $\Psi^1(z) = S(z) z^\Delta$, где однострочечная матрица $S(z)$ голоморфна при $z = 0$, а Δ — некоторая постоянная матрица. Как известно, $\Psi^1(z) = z_1(z) T_{10}$, где T_{10} — постоянная неособая матрица («матрица связи»). Матрица T_{10} дает решение центральной задачи связи ([1]). Матрицу $\Psi^1(z)$ выбираем в виде ([1])

$$\Psi'(z) = \{\Psi'_1(z), \dots, \Psi'_n(z)\} = \int_{\Omega_n} X_\infty e^{z\xi} d\xi, \quad (13)$$

где о контуре Ω_n см. [1], а однострочечная матрица X_∞ составлена из контурных интегралов Жордано — Похгаммера и совпадает с X_∞ из работы [2]. Для выбранной ф. м. $\Psi'(z)$ первый член разложения элементов $\Psi'_v(z)$ ($v = \overline{1, n}$) по z в окрестности точки $z = 0$ имеет вид

$$\Psi'_v(z) \approx z^{h_v-1} u_{1v} \equiv z^{h_v-1} x_{\infty,0}^{(v)} e^{-i\pi(h_v-1)} (e^{-i2\pi(h_v-1)} - 1) \Gamma(-[h_v-1]); \quad (14)$$

$h_1 = x$; $h_k = -(\zeta + n - 1)$ ($k = \overline{2, n}$); $\Gamma(-[h_v-1])$ — гамма-функция

$$x_{\infty,0}^{(i)} = e^{-i\pi(\zeta+n-1)} \int_{j=\overline{2, n}, i=\overline{V-1}}^{(\lambda_{j-1} + \lambda_j +, \lambda_{j-1}^-, \lambda_j^-)} (t - \lambda_1)^{\alpha_1-1} \dots (t - \lambda_n)^{\alpha_n-1} dt, \quad (15)$$

$$x_{\infty,0}^{(1)} = (1 - e^{i2\pi x})(1 - e^{i2\pi y}) B(x, y); \quad (16)$$

$x = -(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \zeta)$; $y = \zeta + n$; $B(x, y)$ — бета-функция, где интеграл в выражении (15) взят по двойной петле.

Введем ф. м. $\Psi^*(z) \equiv \{\Psi_1^*(z), \dots, \Psi_n^*(z)\} = \Psi'(z) \operatorname{diag} \{u_{11}^{-1}, \dots, \dots, u_{1n}^{-1}\}$. Первый член разложения элементов $\Psi_v^*(z)$ по z в окрест-

ности точки $z = 0$ имеет вид $z^{2\nu-1}$ ($\nu = \overline{1, n}$). Как известно, $\Psi^*(z) = z_1(z) T_1^*$, где T_1^* — матрица связи.

Теорема 2. Пусть для уравнения (1) с коэффициентами (6), (7) выполнены условия 1), 2), 3) теоремы 1. Тогда

$$A) T_1^* = \text{diag} \{g_1, \dots, g_n\} T_1' \text{diag} \{u_{11}^{(-1)}, \dots, u_{1n}^{(-1)}\}. \quad (17)$$

Величины g_j даются выражениями

$$g_j = e^{-i\pi r_j} (e^{-i2\pi r_j} - 1) \Gamma(-r_j) v_j'(\lambda_j) \quad (j = \overline{1, n}); \quad (18)$$

$$v_j'(\lambda_j) = \left| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\lambda_j - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} \right| e^{-i\pi(\zeta+n)} B(i); \quad (19)$$

$$B(i) = (1 - e^{i2\pi\alpha_j}) (1 - e^{i2\pi(\zeta+n)}) B(\alpha_j, \zeta + n),$$

где $B(\alpha_j, \zeta + n)$ — бета-функция и $(\lambda_j - \lambda_k) = (\lambda_k - \lambda_j) e^{i\pi}$, если $k < j$.

Б) Ненулевые элементы $[T_1']_{\nu k}$ матрицы T_1' имеют вид

$$[T_1']_{\nu 1} = -e^{-i2\pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_\nu)} (1 - e^{-i2\pi x}) / \gamma_\nu, \quad \nu = \overline{1, n}; \quad (20)$$

$$[T_1']_{\nu \nu} = -\delta_{\nu-1} / \gamma_\nu, \quad \nu = \overline{2, n}, \quad (21)$$

$$[T_1']_{\nu, \nu+1} = \delta_{\nu+1} / \gamma_\nu, \quad \nu = \overline{1, n-1}; \quad (22)$$

где $\delta_\nu = (1 - e^{i2\pi\alpha_\nu})$; $\gamma_\nu = (1 - e^{i2\pi(\zeta + \alpha_\nu)})$.

Список литературы: 1. Смилянский В. Р. О множителях Стокса для одной системы первого ранга // Теория функций, функций. анализ и их прил. 1987. Вып. 48. С. 89—100. 2. Смилянский В. Р. Фундаментальные системы решений уравнения Жордана — Похгаммера // Изв. АН Киргиз. ССР. 1987. № 3. С. 12—15.

Поступила в редколлегию 02.11.86