УДК 517.982

М. И. ОСТРОВСКИЙ

ПАРЫ РЕГУЛЯРИЗУЕМЫХ ОБРАТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕРЕГУЛЯРИЗУЕМОЙ СУПЕРПОЗИЦИЕЙ

Пусть X и Y — банаховы пространства. Множество линейных непрерывных инъективных операторов, действующих из X в Y, будем обозначать $L_0(X, Y)$, а в случае, если $X = Y$, просто $L_0(X)$. Ясно, что для $A \in L_0(X, Y)$ существует обратный оператор A^{-1}, который определен, вообще говоря, не на всем Y, а лишь на образе оператора A, и может не быть непрерывным. В теории некорректных задач среди таких операторов выделяют подкласс регуляризуемых.

Определение [1, с. 179]. *Пусть $A \in L_0(X, Y)$. Последовательность отображений $R_n : Y \to X$ ($n \in N$) называется регуляризатором для оператора A^{-1}, если для любого $x \in X$ имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \{ \| x - R_n y \| : y \in Y, \ \| y - Ax \| \leqslant 1/n \} = 0.$$

Если для оператора A^{-1} существует регуляризатор, то он называется регуляризуемым.

Определение 2. *Будем говорить, что банахово пространство X обладает свойством регуляризуемости суперпозиции (и записывать $X \in RS$), если для любых $A, B \in L_0(X)$ из регуляризуемости A^{-1} и B^{-1} следует регуляризуемость $(BA)^{-1}$.*

В работе [2] доказано, что $c_0 \notin RS$. С другой стороны, известно [1, с. 193], что в квазирефлексивном банаховом пространстве (т. е. в пространстве, канонический образ которого во втором сопряженном имеет конечную коразмерность) для любого $A \in L_0(X)$ обратный оператор A^{-1} регуляризуем, и, следовательно, все квазирефлексивные пространства обладают свойством RS.

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию свойства RS.

Будем использовать принятые в теории банаховых пространств терминологию и обозначения (см. [1, 3, 4]). Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность банаховых пространств, Y — пространство с фиксированным безусловно монотонным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Множество последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых $x_i \in X_i$ и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|_{X_i} e_i$ сходится, наделенное естественными операциями векторного пространства и нормой $\| x \| = \| \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|_{X_i} e_i \|_Y$, является, очевидно, банаховым пространством. Это пространство называется прямой суммой пространств $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ по пространству Y и обозначается $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus X_i)_Y$.

Теорема 1. *Пусть банахово пространство X изоморфно прямой сумме сепарабельных нерефлексивных пространств $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ по некоторому пространству Y. Тогда $X \notin RS$.*

Примерами пространств, удовлетворяющих условиям теоремы 1, являются c_0, l_1, $C(0, 1)$, $L_1(0, 1)$, A, H_1. Эти пространства изоморфны соответственно прямым суммам $(\sum \oplus c_0)_{c_0}$, $(\sum \oplus l_1)_{l_1}$, $(\sum \oplus C(0, 1))_{c_0}$, $(\sum \oplus L_1(0, 1))_{l_1}$, $(\sum \oplus A)_{c_0}$, $(\sum \oplus H_1)_{l_1}$. Для первых четырех пространств изоморфизм устанавливается непосредственно. Для пространств A и H_1 его существование установил П. Войтащик (1979).

Доказательство теоремы 1 разобьем на два этапа. Первый — нахождение общего условия на банахово пространство X, при котором $X \notin RS$ (предложение 1). Второй — доказательство того, что прямые суммы указанного вида этому условию удовлетворяют (теорема 2).

Нам понадобится критерий регуляризуемости обратных линейных операторов в терминах нормирующих подпространств и w^*-производных.

Определение 3. *Подпространство (не обязательно замкнутое) $M \subset X^*$ называется нормирующим, если отлична от нуля его характеристика Диксмье* [1, с. 29]:

$$r(M) = \inf_{x \in S(X)} \sup_{f^* \in S(X^*) \cap M} |f^*(x)|,$$

($S(X)$ — единичная сфера пространства X).

Определение 4 [1, с. 49]. *w^*-производной подпространства $M \subset X^*$ называется множество $M_{(1)}$ всех пределов w^*-сходящихся последовательностей из M. Дальнейшие производные определяются индуктивно: для ординала $\alpha > 1$ полагаем $M_{(\alpha)} := \bigcup_{\beta<\alpha} ((M_{(\beta)})_{(1)})$.*

Теорема [1, с. 47, 189]. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство, $A \in L_0(X, Y)$. Регуляризуемость оператора A^{-1} эквивалентна каждому из следующих двух условий: 1) A^*Y^* — нормирующее подпространство в X^*, т. е. $r(A^*Y^*) > 0$; 2) $(A^*Y^*)_{(1)} = X^*$.*

При доказательстве этой теоремы используется следующий результат С. Банаха (см. [1, с. 47]): для сепарабельного банахова пространства X и произвольного подпространства $M \subset X^*$ имеем

$$(r(M) > 0) \leftrightarrow (M_{(1)} = X^*). \tag{1}$$

Пусть M — тотальное, но не нормирующее подпространство в X^*. Через X_M обозначим пополнение пространства X по норме $\|x\|_M = \sup_{f^* \in S(X^*) \cap M} |f^*(x)|$.

Говоря о прямой сумме двух банаховых пространств, будем иметь в виду суммы по l_2, т. е. для $(y, z) \in Y \oplus Z$ полагаем $\|(y, z)\| = (\|y\|_Y^2 + \|z\|_Z^2)^{1/2}$.

Предложение 1. *Пусть X, Y, Z_1 — сепарабельные банаховы пространства, и пусть X изоморфно прямой сумме $Y \oplus Z_1$. Предположим, что существуют* а) *подпространство $M \subset Y^*$, удовлетворяющее условию $M \neq M_{(1)} \neq M_{(2)} = Y^*$* (2); б) *банахово простран-*

ство Z_2 с $\dim Z_2 = \dim Z_1$, *такие, что пространство* $Y_M \oplus Z_2$ *изоморфно подпространству в* X. *Тогда* $X \notin RS$.

Доказательство состоит в построении операторов A и B, фигурирующих в определении 2. Обозначим через $K: Y \to Y_M$ оператор естественного вложения. Существующее согласно предположению изоморфное вложение $Y_M \oplus Z_2$ в X обозначим через D. Пусть функционалы $\{z_i^*\}_{i \in \Theta} \subset S(Z_1^*)$, где Θ — подмножество мощности $\dim Z_1$ в N, выбраны так, что порожденное ими подпространство в Z_1^* является нормирующим. Возьмем некоторую минимальную систему $\{z_i\}_{i \in \Theta} \subset S(Z_2)$. Определим операторы $T: Z_1 \to Z_2$, $A_1: Y \oplus Z_1 \to Y_M \oplus Z_2$ и $A \in L_0(X)$ равенствами $Tz = \sum\limits_{i \in \Theta} 2^{-i} z_i^*(z) z_i$, $A_1(y, z) = (Ky, Tz)$, $A = DA_1$.

Докажем регуляризуемость оператора A^{-1}, т. е. что $r(A^*X^*) > 0$. Так как D — изоморфное вложение, то по теореме Хана — Банаха имеем $D^*X^* = (Y_M \oplus Z_2)^*$ и, следовательно, $A^*X^* = A_1^*(Y_M \oplus Z_2)^*$. Из вида оператора A_1 следует, что $A_1^*(Y_M \oplus Z_2)^* = K^* Y_M^* \oplus T^* Z_2^*$. Поэтому неравенство $r(A^*X^*) > 0$ эквивалентно тому, что подпространства $K^* Y_M^* \subset Y^*$ и $T^* Z_2^* \subset Z_1^*$ являются нормирующими.

Из теоремы о биполяре следует, что $K^* Y_M^* = M_{(1)}$, а из соотношений (1), (2) — что подпространство $M_{(1)} \subset Y^*$ является нормирующим. То, что подпространство $T^* Z_2^* \subset Z_1^*$ является нормирующим, следует из такого непосредственно проверяемого включения: $\{z_i^*\}_{i \in \Theta} \subset T^* Z_2^*$.

Перейдем к построению оператора B. Из определения пространств Y_M видно, что M канонически вкладывается в Y_M^* и является нормирующим подпространством в нем. Так как сужение оператора D на Y_M является изоморфным вложением, то функционалам из M естественно соответствуют функционалы, заданные на подпространстве $DY_M \subset X$. Обозначим через N множество всевозможных продолжений этих функционалов на все X. Нетрудно проверить (см. [5, с. 364]), что подпространство $N \subset X^*$ является нормирующим. Так как пространство X сепарабельно, то можно найти последовательность $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S(N)$, натягивающую нормирующее подпространство в X^*. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторая минимальная последовательность из $S(X)$. Определим оператор $B \in L_0(X)$ равенством $B(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f_i^*(x) x_i$. Из минимальности последовательности $\{x_i\}$ вытекает, что подпространство $B^*X^* \subset X^*$ содержит последовательность $\{f_i\}$ и, следовательно, является нормирующим. Поэтому B^{-1} регуляризуем.

Осталось доказать, что подпространство $A^*B^*X^* \subset X^*$ не является нормирующим. Для этого покажем, что сужения функционалов из $A^*B^*X^*$ на Y образуют не нормирующее подпространство в Y^*. Из определения операторов A и B вытекает, что эти сужения содержатся в сильном замыкании подпространства $M \subset Y^*$. То, что подпространство M (а значит и его сильное замыкание) не является нормирующим, вытекает из $M_{(1)} \neq Y^*$ и соотношения (1). Предложение доказано.

Замечание. Нетрудно видеть, что проведенные рассуждения доказывают следующее. Пусть сепарабельные банаховы пространства X_1 и X_2 таковы, что X_1 представимо в виде прямой суммы $X_1 = Y \oplus Z_1$, и в Y^* найдется подпространство M, удовлетворяющее условию (2), и такое, что для некоторого банахова пространства Z_2 с $\dim Z_2 = \dim Z_1$ пространство $Y_M \oplus Z_2$ изоморфно подпространству в X_2, а X_3 — произвольное бесконечномерное банахово пространство. Тогда найдутся такие операторы $A \in L_0(X_1, X_2)$ и $B \in L_0(X_2, X_3)$, что A^{-1} и B^{-1} регуляризуемы, а $(BA)^{-1}$ — нет.

Теорема 2. *Пусть* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — *последовательность сепарабельных нерефлексивных пространств, а* $X = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus X_i)_Y$. *Тогда в* X^* *найдется такое подпространство* M, *что* $M \neq M_{(1)} \neq M_{(2)} = X^*$, *и* X_M *изоморфно* X.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая характеризация сепарабельных нерефлексивных пространств.

Теорема 3. *Для того чтобы сепарабельное банахово пространство* Z *было нерефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы в* Z^* *существовала последовательность векторов* $\{z_j^*\}_{j=1}^{\infty}$, *удовлетворяющая условиям*

$$3)\ w^* - \lim_{j\to\infty} z_j^* = 0;\ \| z_j^* \| \leqslant 1;$$

$$4)\ (\exists\, \omega > 1/10)(\exists\, z^{**} \in Z^{**},\ \| z^{**} \| \leqslant 1)(\forall\, j \in N)\ (z^{**}(z_j^*) = \omega);$$

$$5)\ r(\operatorname{lin}(\{z_j^* - z_k^*\}_{j,k=1}^{\infty}) \geqslant 1/100.$$

Замечание. Постоянные 1/10 и 1/100 заведомо не являются точными. Для нас важно лишь то, что они не зависят от пространства Z.

Доказательство теоремы 2. Для каждого натурального i через Y_i обозначим некоторую гиперплоскость (т. е. ядро ненулевого линейного функционала) в пространстве X_i. Ясно, что пространства $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ нерефлексивны, а также, что X изоморфно прямой сумме $Y \oplus (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus Y_i)_Y$. В соответствии с этим векторы пространства X будем записывать в виде $x = \{\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty};\ \{u_i\}_{i=1}^{\infty}\}$, где $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ — такая последовательность скаляров, что $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ — проекция вектора x на Y, а $u_i \in Y_i$ $(i \in N)$ — проекции вектора x на Y_i $(i \in N)$.

Обозначим через e_i^* $(i \in N)$ координатные функционалы базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Нетрудно проверить, что X^* допускает следующее описание $X^* = \{x^* = \{\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty};\ \{u_i^*\}_{i=1}^{\infty}\}:\ \beta_i$ — скаляры, $u_i^* \in Y_i^*;\ \| x^* \|_{X^*} = \sup_n (\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i^* \|_{Y^*}^2 + \| \sum_{i=1}^{n} \| u_i^* \|_{Y_i^*} e_i^* \|_{Y^*}^2)^{1/2} < \infty\}$ с естественными операциями векторного пространства. Двойственность X и X^* определяется равенством $x^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i + \sum_{i=1}^{\infty} u_i^*(u_i)$.

Выше было отмечено, что пространства Y_i нерефлексивны. В силу теоремы 3 для каждого $i \in N$ можно указать последовательность $\{y_{ij}^*\}_{i=1}^{\infty}$ векторов из Y_i^* так, чтобы выполнялись условия

$$6)\ w^* - \lim_{j\to\infty} y_{ij}^* = 0,\ \|y_{ij}^*\| \leqslant 1;$$

$$7)\ (\exists\, \omega_i > 1/10)(\exists\, y_i^{**} \in Y_i^{**},\ \|y_i^{**}\| \leqslant 1)(\forall\, j \in N)$$
$$(y_i^{**}(y_{ij}^*) = \omega_i);$$

$$8)\ r(\mathrm{lin}(\{y_{ij}^* - y_{ik}^*\}_{j,k=1}^{\infty})) \geqslant 1/100.$$

Пусть последовательность вещественных чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $0 < \varepsilon_i < 1$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$. В качестве M возьмем линейную оболочку векторов $g_{ij}^* \in X^*$ $(i,\ j \in N)$, определенных равенствами $g_{ij}^* = \{\{0, \ldots, 0,\ \varepsilon_i,\ 0, \ldots\};\ \{0, \ldots,\ 0,\ y_{ij}^*,\ 0, \ldots\}\}$, где ε_i и y_{ij}^* стоят на i-х местах в соответствующих последовательностях.

Чтобы установить изоморфизм пространств X и X_M, достаточно показать, что существуют постоянные c и C, $0 < c < C < \infty$ такие, что для любого вектора $x \in X$, имеющего вид $x = \{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, 0, \ldots\};\ \{u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots\}\}$, имеет место неравенство

$$c\|x\| \leqslant \|\{\{\alpha_i/\varepsilon_i\};\ \{u_i\}\}\|_M \leqslant C\|x\|. \tag{3}$$

По определению M-нормы имеем $\|\{\{\alpha_i/\varepsilon_i\};\ \{u_i\}\}\|_M = \sup\{\sum\limits_{i,j} \tau_{ij} \times g_{ij}^*(\{\{\alpha_i/\varepsilon_i\};\ \{u_i\}\})\};\ \sum\limits_{i,j} \tau_{ij} g_{ij}^*$ — конечная линейная комбинация; $\|\sum\limits_{i,j} \tau_{ij} g_{ij}^*\|_{X^*} \leqslant 1\}$.

Из безусловной монотонности базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ вытекает безусловная монотонность базисной последовательности $\{e_i^*\}_{i=1}^{\infty}$. Используя условие 7) и определение g_{ij}^*, можем записать следующее

$$1 \geqslant \|\sum_{i,j} \tau_{ij} g_{ij}^*\|_{X^*} \geqslant \|\sum_i \|\sum_j \tau_{ij} y_{ij}^*\| e_i^*\|_{Y^*} \geqslant$$
$$\geqslant \|\sum_i |y_i^{**}(\sum_j \tau_{ij} y_{ij}^*)| e_i^*\|_{Y^*} \geqslant \|\sum_i |\sum_j \tau_{ij}| \omega_i e_i^*\|_{Y^*} \geqslant$$
$$\geqslant \|\sum_i |\sum_j \tau_{ij}| e_i^*\|_{Y^*}/10.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\|\{\{\alpha_i/\varepsilon_i\};\ \{u_i\}\}\|_M = \sup\{\sum_{i,j} \tau_{ij}\alpha_i + \sum_{i,j} \tau_{ij} y_{ij}^*(u_i):$$
$$\|\sum \tau_{ij} g_{ij}^*\| \leqslant 1\} \leqslant \|\sum_i \alpha_i e_i\|_Y \|\sum_i |\sum_j \tau_{ij}| e_i^*\|_{Y^*} +$$
$$+ \|\sum_i \|u_i\|_{Y_i} e_i\|_Y \|\sum_i \|\sum_j \tau_{ij} y_{ij}^*\|_{Y_i^*} e_i^*\|_{Y^*} \leqslant 10\|x\| + \|x\| = 11\|x\|.$$

Перейдем к оценке величины $\|\{\{\alpha_i/\varepsilon_i\};\ \{u_i\}\}\|_M$ снизу. Рассмотрим сначала случай, когда

$$\|\{\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty};\ \{0\}_{i=1}^{\infty}\}\|_X \geqslant \|x\|/2. \tag{4}$$

В силу безусловной монотонности базиса $\{e_i\}$ найдутся такие скаляры $\{\beta_i\}_{i=1}^m$, что $\left(\sum_{i=1}^m \beta_i e_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i\right) = \| \{\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty ; \{0\}_{i=1}^\infty\} \|_X$ и $\| \sum \times$ $\times \beta_i e_i^* \|_{Y^*} = 1$. Так как $w^* - \lim_{j\to\infty} y_{ij}^* = 0$, то для достаточно большого $q \in \boldsymbol{N}$ имеем $\left| \sum_{i=1}^m y_{iq}^*(u_i) \right| < \| x \|/4$. Вектор $y^* = \{\{\beta_1\varepsilon_1, \ldots, \beta_m\varepsilon_m, 0, \ldots\};$ $\{\beta_1 y_{1q}^*, \ldots, \beta_m y_{mq}^*, 0, \ldots\} \in X^*$ принадлежит M. Кроме того, для него, очевидно, имеем $\| y^* \|_{X^*} \leqslant \sqrt{2}$ и $y^*(\{\{\alpha_i/\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty ; \{u_i\}_{i=1}^\infty\}) \geqslant \| x \|/4$.

Следовательно, для векторов x, удовлетворяющих соотношению (4), имеем $\| \{\{\alpha_i/\varepsilon_i\}; \{u_i\}\} \|_M \geqslant \| x \|/(4\sqrt{2})$.

Если соотношение (4) не имеет места, то обязано выполняться соотношение $\| \{\{0\}_{i=1}^\infty ; \{u_i\}_{i=1}^\infty\} \|_X > \| x \|/2$.

Из безусловной монотонности базиса $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ вытекает существование такого вектора $\sum_{i=1}^m \gamma_i e_i^* \in Y^*$, что $\| \sum_{i=1}^m \gamma_i e_i^* \| = 1$, $\sum_{i=1}^m \gamma_i \| u_i \| >$ $> \| x \|/2$ и $\gamma_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. В силу условия 8) для любого $\delta > 0$ и любого $i = 1, \ldots, m$ найдется такой вектор $h_i^* \in \operatorname{lin}(\{y_{ij}^* -$ $- y_{ik}^*\}_{j,k=1}^\infty)$, что $\| h_i^* \|_{Y_i^*} \leqslant 1$ и $h_i^*(u_i) \geqslant (1 - \delta) \| u_i \|/100$.

Введем вектор $h^* = \{\{0\}_{i=1}^\infty ; \{\gamma_1 h_1^*, \ldots, \gamma_m h_m^*, 0, \ldots\}\} \in X^*$. Из определения M непосредственно вытекает, что $h^* \in M$. Кроме того, имеем $\| h^* \| = \| \sum_{i=1}^m \| h_i^* \|_{Y_i^*} \gamma_i e_i^* \| \leqslant 1$ и $h^*(\{\{\alpha_i/\varepsilon_i\}; \{u_i\}\}) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \times$ $\times h_i^*(u_i) \geqslant \sum_{i=1}^m \gamma_i (1 - \delta) \| u_i \|/100 \geqslant (1 - \delta) \| x \|/200$. Тем самым доказано, что имеет место (3).

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось показать, что $M \neq M_{(1)} \neq M_{(2)} = X^*$.

То, что M не является нормирующим и, следовательно, в силу (1) $M_{(1)} \neq X^*$, непосредственно вытекает из (3).

Для того чтобы показать, что $M_{(1)}$ является нормирующим и, следовательно, $M_{(2)} = X^*$, нужно заметить, что $M_{(1)}$ содержит все векторы вида $\{\{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}; \{0\}_{i=1}^\infty\}$ и вида $\{\{0\}_{i=1}^\infty ; \{0, \ldots, 0,$ $y_{ij}^* - y_{ik}^*, 0, \ldots\}\}$, и провести рассуждения, аналогичные тем, которые проведены при оценке снизу величины $\| \{\{\alpha_i/\varepsilon_i\}; \{u_i\}\} \|_M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Достаточность непосредственно вытекает из сопоставления условий 3) и 4). Условие 5) и сепарабельность пространства Z при этом не используются.

Перейдем к доказательству необходимости. Прежде, чем указать последовательность $\{z_i^*\}_{i=1}^\infty$, построим некоторые вспомогательные последовательности. Зададимся некоторым $0 < \varepsilon < 1$. Пусть $u^{**} \in$ $\in S(Z^{**})$ таков, что $\operatorname{dist}(u^{**}, Z) \geqslant 1 - \varepsilon$. Положим $N = \ker u^{**}$. Покажем, что $r(N) \geqslant (1 - \varepsilon)/(2 - \varepsilon)$. Пусть $z \in S(Z)$, покажем сначала, что

$$\operatorname{dist}(z, \operatorname{lin}\{u^{**}\}) \geqslant \| z \| (1 - \varepsilon)/(2 - \varepsilon). \tag{5}$$

Действительно, предположим, что для некоторого $z \in S(Z)$ и некоторого скаляра α имеем

$$\| z - \alpha u^{**} \| < (1 - \varepsilon)/(2 - \varepsilon). \tag{6}$$

Тогда $|\alpha| > (1 - (1 - \varepsilon)/(2 - \varepsilon)) = 1/(2 - \varepsilon)$. Из однородности расстояния до подпространства следует, что $\operatorname{dist}(\alpha u^{**}, Z) > (1 - \varepsilon)/(2 - \varepsilon)$. Приходим к противоречию с (6).

Из (5) следует, что в Z^{***} существует элемент с нормой, не превосходящей $(2 - \varepsilon) / (1 - \varepsilon)$, который равен нулю на u^{**}, а в точке z принимает значение $\| z \|$. Отсюда и из теоремы Хелли вытекает, что для любого $\delta > 0$ в Z^* найдется элемент из $\ker u^{**}$, который на z принимает значение $\| z \|$ и норма которого не превосходит $(1 + \delta)(2 - \varepsilon) / (1 - \varepsilon)$. Это и доказывает, что $r(N) \geqslant (1 - \varepsilon) / (2 - \varepsilon)$.

Выберем в Z^* вектор u^*, для которого $\| u^* \| \leqslant 1 + \varepsilon$ и $u^{**}(u^*) = 1$. Используя теорему Хелли, по индукции найдем последовательность конечномерных подпространств $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots \subset N$ и последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ векторов из Z такие, что для всех натуральных n имеют место утверждения

9) $(\forall x \in S(\operatorname{lin}\{x_k\}_{k=1}^n))\ (\exists f^* \in S(F_n),\ f^*(x) \geqslant (1 - 2\varepsilon)/(2 - \varepsilon))$;

10) $x_{n+1} \in (F_n)^\top$;

11) $u^*(x_n) = 1$;

12) $\| x_n \| \leqslant 1 + \varepsilon$.

(Подробное рассуждение см. в [5, с. 358]).

Из условий 9) и 10) вытекает, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ является базисной, и ее базисная постоянная не превосходит $\tau(\varepsilon) = (2 - \varepsilon)/(1 - 2\varepsilon)$ (см. [3, с. 2]).

Введем последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ равенствами $y_1 = x_1$, $y_n = x_n - x_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$. В силу 12) имеем $\left\| \sum\limits_{n=1}^m y_n \right\| \leqslant 1 + \varepsilon$ для всех $m \in \mathbf{N}$. Поэтому у последовательности $\left\{ \sum\limits_{n=1}^m y_n \right\}_{m=1}^\infty$ найдется в Z^{**} хотя бы одна предельная точка. Обозначим ее z_0^{**} и введем вектор $z^{**} = z_0^{**}/(1 + \varepsilon)$. Ясно, что $\| z^{**} \| \leqslant 1$.

Покажем, что последовательность $\{y_n\}$ является базисной, и оценим ее базисную постоянную. Обозначим через Y замыкание линейной оболочки векторов $\{x_n\}$, а через $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset Y^*$ — координатные функционалы базиса $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Легко видеть, что последовательность функционалов $y_n^* = u^*|_Y - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^*$, $n \in \mathbf{N}$ вместе с последовательностью $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ образуют биортогональную систему в Y. Ввиду $\operatorname{lin}\{x_n\}_{n=1}^\infty = \operatorname{lin}\{y_n\}_{n=1}^\infty$, для доказательства того, что $\{y_n\}$ — базис в Y, нужно оценить величину $\left\| \sum\limits_{n=1}^m y_n^*(y) y_n \right\|$. Имеем $\left\| \sum\limits_{n=1}^m y_n^*(y) y_n \right\| = \| u^*(y) x_1 +$

$$+\sum_{n=2}^{m}(u^*(y)-\sum_{k=1}^{n-1}x_k^*(y))(x_n-x_{n-1})\| = \|\sum_{k=1}^{m}x_k^*(y)\,x_k+y_m^*(y)\,x_m\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\sum_{k=1}^{m}x_k^*(y)\,x_k\| + \|y_m^*\|\,\|y\|\,\|x_m\|.$$

Оценим норму функционала $y_m^* \in Y^*$. Этот функционал на $\mathrm{cl}\,\mathrm{lin}\{x_k\}_{k=m}^{\infty}$ совпадает с u^*, а на $\mathrm{lin}\{x_k\}_{k=1}^{m-1}$ равен нулю. Поэтому

$$\|y_m^*\| \leqslant (\tau(\varepsilon)+1)\|u^*\|. \tag{7}$$

Таким образом, последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в Y, и ее базисная постоянная не превосходит $\tau(\varepsilon)+(1+\varepsilon)^2(\tau(\varepsilon)+1)$.

Так как функционалы y_n^* равномерно ограничены и являются координатными функционалами базиса, то они w^*-сходятся к нулю в Y^*. Покажем, что у них существуют такие продолжения $w_n^* \in Z^*$, которые тоже w^*-сходятся к нулю и для которых $\|w_n^*\| \leqslant 2\|y_n^*\|$. Следуем рассуждениям Вича (см. [3, с. 106]): пусть $\{h_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторые продолжения с сохранением нормы функционалов $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ на все Z. Ясно, что w^*-предельные точки последовательности $\{h_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежат $Y^{\perp}$. Функционалы $\{h_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничены и, следовательно, принадлежат шару некоторого конечного радиуса пространства Z^*. Сужение w^*-топологии на любой шар пространства, сопряженного к сепарабельному, является топологией, порожденной некоторой инвариантной относительно сдвигов метрикой d. Ввиду сделанного выше замечания и теоремы Банаха — Алаоглу имеем $\lim\limits_{n\to\infty} d(h_n^*, Y^{\perp})=0$. Следовательно, найдутся такие $g_n^* \in Y^{\perp}$ $(n\in \boldsymbol{N})$, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(h_n^*, g_n^*)=0$, или в силу инвариантности метрики d относительно сдвигов, $\lim\limits_{n\to\infty} d(h_n^*-g_n^*, 0)=0$. При этом, как нетрудно видеть, можно считать, что $\|g_n^*\| \leqslant \|h_n^*\| = \|y_n^*\|$. Так как $g_n^* \in Y^{\perp}$, то функционалы $w_n^* = h_n^* - g_n^*$ являются искомыми продолжениями функционалов y_n^*.

Напомним теорему Маркушевича [3, с. 43]. Для любого сепарабельного банахова пространства X найдутся последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ в X и $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ в X^*, образующие тотальную фундаментальную биортогональную систему, т. е. $\mathrm{lin}\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ — тотальное подпространство в X^*, $\mathrm{cl}\,\mathrm{lin}\{x_i\}_{i=1}^{\infty}=X$ и $x_i^*(x_j)=\delta_{ij}$. При этом, как видно из доказательства, можно добиться того, чтобы подпространство $\mathrm{lin}\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ содержало любое наперед заданное счетное подмножество из X^*.

Пусть $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subset Z/Y$ и $\{v_i^*\}_{i=1}^{\infty} \subset (Z/Y)^* = Y^{\perp}$ — существующая согласно теореме Маркушевича тотальная биортогональная фундаментальная система. После соответствующей перенормировки можем считать, что $\sup\limits_i \|v_i^*\| \leqslant 1$. Введем векторы $\{z_i^*\}_{i=1}^{\infty} \subset Z^*$ равенствами:

$$z_{2i}^* = (v_i^* + w_i^*)/(1+2(1+\varepsilon)(1+\tau(\varepsilon)));$$
$$z_{2i-1}^* = w_i^*/(1+2(1+\varepsilon)(1+\tau(\varepsilon))).$$

Покажем, что последовательность $\{z_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям 3) — 5).

Из ограниченности последовательности $\{v_i^*\}$ и фундаментальности последовательности $\{v_i\}$ следует, что $w^* - \lim_{i\to\infty} v_i^* = 0$. Отсюда и из определения векторов w_i^* следует, что $w^* - \lim z_i^* = 0$. То, что векторы z_i^* принадлежат единичному шару, следует из оценок $\| v_i^* \| \leqslant 1$ и $\| w_i^* \| \leqslant \leqslant 2\| y_i^* \| \leqslant 2(1+\varepsilon)(1+\tau(\varepsilon))$. Таким образом, последовательность $\{z_i^*\}$ удовлетворяет условию 3).

Из определения вектора z^{**} следует, что $\| z^{**} \| \leqslant 1$, $z^{**}(w_i^*) = 1/(1+\varepsilon)$ и $z^{**}|_{Y^\perp} = 0$. Поэтому $v_i^* \in \ker z^{**}$, и для любого $i \in N$ имеем $z^{**}(z_i^*) = 1/((1+\varepsilon)(1+2(1+\varepsilon)(1+\tau(\varepsilon))))$. Поскольку при $\varepsilon \to 0$ последнее выражение стремится к $1/7$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется условие 4).

Перейдем к условию 5). Нужно показать, что для любого $z \in Z$ и любого $\delta > 0$ найдется такой функционал $h^* \in Q := \operatorname{lin}(\{z_j^* - z_k^*\}_{j,k=1}^{\infty})$, что $\| h^* \| \leqslant 1$ и $h^*(z) \geqslant (1-\delta)\| z \|/100$. Заметим, что из определения z_i^* следует, что $\operatorname{lin}\{v_i^*\} \subset Q$ и $\operatorname{lin}(\{w_k^* - w_j^*\}_{j,k=1}^{\infty}) \subset Q$.

Воспользовавшись замечанием к теореме Маркушевича, можем считать, что $\operatorname{lin}\{v_i^*\}_{i=1}^{\infty}$, рассматриваемое как подпространство в $(Z/Y)^*$, имеет характеристику, равную единице. Обозначим через $\varphi: Z \to Z/Y$ каноническое фактор-отображение. Из сделанных замечаний следует, что для любого $z \in Z$ и $\delta > 0$ найдется такой вектор $h^* \in S(Q)$, что $h^* \in Y^\perp$ и $h^*(z) = h^*(\varphi(z)) \geqslant (1-\delta)\| \varphi(z) \|$. Для тех z, для которых $\| \varphi(z) \| \geqslant \| z \|/100$, доказательство тем самым закончено.

Пусть $\| \varphi(z) \| < \| z \|/100$. Введем вектор $f \in Z$, для которого $\varphi(f) = \varphi(z)$ и $\| f \| < \| z \|/100$. Разность $(z - f)$ принадлежит Y. Имеем $\| z - f \| \geqslant \| z \| - \| f \| \geqslant 99\| z \|/100$. Покажем, что для завершения доказательства теоремы осталось для произвольного вектора $g \in Y$ указать такой вектор $g^* \in Q$, что $\| g^* \| \leqslant 1$ и $g^*(g) \geqslant 4\| g \|/100$. Действительно, взяв в качестве g вектор $(z-f)$, получим $\| g^* \| \leqslant 1$ и $| g^*(z) | \geqslant | g^*(z-f) | - | g^*(f) | \geqslant 4\| z-f \|/100 - \| f \| \geqslant \| z \|/100$.

Так как $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис в Y с базисной постоянной, не превосходящей $\mu(\varepsilon) := \tau(\varepsilon) + (1+\varepsilon)^2\tau(\varepsilon)$, то характеристика подпространства $\operatorname{lin}(\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}) \subset Y^*$ не меньше $1/\mu(\varepsilon)$ [4, с. 115]. Воспользовавшись этим, а также тем, что $\sup_m \| \sum_{n=1}^{m} y_n \| \leqslant 1+\varepsilon$, покажем, что подпространство $\operatorname{lin}(\{y_n^* - y_m^*\}_{n,m=1}^{\infty}) \subset Y^*$ является нормирующим. Пусть $g = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n y_n \in Y$, и пусть $a^* = \sum_{n=1}^{k} \beta_n y_n^*$ таково, что $\| a^* \| \leqslant 1$ и $a^*(g) \geqslant ((1-\varepsilon)/\mu(\varepsilon))\| g \|$. Имеем

$$(1+\varepsilon) \geqslant \left| a^*\left(\sum_{n=1}^{k} y_n\right) \right| = \left| \sum_{n=1}^{k} \beta_n \right|. \tag{8}$$

Положим $a_g^* = a^* - \left(\sum_{n=1}^{k} \beta_n\right) y_{m+1}^*$. Из неравенств (7) и (8) вытекает, что $\| a_g^* \| \leqslant \| a^* \| + (1+\varepsilon) \| y_{m+1}^* \| \leqslant 1 + (1+\varepsilon)^2 (1 + \tau(\varepsilon)) = : \nu(\varepsilon)$. Таким образом, для каждого финитного вектора g из Y указан вектор $a_g^* \in Y^*$, представимый в виде $a_g^* = \sum_{n, m=1}^{p(g)} \beta(g)_{n, m} (y_n^* - y_m^*)$, для которого $\|a_g^*\| \leqslant \nu(\varepsilon)$ и $a_g^*(g) > \| g \| (1-\varepsilon)/\mu(\varepsilon)$. Единственным «недостатком» вектора a_g^* является то, что он принадлежит $\text{lin}(\{y_n^* - y_m^*\}_{n, m=1}^{\infty})$, а не Q. Естественно рассмотреть в связи с этим вектор $b_g^* = \sum_{n, m=1}^{p(g)} \beta(g)_{n, m} (w_n^* - w_m^*)$. Он принимает на векторе g то же значение, что и a_g^*, но мы не в состоянии получить необходимую оценку для его нормы. Поэтому искомый вектор будем искать в виде $b_g^* + y_g^*$, где $y_g^* \in Y^{\perp}$.

Обозначим через Λ множество всех конечных линейных комбинаций векторов y_n с рациональными коэффициентами. Для каждого $g \in \Lambda$ найдем a_g^* и b_g^* указанным выше способом. Кроме того, для каждого $g \in \Lambda$ введем функционал c_g^*, являющийся продолжением функционала a_g^* с сохранением нормы, и функционал $y_g^* = c_g^* - b_g^*$. Пусть $\Omega := \{y_g^*, g \in \Lambda\}$. Ясно, что Ω — счетное подмножество в $Y^{\perp}$, поэтому согласно замечанию к теореме Маркушевича, можно считать, что $\Omega \subset (\text{lin}\{v_i^*\}_{i=1}^{\infty}) \subset Q$. Таким образом, для любого $g \in \Lambda$ имеем $c_g^*(g) = b_g^*(g) = a_g^*(g) > \| g \| (1-\varepsilon)/\mu(\varepsilon)$; $\| c_g^* \| = \| a_g^* \| \leqslant \nu(\varepsilon)$ и $c_g^* = b_g^* + y_g^* \in Q$.

Поскольку Λ плотно в Y, то можно утверждать, что для любого $g \in Y$ найдется такой $g^* \in Q$, для которого $\| g^* \| \leqslant 1$ и $g^*(g) \geqslant \| g \| \times (1-\varepsilon)/(\mu(\varepsilon)\nu(\varepsilon))$. Нетрудно проверить, что для достаточно малых ε имеем $(1-\varepsilon)/(\nu(\varepsilon)\mu(\varepsilon)) > 4/100$ и, следовательно, выполняется условие 5). Теорема доказана.

Оставшаяся часть посвящена выделению класса пространств, входящих в RS.

Предложение 2. Пусть сепарабельное банахово пространство X таково, что любое замкнутое (в сильной топологии) нормирующее подпространство $M \subset X^*$ имеет конечную коразмерность в X^*. Тогда $X \in RS$.

Доказательство. В силу сформулированного в начале статьи критерия регуляризуемости достаточно из того что подпространства $A^*X^* \subset X^*$ и $B^*X^* \subset X^*$ являются нормирующими, вывести то, что подпространство $A^*B^*X^* \subset X^*$ является нормирующим.

Из условия предложения вытекает, что $\text{cl}(B^*X^*)$ имеет конечную коразмерность в X^*, поэтому $A^*(\text{cl}(B^*X^*))$ имеет конечную коразмерность в A^*X^* и, следовательно, $\text{cl}(A^*(\text{cl}(B^*X^*)))$ имеет конечную коразмерность в $\text{cl}(A^*X^*)$. Ясно, что $\text{cl}(A^*(\text{cl}(B^*X^*))) = \text{cl}(A^*B^*X^*)$. Кроме того, из определения характеристики видно, что для любого подпространства $M \subset X^*$ имеем $r(M) = r(\text{cl}(M))$. Поэтому нам достаточно показать, что $r(\text{cl}(A^*B^*X^*)) > 0$. Из инъективности операторов A и B следует, что подпространство $A^*B^*X^* \subset \subset X^*$ тотально. Таким образом, для завершения доказательства предложения достаточно доказать следующую лемму.

Лемма. *Пусть подпространство $N \subset X^*$ является нормирующим, а подпространство $M \subset N$ является тотальным и имеет конечную коразмерность в N. Тогда M тоже является нормирующим.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что тотальность подпространства $R \subset X^*$ эквивалентна тому, что подпространство $R^\perp \subset X^{**}$ не пересекается с каноническим образом пространства X во втором сопряженном. В [1, с. 30—31] доказано, что нормируемость $R \subset X^*$ эквивалентна тому, что $\delta(X, R^\perp) > 0$, где δ — наклон X к $R^\perp$, т. е. $\delta(X, R^\perp) := \inf_{x \in S(X)} \operatorname{dist}(x, R^\perp)$.

Таким образом, имеем а) $M^\perp \cap X = \{0\}$; б) $\delta(X, N^\perp) > 0$; в) $N^\perp$ имеет конечную коразмерность в $M^\perp$.

В [6, с. 202] доказано, что из этих трех утверждений следует, что $\delta(X, M^\perp) > 0$.

Замечание. В [5, с. 355] показано, что класс пространств, удовлетворяющих условиям предложения 2, шире класса квазирефлексивных пространств.

Список литературы: 1. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения. К. 1980. 216 с. 2. *Доманский Е. Н., Островский М. И.* О регуляризуемости обратных операторов к линейным инъекциям и их суперпозициям // Сиб. мат. журн. **29**, № 3. С. 190—193. 3. *Lindenstrauss J, Tzafriri L.* Classical Banach spaces. v. 1. Berlin 1977. 188 p. 4. *Singer I.* Bases Banach spaces. v. I. Berlin 1970. 668 p. 5. *Davis W. J., Johnson W. B.* Basic sequences and norming subspaces in non-quasi—reflexive Banach spaces // Isr. J. Math. 1973. **14**. P. 353—367. 6. *Гурарий В. И.* О растворах и наклонах подпространств банахова пространства // Теория функций, функцион. анализ. и их прил. 1965. Вып. 1. С. 194—204.

Поступила в редколлегию 02.11.87