УДК 517.53

Я. И. САВЧУК

О ВАЛИРОНОВСКИХ ДЕФЕКТНЫХ ВЕКТОРАХ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Будем использовать без пояснений основные результаты теории целых и аналитических кривых, а также обозначения из [1].

В работе решается задача о возможной структуре множества

$$V(\vec{G}) = \{\vec{a} \in \boldsymbol{C}^p \setminus \{\vec{0}\} : \Delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$$

валироновских дефектных векторов целых кривых $\vec{G} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^p$ конечного порядка.

Для мероморфных функций конечного порядка А. Хилленгрен [2] получил такой важный результат о множестве валироновских дефектных значений.

Теорема А. *Пусть* $E \subset \boldsymbol{C}$. *Следующие условия эквивалентны:* 1) *существует* $\alpha > 0$ *и числа* $a_1, a_2, \ldots \in \boldsymbol{C}$ *такие, что для произвольного* $a \in E$ *выполняется* $|a - a_n| < \exp(-e^{n\alpha})$ *для бесконечного числа значений* n; 2) *существуют мероморфная функция* f *конечного порядка и число* $x > 0$ *такие, что для произвольного* $a \in E$ *выполняется* $\Delta(a, f) > x$.

В работе автора [3] получен аналог этой теоремы для целых кривых $\vec{G}: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^p$ $(p \geqslant 3)$ конечного порядка.

Теорема Б. *Пусть* $U \subset \boldsymbol{C}^p$. *Следующие условия эквивалентны:* 1) *существует* $\alpha > 0$ *и векторы* $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \in \boldsymbol{C}^p$, $\|\vec{b}_j\| = 1$, *такие, что для любого* $\vec{a} \in U$ *выполняется*

$$\vec{a} \in \left\{ \vec{c} \in \boldsymbol{C}^p : \frac{|\vec{c}\,\vec{b}_n|}{\|\vec{c}\|} < \exp(-e^{n\alpha}) \right\}$$

для бесконечного множества значений n; 2) *существует целая кривая* $\vec{G}$ *конечного порядка и число* $x > 0$ *такие, что для произвольного* $\vec{a} \in U$ *выполняется* $\Delta(\vec{a}, \vec{G}) > x$.

Так как мероморфную функцию можем рассматривать как целую кривую $\vec{G}: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^2$ (см. [1]), то из выше приведенных результатов получим.

Следствие. *Для любой целой кривой* $\vec{G}: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^p$ $(p \geqslant 2)$ *конечного порядка множество* $V(\vec{G})$ *является счетным объединением множеств, удовлетворяющих условию* 2) *теоремы Б.*

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема. *Для любого множества* $A \subset \boldsymbol{C}^p$ $(p \geqslant 2)$, *которое является счетным объединением множеств, удовлетворяющих условию* 1) *теоремы Б, существует целая кривая* $\vec{G}: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^p$ *конечного порядка такая, что* $A \subset V(\vec{G})$.

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{s=1}^{\infty} U_s$, где каждое U_s удовлетворяет условию 1) теоремы Б; $\alpha_s > 0$ и $\vec{b}_n^{(s)} = (\vec{b}_{n1}^{(s)}, \ldots, \vec{b}_{np}^{(s)})$, $n = 1, 2, \ldots$ соответствуют U_s в смысле, указанном в условии 1) теоремы Б. Не уменьшая общности, считаем все $\alpha_s < 1/5$.

Разобьем интервал $[1; +\infty[$ на непересекающиеся множества

$$A_1, A_2, \ldots, A_s \ldots : A_s = \bigcup_{j=1}^{\infty} [2^j - 2^{j-s}, 2^j - 2^{j-s-1}[.$$

Для каждого s выберем систему чисел $M_{1s}, M_{2s}, \ldots$ из $\boldsymbol{R}$ такую, чтобы выполнялось следующее:

$$M_{1s} \text{ — такое наименьшее число, что}$$
$$E_{1s} = [M_{1s} + 1,\ M_{1s} + e^{\alpha_s}[\subset A_s;$$
$$M_{2s} \text{ — такое наименьшее число, что}$$
$$E_{2s} = [e^{\alpha_s} + M_{2s},\ e^{2\alpha_s} + M_{2s}[\subset A_s \setminus E_{1s};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$M_{ns} \text{ — такое наименьшее число, что}$$
$$E_{ns} = [e^{(n-1)\alpha_s} + M_{ns},\ e^{n\alpha_s} + M_{ns}[\subset A_s \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} E_{js};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Очевидно, такой выбор возможен, поскольку A_s состоит из полуинтервалов $A_{sj} = [2^j - 2^{j-s},\ 2^j - 2^{j-s-1}[$ таких, что $\operatorname{mes} A_{sj} \to \infty$ при $j \to \infty$.

При $j > p$ возьмем $\vec{c}_j = \vec{b}_n^{(s)}$, если

$$\exp((n-1)\alpha_s) + M_{ns} \leqslant j < \exp(n\alpha_s) + M_{ns},\ n \in \boldsymbol{N},\ s \in \boldsymbol{N}.$$

Для остальных $j > p$ считаем $\vec{c}_j = (1, 0, \dots, 0)$. Векторы $\vec{c}_0, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_p$ выбираем такими, чтобы кривая $\vec{G}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\vec{c}_j z^j}{j!}$ не проходила через точку $(0, 0, \dots, 0)$ и была с линейно независимыми компонентами.

Мы покажем, что целая кривая $\vec{G}(z)$ — искомая.

Зафиксируем $s \in \boldsymbol{N}$. Пусть $A_s(r) = A_s \cap\,]0, r]$. Нетрудно заметить, что при всех $r > r_0$ выполняется

$$\frac{\operatorname{mes} A_s(r)}{r} \geqslant 2^{-s-2}. \tag{1}$$

Так как $\frac{\operatorname{mes} E_{ns}}{\operatorname{mes} E_{n-1,\,s}} = e^{\alpha_s} < 2$, то при всех $\nu \geqslant \nu_0$ имеем

$$\frac{\operatorname{mes}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{js}\right) \cap A_{s\nu}\right)}{\operatorname{mes} A_{s\nu}} > \frac{1}{3}.$$

Тогда на основании (1) при $r > r_0$ выполняется

$$\frac{\operatorname{mes}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{js}\right) \cap [0, r[\right)}{r} \geqslant \frac{2^{-s-2}}{3}. \tag{2}$$

Если возьмем $r = \exp(n\alpha_s) + M_{ns}$, то

$$\operatorname{mes}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{js}\right) \cap [0, r[\right) = \operatorname{mes}\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_{js}\right) = \exp(n\alpha_s) - 1.$$

Учитывая (2), получим

$$M_{ns} \leqslant 3 \cdot 2^{s+2} \exp(n\alpha_s). \tag{3}$$

На основании этого неравенства выполняется

$$\frac{\exp(n\alpha_s) + M_{ns}}{\exp((n-1)\alpha_s) + M_{ns}} \geqslant \frac{\exp(n\alpha_s) + 3 \cdot 2^{s+2}\exp(n\alpha_s)}{\exp((n-1)\alpha_s) + 3 \cdot 2^{s+2}\exp(n\alpha_s)} =$$
$$= \frac{1 + 3 \cdot 2^{s+2}}{\exp(-\alpha_s) + 3 \cdot 2^{s+2}}.$$

Пусть теперь $\vec{a} \in U_s$. Нам нужно показать, что $\Delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0$. Так как для произвольного $\lambda \in C \setminus \{0\}$ выполняется $\Delta(\vec{a}, \vec{G}) = \Delta(\lambda\vec{a}, \vec{G})$, то для удобства считаем, что $\|\vec{a}\| = 1$. Тогда $|\vec{a}\,\vec{b}_n^{(s)}| \leqslant \exp(-e^{n\alpha_s})$ для бесконечного множества чисел n.

Обозначим $t = \left(\frac{1 + 3 \cdot 2^{s+2}}{\exp(-\alpha_s) + 3 \cdot 2^{s+2}}\right)^{1/2}$, $[\exp((n-1)\alpha_s) + M_{ns}] = N$, $Nt = r$. Из (3) следует, что

$$r < \exp(n\alpha_s) + M_{ns} \leqslant \exp(n\alpha_s) + 3 \cdot 2^{s+1}\exp(n\alpha_s) < 2^{s+4}\exp(n\alpha_s).$$

Поэтому $|\vec{a}\,\vec{b}_n^{(s)}| \leqslant \exp(-r \cdot 2^{-s-4})$. Отсюда ($|z| = r$)

$$|\vec{G}(z)\vec{a}| = \left|\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\vec{c}_j \cdot \vec{a}}{j!} z^j\right| =$$

$$= \left|\left(\sum_{j=0}^{N} + \sum_{j=[Nt^2]+1}^{\infty}\right)\frac{\vec{c}_j \cdot \vec{a}}{j!} z^j + \sum_{j=N+1}^{[Nt^2]} \frac{\vec{b}_n^{(s)} \cdot \vec{a}}{j!} z^j\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=0}^{N} + \sum_{j=[Nt^2]+1}^{\infty}\right)\frac{r^j}{j!} + |\vec{b}_n^{(s)} \cdot \vec{a}| \sum_{j=N+1}^{[Nt^2]} \frac{r^j}{j!} <$$

$$< (et)^N + (e/t)^{Nt^2} + \exp(-r \cdot 2^{-s-4}). \tag{4}$$

Так как $\|\vec{b}_n^{(s)}\| = 1$, то существует $k = k(n)$, такое, что $|b_{nk}^{(s)}| > 1/p$. Тогда

$$\|\vec{G}(z)\| \geqslant \left|\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{jk} z^j}{j!}\right| = \left|\left(\sum_{j=0}^{N} + \sum_{j=[Nt^2]+1}^{\infty}\right)\frac{{}_{jk} z^j}{j!} +\right.$$

$$\left. + b_{nk}^{(s)} \sum_{j=N+1}^{[Nt^2]} \frac{z^j}{j!}\right| = \left|b_{nk}^{(s)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} + \left(\sum_{j=0}^{N} + \sum_{j=[Nt^2]+1}^{\infty}\right) \times\right.$$

$$\left. \times \frac{c_{jk} - b_{nk}^{(s)}}{j!} z^j\right| \geqslant |e^z|/p - 2\left((et)^N + (e/t)^{Nt^2}\right). \tag{5}$$

Обозначим $\beta = \min\{\ln t, \arccos(1 - 2^{-s-4})\}$. Очевидно, что $\beta < \alpha_s < 1/5$. Поэтому $(et)^N < \exp\left(r\cos\frac{\beta}{3}\right)$, $(e/t)^{Nt^2} < \exp\left(r\cos\frac{\beta}{3}\right)$.

Подставляя это в (4) и (5), получим

$$\frac{\|\vec{G}(re^{i\varphi})\|}{|\vec{G}(re^{i\varphi})\vec{a}|} \geqslant \frac{\exp(r\cos\varphi)/p - 4\exp\left(r\cos\frac{\beta}{3}\right)}{2\exp\left(r\cos\frac{\beta}{3}\right) + \exp(r(1 - 2^{-s-4}))} \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left(r\left(\cos\varphi - \cos\frac{\beta}{3}\right)\right) \Big/ (3p) - 4/3.$$

Отсюда $$m(r, \vec{a}, \vec{G}) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\beta/3}^{\beta/3} \ln \frac{\|\vec{G}(re^{i\varphi})\|}{|\vec{G}(re^{i\varphi})\vec{a}|} d\varphi + O(1) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\beta/3}^{\beta/3} r\left(\cos\varphi - \cos\frac{\beta}{3}\right) d\varphi + O(1) = \frac{r}{\pi}\left(\sin\frac{\beta}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta}{3}\cos\frac{\beta}{3}\right) + O(1) > \frac{r\beta^3}{300} + O(1),\ r \to \infty. \tag{6}$$

Очевидно также, что

$$T(r, G) \leqslant r, \tag{7}$$

так как $\|\vec{G}(z)\| \leqslant \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{\|\vec{c}_j\| \cdot |z|^j}{j!} = e^r$.

Поскольку при $\vec{a} \in U_s$ неравенство $|\vec{a} \cdot \vec{b}_n^{(s)}| < \exp(-e^{n\alpha_s})$ выполняется для некоторой последовательности чисел $n \in \boldsymbol{N}$, стремящейся к ∞, то неравенство (6) выполняется для некоторой последовательности чисел $r \in \boldsymbol{R}$, стремящейся к $+\infty$. Учитывая (7), получим $\Delta(\vec{a}, \vec{G}) > > \frac{\beta^3}{300}$.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А.* Некоторые вопросы теории распределения значений мероморфных функций // Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., 1960. С. 263—300. 2. *Hyllengren A.* Valiron deficient values for meromorphic functions in the plane // Acta math. 1970. **124**, 1—2. P. 1—8. 3. *Савчук Я. И.* Распределение дефектных векторов целых кривых. К., 1985. С. 23—26. Деп. в УкрНИИНТИ 07.05.86. № 940.

Поступила в редколлегию 31.10.87