УДК 517.9

Ф. С. РОФЕ-БЕКЕТОВ

ЗАМЕЧАНИЕ В СВЯЗИ С МНОГОМЕРНЫМ ОБОБЩЕНИЕМ ТЕОРЕМЫ Г. ВЕЙЛЯ О САМОСОПРЯЖЕННОСТИ

По теореме Г. Вейля [1; 2, с. 571] операции

$$l[y] = -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} y + q(x) y, \quad a \leqslant x < \infty \tag{1}$$

при $0 < p(x) \in C^1$, $-\infty < C < q(x) \in C$ отвечает случай предельной точки в бесконечности, т. е. выражение (1) вместе с самосопряженным краевым условием при $x = a$ (например, $y'(a) = 0$) порождает самосопряженный оператор в $L_2[a, \infty)$ без краевых условий в бесконечности.

Покажем, что предложенная Ю. М. Березанским в [3, с. 491—495] абстрактная схема разделения переменных содержит в себе следующее обобщение названной теоремы Вейля на многомерный случай.

Теорема. *Пусть эллиптическое выражение*

$$l[u] = -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + q(x)\,u,\quad x\in \boldsymbol{R}^n \tag{2}$$

с гладкими коэффициентами $a_{ij}(x)$ *и непрерывным* $q(x)$ *допускает вне некоторого шара, скажем при* $|x| > N > 0$, *отделение радиальной переменной, т. е. представимо в виде*

$$l[u] = -\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(a(r)\,r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + q(r)\,u + \frac{b(r)}{r^2}L_\omega u, \tag{3}$$

где $r = |x|$; L_ω — *неотрицательный самосопряженный оператор с чисто дискретным спектром в* $L_2(\omega)$; ω — *единичная сфера;* $a(r) > 0$, $b(r) > 0$, $q(r) \geqslant C > -\infty$.

Тогда операция (2) *порождает на* $C_0^2(\boldsymbol{R}^n)$ *существенно самосопряженный в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ *оператор.*

Отметим, что операции $l = -\nabla p(r)\nabla + q(r)$ *отвечает в* (3) $a(r) = b(r) \equiv p(r)$, $L_\omega = -\Delta_\omega$, *где* Δ_ω — *оператор Лапласа — Бельтрами на сфере* ω.

Доказательство. Покажем, что оператор, заданный в $L_2(x \in \boldsymbol{R}^n : |x| > N)$ выражением (3) или, что то же, (2), на финитных функциях из C_0^2 с краевым условием

$$\frac{\partial}{\partial r}u(x)|_{r=N} = 0 \tag{4}$$

существенно самосопряжен. Отсюда по теореме 1.4 из [3, с. 385] будет следовать существенная самосопряженность оператора (2) в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$.

Итак, пусть $(0 \leqslant)\, \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \cdots$ — спектр L_ω, а P_j — соответствующие ортопроекторы в $L_2(\omega)$. Тогда оператор L, отвечающий (3), (4) в

$$L_2(|x| \geqslant N) = L_2([N,\infty),\, r^{n-1}dr) \otimes L_2(\omega),$$

представим в виде

$$L = \bigoplus\sum_{j=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(a(r)\,r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \left(q(r) + \mu_j\frac{b(r)}{r^2}\right)\right\}\otimes P_j,$$

и его существенная самосопряженность в силу [3, с. 492] эквивалентна существенной самосопряженности в $L_2([N,\infty),\, r^{n-1}dr)$ каждого из операторов

$$l_j[u] = -\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(a(r)\,r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \left(q(r) + \mu_j\frac{b(r)}{r^2}\right)u,\quad u'(N) = 0. \tag{5}$$

Покажем, что каждой операции $l_j[u]$, $j = 1, 2, \ldots$, отвечает случай предельной точки при $r \to +\infty$, откуда и вытекает справедливость теоремы. Поскольку в случае предельного круга Вейля все решения уравнения $l_j[u] = \lambda u$ при любом $\lambda \in \boldsymbol{C}$ принадлежат $L_2([N,\infty),\, r^{n-1}dr)$, достаточно проверить, что каждое из уравнений $l_j[u] = Cu$ имеет решение, не принадлежащее $L_2([N, \infty), r^{n-1}\,dr)$. Имеем в силу (5) при $u(N) = 1$, $u'(N) = 0$:

$$a(r)\, r^{n-1} u'(r) = \int_N^r (q(t) - C + \mu_j b(t) - Ct^{-2})\, u t^{n-1}\, dt, \tag{6}$$

$$u(r) = 1 + \int_N^r u'(t)\, dt \geqslant 1 \notin L_2([N, \infty), r^{n-1}\, dr),$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Следствие 1. *Оператор* $Lu = -\nabla(p(r)\nabla u) + q(r)u$ *при* $p(r) > 0$, $q(r) > C > -\infty$ *существенно самосопряжен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, $(p'(0) = 0)$.

Известно [4], что существенная сомосопряженность оператора (2) влечет за собой совпадение пространств $\overset{\circ}{H} = H$, где $\overset{\circ}{H}$ есть замыкание $C_0^2(\boldsymbol{R}^n)$ в энергетической норме, иначе — в метрике обобщенного интеграла Дирихле:

$$\|u\|^2 = \int_{\boldsymbol{R}^n} \left[\sum a_{ij}(x)\, u_{x_i} u_{x_j} + (q(x) - C + 1)\, u^2\right] dx,$$

H — множество функций из $W^1_{2,\,\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$ с конечной энергетической нормой.

Поэтому, в частности, из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Пополнение в энергетической норме*

$$\|u\|^2 = \int_{\boldsymbol{R}^n} (p(r)\,|\nabla u|^2 + q(r)\,|u|^2)\, dx \tag{7}$$

множества $C_0^1(\boldsymbol{R}^n)$ *совпадает с пополнением в той же норме совокупности тех функций из* $C^1(\boldsymbol{R}^n)$, *для которых эта норма конечна. Здесь* $p(r) > 0$ *и* $q(r) \geqslant 1$ — *непрерывны.*

Действительно, хотя в (6) $p(r) \in C^1$, однако при $p(r) \in C$ легко построить $p_1(r) \in C^1$, такую, что норма (7) при замене p на p_1 переходит в эквивалентную.

Утверждение следствия 2 при $p(r) \geqslant C > 0$, $q(r) \equiv 1$, $n = 3$ установлено другим путем в [5]. Это же при $n = 2$ верно без сферической симметричности p [6, § 2.7].

Список литературы: 1. *Weyl H.* Über gewöhnliche Differential gleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen // Gottinger Nachrichten. 1909. S. 37—64. 2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. М., 1966. 1064 с. 3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., 1965. 800 с. 4. *Уральцева Н. Н.* О несамосопряженности в $L_2(R^n)$ эллиптического оператора с быстро растущими коэффициентами // Записки науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1969. 14. С. 288—294. 5. *Лаптев С. А.* О замыкании в метрике обобщенного интеграла Дирихле // Дифференц. уравнения. 1971. 7, № 4. С. 727—736. 6. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л., 1985. 416 с.

Поступила в редколлегию 30.12.87