УДК 517.9

Д. Ш. ЛУНДИНА

ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим уравнение Штурма — Лиувилля на всей оси

$$H[y] = -y'' + q(x)\,y = zy\ (-\infty < x < \infty) \tag{1}$$

с вещественным и непрерывным потенциалом $q(x)$. Известная теорема Вейля утверждает, что при любом z из верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ существуют решения уравнения (1) $\psi^+(z, x)$, $\psi^-(z, x)$, принадлежащие соответственно пространствам $L_2(0, \infty)$, $L_2(-\infty, 0)$, вида

$$\psi^+(z, x) = c(z, x) + m^+(z)\,s(z, x) \in L_2(0, \infty);$$
$$\psi^-(z, x) = c(z, x) + m^-(z)\,s(z, x) \in L_2(-\infty, 0),$$

где $c(z, x)$, $s(z, x)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$c(z, 0) = 1,\ c'(z, 0) = 0;\ s(z, 0) = 0,\ s'(z, 0) = 1.$$

Функции $m^+(z)$, $m^-(z)$ называются правой и левой функциями Вейля задачи (1). Они аналитичны в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и имеют там знакопостоянные мнимые части $\operatorname{Im} m^+(z) > 0$, $\operatorname{Im} m^-(z) < 0$.

Так как потенциал $q(x)$ вещественный, то в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ существуют также решения $\psi^+(z, x) = \overline{\psi^+(\bar z, x)} \in L_2(0, \infty)$; $\psi^-(z, x) = \overline{\psi^-(\bar z, x)} \in L_2(-\infty, 0)$, и тем самым функции Вейля $m^+(z)$,

$m^-(z)$ определены также в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ формулами $m^+(z) = \overline{m^+(\bar z)}$, $m^-(z) = \overline{m^-(\bar z)}$.

Заметим, что если уравнение (1) имеет единственное линейно-независимое решение, принадлежащее соответственно пространствам $L_2(0, \infty)$, $L_2(-\infty, 0)$, то функции Вейля определены однозначно и задаются формулами

$$m^+(z) = \frac{\psi(z, 0)'}{\psi(z, 0)}; \quad m^-(z) = \frac{\varphi(z, 0)'}{\varphi(z, 0)}, \tag{2}$$

где $\psi(z, x)$, $\varphi(z, x)$ — любые решения уравнения (1), принадлежащие соответственно пространствам $L_2(0, \infty)$, $L_2(-\infty, 0)$, так как в этом случае

$$\psi^+(z, x) = \frac{\psi(z, x)}{\psi(z, 0)}; \quad \psi^-(z, x) = \frac{\varphi(z, x)}{\varphi(z, 0)}.$$

Если $q(x) \geqslant -C^2$ (оператор H полуограничен снизу), то функции $m^+(z)$, $m^-(z)$ аналитичны каждая на своем экземпляре плоскости z, разрезанной вдоль полуоси $[-C^2, \infty)$.

Положим $z = \lambda^2$ и определим в плоскости λ функцию

$$n(\lambda) = \begin{cases} m^+(\lambda^2) & \operatorname{Im}\lambda > 0; \\ m^-(\lambda^2) & \operatorname{Im}\lambda < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Если $q(x) \geqslant -C^2$, то $n(\lambda)$ — аналитическая функция от λ вне вещественной оси и отрезка мнимой оси $[-iC, iC]$, причем

$$\begin{gathered} \operatorname{Im} n(\lambda) > 0, \ \operatorname{Re}\lambda > 0, \ \lambda \notin (0, \infty); \\ \operatorname{Im} n(\lambda) < 0, \ \operatorname{Re}\lambda < 0, \ \lambda \notin (-\infty, 0). \end{gathered} \tag{3'}$$

Рассмотрим введенное в [1] множество потенциалов $\overline{B(\mu)}$, которое является замыканием в смысле равномерной сходимости на каждом конечном интервале множества $B(\mu)$ безотражательных потенциалов, порождающих операторы H с нижней границей спектра, бóльшей либо равной μ. Как показано в [1], для любого потенциала $q(x) \in \overline{B(\mu)}$ выполнено неравенство

$$0 \geqslant q(x) \geqslant -2|\mu|. \tag{4}$$

В случае безотражательного потенциала уравнение (1) имеет решения

$$\begin{aligned} e^+(\lambda, x) &= e^{i\lambda x}\prod_1^N \frac{\lambda - i\lambda_k(x)}{\lambda + i\varkappa_k} \in L_2(0, \infty), \ \operatorname{Im}\lambda > 0; \\ e^-(\lambda, x) &= e^{i\lambda x}\prod_1^N \frac{\lambda - i\lambda_k(x)}{\lambda - i\varkappa_k} \in L_2(-\infty, 0), \ \operatorname{Im}\lambda < 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\lambda_k(x)$ — некоторые вещественные бесконечно дифференцируемые функции (см., например, [1]).

Функции $\lambda_k(x_0)$ имеют следующий спектральный смысл: если $\lambda_k(x_0) > 0$, то $-\lambda_k^2(x_0)$ — собственное значение задачи а) $Hy = zy$; $y(x_0) = 0$; $x_0 \leqslant x < \infty$, если же $\lambda_k(x_0) < 0$, то $-\lambda_k^2(x_0)$ — собственное значение задачи

б) $Hy = zy$; $y(x_0) = 0$; $-\infty < x \leqslant x_0$.

Как показано в работе [1], в случае безотражательного потенциала при всех x, за исключением конечного множества K, справедливы строгие неравенства

$$0 = \varkappa_0 < |\lambda_1(x)| < \varkappa_1 < |\lambda_2(x)| < \ldots < |\lambda_N(x)| < \varkappa_N, \tag{6}$$

где $-\varkappa_j^2$ $(j = 1, \ldots, N)$ — собственные значения задачи (1).

Лемма 1. *Если $q(x)$ — безотражательный потенциал и $x \notin K$, то*

$$-\lambda_k'(x) = (\varkappa_k^2 - \lambda_k^2(x)) \prod_{j \neq k} \frac{\lambda_k^2(x) - \varkappa_j^2}{\lambda_k^2(x) - \lambda_j^2(x)}. \tag{7}$$

При вещественных λ

$$e^+(\lambda, x) = b(\lambda)\, e^-(-\lambda, x) + a(\lambda)\, e^-(\lambda, x),$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} W\{e^+(\lambda, x), e^-(-\lambda, x)\},$$

$W\{f_1, f_2\}$ — вронскиан функций f_1, f_2. Перепишем последнюю формулу в виде

$$2i\lambda a(\lambda) = e^+(\lambda, x)\, e^-(-\lambda, x)\left[\frac{e^+(\lambda, x)'}{e^+(\lambda, x)} - \frac{e^-(-\lambda, x)'}{e^-(-\lambda, x)}\right].$$

Известно, что в случае безотражательного потенциала $q(x)$

$$a(\lambda) = \prod_1^N \frac{\lambda - i\varkappa_k}{\lambda + i\varkappa_k}.$$

Используя эту формулу и формулы (5), перепишем последнее равенство в виде

$$2i\lambda \prod_1^N \frac{\lambda - i\varkappa_j}{\lambda + i\varkappa_j} = \prod_1^N \frac{\lambda^2 + \lambda_j^2(x)}{(\lambda + i\varkappa_j)^2}\Bigg\{2i\lambda - \\ - \sum_1^N \frac{i\lambda_j'(x)}{\lambda - i\lambda_j(x)} - \sum_1^N \frac{i\lambda_j'(x)}{\lambda + i\lambda_j(x)}\Bigg\}.$$

Полагая $\lambda = i\varkappa$, а затем умножая это равенство на $\varkappa - \lambda_k(x)$ и устремляя $\varkappa \to \lambda_k(x)$, после простых преобразований приходим к формуле (7).

С л е д с т в и е 1. *Если $q(x)$ — безотражательный потенциал и $x \notin K$, то $-\lambda_k^1(x) > 0$* (8). Это неравенство вытекает из формулы (7) и неравенств (6).

С л е д с т в и е 2. *Если $q(x) \in B(\mu)$, то*

$$\sum_1^N -\lambda_k'(x) \leqslant |\mu|. \tag{9}$$

Действительно, в силу неравенства (4) $0 \leqslant -q(x) \leqslant 2|\mu|$, и так как $2\sum_1^N -\lambda_k'(x) = -q(x)$ (см. [1]), то верно неравенство (9).

Будем говорить, что потенциал $q(x)$ является потенциалом общего положения, если $0 \notin K$, т. е. выполнены строгие неравенства $0 < |\lambda_1(0)| < \varkappa_1 < |\lambda_2(0)| < \ldots < |\lambda_N(0)| < \varkappa_N$.

Обозначим через $B_1(\mu) \subset B(\mu)$ множество потенциалов общего положения. Заметим, что множество $B_1(\mu)$ плотно в $B(\mu)$ $\overline{B_1(\mu)} \supset B(\mu)$ (замыкание следует понимать в смысле равномерной сходимости на каждом конечном интервале). Действительно, если $q(x) \in B(\mu)$, но $q(x) \notin B_1(\mu)$, то в силу конечности K последовательность $q\left(\frac{1}{n} + x\right)$, начиная с некоторого n_0, принадлежит множеству $B_1(\mu)$ и при $n \to \infty$ сходится к $q(x)$ в указанном выше смысле.

Как известно, безотражательный потенциал имеет своими данными рассеяния любой набор чисел $\{i\varkappa_k, m_k^\pm\}(\varkappa_k > 0,\ m_k^\mp > 0)$, где $-\varkappa_k^2$ — отрицательные собственные значения оператора H, а $m_k^{\pm 2}$ — нормировочные коэффициенты,

$$m_k^{\pm 2} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |e_k^\pm(\pm i\varkappa_k, x)|^2 dx \right\}^{-1},$$

вычисляемые по формуле

$$m_k^{\pm 2} = i \frac{e^\pm(\pm i\varkappa_k, 0)}{e^\mp(\mp i\varkappa_k, 0)} a(i\varkappa_k), \quad a(z) = \prod_1^N \frac{z - i\varkappa_j}{z + i\varkappa_j}. \tag{10}$$

Из равенств (5), (10) после простых преобразований находим, что

$$m_k^{+2} = 2\varkappa_k \prod_1^N \frac{\varkappa_k + \lambda_e(0)}{\varkappa_k - \lambda_e(0)} \prod_{e \neq k} \frac{\varkappa_k + \varkappa_e}{\varkappa_k - \varkappa_e}, \tag{11}$$

откуда следует, что данные рассеяния, соответствующие потенциалам $q(x) \in B_1(\mu)$, а значит, и сами потенциалы однозначно восстанавливаются по набору вещественных чисел $\lambda_1(0), \ldots, \lambda_N(0)$, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$, таких, что $-\lambda_1^2(0), \ldots, -\lambda_N^2(0)$, $-\varkappa_1^2, \ldots, -\varkappa_N^2$ — собственные значения соответствующих задач с потенциалом $q(x) \in B_1(\mu)$.

Лемма 2. *Для того, чтобы набор вещественных чисел $\tilde\lambda_1, \ldots, \tilde\lambda_N$, $\tilde\varkappa_1, \ldots, \tilde\varkappa_N$ ($\varkappa_j > 0$, $j = 1, \ldots, N$) обладал свойствами: $-\varkappa_1^2, \ldots, -\varkappa_N^2$ — собственные значения задачи (1) с потенциалом $q(x) \in B_1(\mu)$; $-\tilde\lambda_1^2, \ldots, -\tilde\lambda_N^2$ — собственные значения задач а), б) при $x_0 = 0$ с тем же потенциалом $q(x) \in B_1(\mu)$; ($-\tilde\lambda_j^2$ ($-\tilde\lambda_k^2$) — собственное значение задач а), б)), если $\tilde\lambda_j > 0$ ($\tilde\lambda_k < 0$)), необходимо и достаточно, чтобы*

$$0 < |\tilde\lambda_1| < \tilde\varkappa_1 < |\tilde\lambda_2| < \ldots < |\tilde\lambda_N| < \varkappa_N. \tag{11'}$$

Необходимость этого условия вытекает из определения множества $B_1(\mu)$.

Пусть теперь выполнены неравенства (11′). Положим

$$m_k^{+2} = 2\tilde{\varkappa}_k \cdot \prod_1^N \frac{\tilde{\varkappa}_k + \tilde{\lambda}_e}{\tilde{\varkappa}_k - \tilde{\lambda}_e} \cdot \prod_{e \neq k} \frac{\tilde{\varkappa}_k + \tilde{\varkappa}_e}{\tilde{\varkappa}_k - \tilde{\varkappa}_e}. \tag{12}$$

Из неравенств (11′) следует, что $m_k^{+2} > 0$ $(k = 1, \ldots, N)$, и так как также $\tilde{\varkappa}_k > 0$, то набор $\{\tilde{\varkappa}_k, m_k^+\}$ является данными рассеяния, соответствующими некоторому безотражательному потенциалу $q(x)$. Пусть этому потенциалу соответствуют числа $\lambda_j(0)$ $(j = 1, \ldots, N)$, такие, что $-\lambda_j^2(0)$ — собственные значения задач а) — б) при $x_0 = 0$. Покажем, что $\lambda_j(0) = \tilde{\lambda}_j$ $(j = 1, \ldots, N)$.

Согласно (II)

$$m_k^{+2} = 2\tilde{\varkappa}_k \prod_1^N \frac{\tilde{\varkappa}_k + \lambda_e(0)}{\tilde{\varkappa}_k - \lambda_e(0)} \prod_{e \neq k} \frac{\tilde{\varkappa}_k + \tilde{\varkappa}_e}{\tilde{\varkappa}_k - \tilde{\varkappa}_e}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (12), получим

$$\prod^N \frac{\varkappa_k + \lambda_e(0)}{\varkappa_k - \lambda_e(0)} = \prod_1^N \frac{\tilde{\varkappa}_k + \tilde{\lambda}_e}{\tilde{\varkappa}_k - \tilde{\lambda}_e} \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Покажем, что это равенство справедливо при всех z:

$$\prod_1^N \frac{z + \lambda_e(0)}{z - \lambda_e(0)} \equiv \prod_1^N \frac{z + \tilde{\lambda}_e}{z - \tilde{\lambda}_e},$$

откуда будет следовать, что $\lambda_e(0) = \tilde{\lambda}_e$ $(e = 1, \ldots, N)$.

Положим

$$P(z) = \prod_1^N (z - \lambda_e(0)); \quad \tilde{P}(z) = \prod_1^N (z - \tilde{\lambda}_e)$$

и рассмотрим нечетный полином степени $(2N - 1)$:

$$S(z) = P(z)\tilde{P}(-z) - P(-z)\tilde{P}(z).$$

Замечая, что $\tilde{\varkappa}_1, \ldots, \tilde{\varkappa}_N$ — корни полинома $S(z)$, как и $-\tilde{\varkappa}_1, \ldots, -\tilde{\varkappa}_N$ в силу нечетности $S(z)$, заключаем, что $S(z) \equiv 0$, $\lambda_e(0) = \tilde{\lambda}_e$ $(e = 1, \ldots, N)$. Неравенства (11′) позволяют заключить, что $q(x) \in B_1(\mu)$.

Лемма 3. *Если* $q(x) \in B_1(\mu)$, *то* $n(\lambda)$ — *рациональная дробь вида*

$$n(\lambda) = i\lambda + i \sum_1^N \frac{-\lambda_k'(0)}{\lambda - i\lambda_k(0)}, \tag{13}$$

причем $-\lambda_k'(0) > 0$, $\sum_1^N -\lambda_k'(0) \leqslant |\mu|$ (8), (9).

Если $q(x) \in B_1(\mu)$, то справедливо неравенство (4) и оператор H полуограничен снизу. Известно [2], что в этом случае уравнение (1) имеет единственное линейно-независимое решение принадлежащее соответственно пространствам $L_2(0, \infty)$, $L_2(-\infty, 0)$: $e^+(\lambda, x) \in L_2(0, \infty)$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$; $e^-(\lambda, x) \in L_2(-\infty, 0)$, $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Следовательно, функции Вейля определены однозначно и задаются формулами (2):

$$m^+(\lambda^2) = \frac{e^+(\lambda, 0)'}{e^+(\lambda, 0)}, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0; \; m^-(\lambda^2) = \frac{e^-(\lambda, 0)'}{e^-(\lambda, 0)}, \; \operatorname{Im}\lambda < 0.$$

Формулу (13) получим, если воспользуемся равенствами (5).

Неравенства (8), (9) приведены в следствиях из леммы 1.

Теорема 1. *Для того чтобы $q(x) \in B(\mu)$, необходимо и достаточно чтобы существовала неубывающая функция $\rho(\xi)$, постоянная вне некоторого интервала $(-l, l)$, такая, что*

$$n(\lambda) = i\lambda + i\int \frac{d\rho(\xi)}{\lambda - i\xi}. \tag{14}$$

При этом

$$\max\left(l^2, \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\xi)\right) \leqslant |\mu| \leqslant l^2 + \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\xi).$$

Необходимость. Если $q(x) \in \overline{B(\mu)}$, то существует последовательность $q_k(x) \in B_1(\mu)$, сходящаяся равномерно на каждом конечном интервале к $q(x)$. Пусть $n_k(\lambda)$ — функция (3), соответствующая потенциалу $q_k(x)$. По лемме 3

$$n_k(\lambda) = i\lambda + i\sum_{1}^{N_k} \frac{-\lambda'_{j,k}(0)}{\lambda - i\lambda_{j,k}(0)},$$

причем $-\lambda'_{j,k}(0) > 0$, $\sum\limits_{1}^{N_k} -\lambda'_{j,k}(0) \leqslant |\mu|$.

Пусть $d\rho_k(\xi)$ — положительная мера, сосредоточенная в точках $\lambda_{j,k}(0)$ $(j = 1, \ldots, N_k)$ и $\rho_k(\lambda_{j,k}(0)) = -\lambda'_{j,k}(0)$. Тогда

$$n_k(\lambda) = i\lambda + i\int \frac{d\rho_k(\xi)}{\lambda - i\xi},$$

причем носитель меры $d\rho_k(\xi)$, промежуток $(-l_k, l_k)$, содержится в сегментах $[-\sqrt{|\mu|}, \sqrt{|\mu|}]$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho_k(\xi) \leqslant |\mu|$. Следовательно, применима теорема Хелли, и существует подпоследовательность $d\rho_{\tilde{k}}(\xi)$, такая, что

$$\int \frac{d\rho_{\tilde{k}}(\xi)}{\lambda - i\xi} \to \int \frac{d\rho(\xi)}{\lambda - i\xi},$$

где $d\rho(\xi)$ — неотрицательная мера с конечным носителем $(-l,\ l)\in$ $\in[-\sqrt{|\mu|},\ \sqrt{|\mu|}]$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\xi) \leqslant |\mu|$. Тем самым показано, что $n_{\tilde{k}}(\lambda) \to n(\lambda)$, где

$$n(\lambda) = i\lambda + i\int \frac{d\rho(\xi)}{\lambda - i\xi};\ \max\left(l^2,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\xi)\right) \leqslant |\mu|.$$

Покажем, что функция $n(\lambda)$ есть функция (3), соответствующая потенциалу $q(x)$.

Пусть $\psi_{\tilde{k}}^{+}(\lambda^2,\ x)$, $\psi_{\tilde{k}}^{-}(\lambda^2,\ x)$ — решения уравнения (1) с потенциалом $q_{\tilde{k}}(x)$, принадлежащие соответственно пространствам $L_2(0,\ \infty)$, $L_2(-\infty,\ 0)$, вида

$$\psi_{\tilde{k}}^{+}(\lambda^2,\ x) = c_{\tilde{k}}(\lambda^2,\ x) + m_{\tilde{k}}^{+}(\lambda^2)\, s_{\tilde{k}}(\lambda^2,\ x) \in L_2(0,\ \infty);$$
$$\psi_{\tilde{k}}^{-}(\lambda^2,\ x) = c_{\tilde{k}}(\lambda^2,\ x) + m_{\tilde{k}}^{-}(\lambda^2)\, s_{\tilde{k}}(\lambda^2,\ x) \in L_2(-\infty,\ 0).$$

Тогда при $\tilde{k} \to \infty$ равномерно на каждом конечном интервале оси x $\psi_{\tilde{k}}^{\pm}(\lambda^2,\ x) \to \psi^{\pm}(\lambda^2,\ x)$, где $\psi^{\pm}(\lambda^2,\ x)$ — решения уравнения (1) с потенциалом $q(x)$ вида

$$\psi^{\pm}(\lambda^2,\ x) = c(\lambda^2,\ x) + m^{\pm}(\lambda^2)\, s(\lambda^2,\ x);$$
$$\hat{m}^{+}(\lambda^2) = n(\lambda),\ \operatorname{Im}\lambda > 0;\ \hat{m}^{-}(\lambda^2) = n(\lambda),\ \operatorname{Im}\lambda < 0.$$

Действительно, равномерно на каждом конечном интервале оси x $c_{\tilde{k}}(\lambda^2,\ x) \to c(\lambda^2,\ x)$, $s_{\tilde{k}}(\lambda^2,\ x) \to s(\lambda^2,\ x)$, а также в силу выбора функций $\hat{m}^{\pm}(\lambda^2)$ $m_{\tilde{k}}^{\pm}(\lambda^2) \to m^{\pm}(\lambda^2)$. Остается проверить, что $\psi^{+}(\lambda^2,\ x) \in$ $\in L_2(0,\ \infty)$, $\psi^{-}(\lambda^2,\ x) \in L_2(-\infty,\ 0)$.

Как известно,

$$\int\limits_{0\,(-\infty)}^{\infty\,(0)} |\psi_{\tilde{k}}^{\pm}(\lambda^2,\ x)|^2\, dx \leqslant \pm\frac{\operatorname{Im} m_{\tilde{k}}^{\pm}(\lambda^2)}{\operatorname{Im}\lambda^2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{0\,(-N)}^{N\,(0)} |\psi_{\tilde{k}}^{\pm}(\lambda^2,\ x)|^2\, dx \leqslant \pm\frac{\operatorname{Im} m_{\tilde{k}}^{\pm}(\lambda^2)}{\operatorname{Im}\lambda^2}.$$

Устремляя в этих неравенствах сначала $\tilde{k} \to \infty$, а затем $N \to \infty$, находим, что $\psi^{+}(\lambda^2,\ x) \in L_2(0,\ \infty)$, $\psi^{-}(\lambda^2,\ x) \in L_2(-\infty,\ 0)$.

Достаточность. На отрезке $(-l,\ l)$ выберем N точек $l_j(N)$, удовлетворяющих условиям 1) $-l = \lambda_1(N) < \lambda_2(N) < \ldots < \lambda_N(N) = l + \frac{1}{N}$, $(\lambda_j(N) \neq 0)$; 2) $|\lambda_j(N)| \neq |\lambda_k(N)|$, если $j \neq k$; 3) $\max\limits_{1<j<N}(\lambda_j(N) - \lambda_{j-1}(N)) \leqslant \frac{a}{N}\, l$, $a = \mathrm{const}$; и положим $\delta_j = \rho(\lambda_j(N)) - \rho(\lambda_{j-1}(N))$.

Упорядочим числа $\lambda_j^2(N)$ в порядке возрастания:

$$\lambda_{\alpha_1}^2(N) < \lambda_{\alpha_2}^2(N) < \ldots < \lambda_{\alpha_N}^2(N)$$

и рассмотрим многочлены

$$\Lambda_N(z) = \prod_1^N (z - \lambda_{\alpha_j}^2(N)); \tag{15}$$

$$T_N(z) = \Lambda_N(z)\left[1 - \sum_1^N \frac{\delta_j(N)}{z - \lambda_{\alpha_j}^2(N)}\right].$$

Пусть $\varkappa_{\alpha_1}^2(N), \ldots, \varkappa_{\alpha N}^2(N)$ — корни полинома $T_N(z)$, взятые в порядке возрастания; они положительны, все различные и перемежаются с корнями полинома $\Lambda_N(z)$:

$$0 < \lambda_{\alpha_1}^2(N) < \varkappa_{\alpha_1}^2(N) < \cdots < \varkappa_{\alpha_{N-1}}^2(N) < \lambda_{\alpha_N}^2(N) < \varkappa_{\alpha_N}^2(N). \tag{16}$$

Действительно, полином $T_N(z)$ имеет на концах сегмента $[\lambda_{\alpha_j}^2(N), \lambda_{\alpha_{j+1}}^2(N)]$ противоположные знаки и меняет знак там один раз, но так как все числа $\lambda_{\alpha_j}^2(N)$ $(\alpha_j = 1, \ldots, N)$ различны, то приведенные неравенства верны.

Оценим наибольший из корней $\varkappa_{\alpha_N}^2(N)$, для чего определим, при каких условиях на $\omega > 0$ $T(\lambda_{\alpha_N}^2(N) + \omega) > 0$. Поскольку $\Lambda(\lambda_{\alpha_N}^2(N) + \omega) > 0$, то $T(\lambda_{\alpha_N}^2(N) + \omega) > 0$, если

$$1 - \sum_1^N \frac{\delta_m(N)}{\lambda_{\alpha_N}^2(N) + \omega - \lambda_{\alpha_m}^2(N)} > 0$$

или

$$\sum_1^N \frac{\delta_m(N)}{\lambda_{\alpha_N}^2(N) + \omega - \lambda_{\alpha_m}^2(N)} < 1.$$

Так как

$$\sum_1^N \frac{\delta_m}{\lambda_{\alpha_N}^2(N) + \omega - \lambda_{\alpha_m}^2(N)} \leqslant \frac{\sum_1^N \delta_m}{\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\xi)}{\omega},$$

то $T(\lambda_{\alpha_N}^2(N) + \omega) > 0$, если $\omega > \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\xi)$, следовательно,

$$\varkappa_{\alpha_N}^2(N) < \lambda_{\alpha_N}^2(N) + \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\xi) \leqslant l^2 + \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\xi).$$

Рассмотрим последовательность задач (1) с безотражательными потенциалами $q_N(x) \in B_1(\mu)$, восстанавливаемыми по наборам $(\lambda_{j,N}(0), \varkappa_{j,N})$, где $\lambda_{j,N}(0) = \lambda_{\alpha_j}(N)$, $\varkappa_{j,N} = \varkappa_{\alpha_j}(N)$.

Согласно лемме 2 это возможно, так как выполнены неравенства (16). Из предыдущего следует, что $|\mu| \leqslant l^2 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\xi)$.

Так как множество $B_1(\mu)$ компактно в смысле равномерной сходимости на каждом конечном интервале, то существует подпоследовательность $q_{\tilde{N}}(x)$, сходящаяся к $q(x) \in \overline{B(\mu)}$ в указанном смысле. Покажем, что соответствующая потенциалу $q(x)$ функция (3) совпадает с (14).

Пусть $n_{\tilde{N}}(\lambda)$ — функция (3), соответствующая потенциалу $q_{\tilde{N}}(x)$. По лемме 3

$$n_{\tilde{N}}(\lambda) = i\lambda + i\sum_{1}^{\tilde{N}} \frac{-\lambda'_{j,\tilde{N}}(0)}{\lambda - i\lambda_{j,\tilde{N}}(0)}.$$

Используя формулы (7), (15), находим, что

$$-\lambda_{j,N}(0) = -\left.\frac{T_{\tilde{N}}(z)}{\prod\limits_{k\neq j}(z - \lambda^2_{k,\tilde{N}}(0))}\right|_{z=\lambda^2_{j,\tilde{N}}(0)} = \delta_j(\tilde{N}).$$

Таким образом,

$$n_{\tilde{N}}(\lambda) = i\lambda + i\sum_{1}^{\tilde{N}} \frac{\delta_j(\tilde{N})}{\lambda - i\lambda_{j,\tilde{N}}(0)}.$$

Очевидно, что при $\tilde{N} \to \infty$ $n_{\tilde{N}}(\lambda) \to n(\lambda)$, где $n(\lambda)$ — функция (14).

Итак, в смысле сходимости, в $B_1(\mu)$ $q_{\tilde{N}}(x) \to q(x)$, кроме того, $n_{\tilde{N}}(\lambda) \to n(\lambda)$. Как показано выше, отсюда следует, что функция (14) $n(\lambda)$ является функцией (3) для потенциала $q(x) \in \overline{B(\mu)}$, причем $|\mu| \leqslant l^2 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\xi)$.

Теорема 2. *Для того чтобы потенциал $q(x)$ принадлежал множеству $\overline{B(\mu)}$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ему функция* (3) *$n(\lambda)$ была аналитична вне конечного отрезка мнимой оси.*

Необходимость следует из теоремы 1.

Достаточность. Пусть функция (3) $n(\lambda)$ аналитична всюду, кроме конечного отрезка мнимой оси. Согласно (3′) имеем $\operatorname{Im} n(\lambda) > 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Положим $\lambda_1 = i\lambda$, $n(-i\lambda_1) = n_1(\lambda_1)$. В полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0$ функция $n_1(\lambda_1)$ аналитична и $\operatorname{Im} n_1(\lambda_1) > 0$. Следовательно, $n_1(\lambda_1)$ — функция Неванлинны, и она представима в виде

$$n_1(\lambda_1) = a + b\lambda_1 + \int \frac{1 + t\lambda_1}{t - \lambda_1} d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая функция. Так как $n(\lambda)$ аналитична вне конечного промежутка мнимой оси, то $n_1(\lambda_1)$ аналитична вне конечного промежутка вещественной оси, и функция $\sigma(t)$ принимает вне этого промежутка постоянное значение. Следовательно,

$$\int \frac{1+t\lambda_1}{t-\lambda_1} d\sigma(t) = \int \frac{d\rho(t)}{t-\lambda_1} - \int t\, d\sigma(t),$$

и оба интеграла справа существуют. Здесь $d\rho(t) = (1+t^2)\, d\sigma(t)$ — неотрицательная мера с конечным носителем.

Перепишем функцию $n_1(\lambda_1)$ в виде

$$n_1(\lambda_1) = a_1 + b\lambda_1 + \int \frac{d\rho(t)}{t-\lambda_1},$$

где $a_1 = a - \int t\, d\sigma(t)$.

Возвращаясь к прежним обозначениям, получим

$$n(\lambda) = a_1 + bi\lambda + \int \frac{d\rho(t)}{t-i\lambda}.$$

Так как при любом потенциале $q(x)$ при $|z| \to \infty$ асимптотически

$$m^{\pm}(z) = i\sqrt{z} + o(1) \quad (0 < \varepsilon < \arg z < \pi - \varepsilon < \pi),$$

то $a_1 = 0$, $b = 1$ и функция $n(\lambda)$ имеет вид

$$n(\lambda) = i\lambda + i\int \frac{d\rho(t)}{\lambda - ti}.$$

Итак, функция (3) $n(\lambda)$, соответствующая потенциалу $q(x)$, имеет вид (14), откуда по теореме 1 следует, что $q(x) \in \overline{B(\mu)}$.

Замечание. Пусть коэффициенты отражения $r^+(\lambda)$, $r^-(\lambda)$, соответствующие убывающему потенциалу $q(x)$, финитны: $r^+(\lambda) = r^-(\lambda) = 0$ при $|\lambda| \geqslant C$. Так как

$$r^{\pm}(\lambda) = \mp \frac{b(\mp\lambda)}{a(\lambda)},$$

$$\text{где } b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} W\{e^-(\lambda, x),\ e^+(\lambda, x)\} =$$

$$= \frac{1}{2i\lambda} e^+(\lambda, 0)\, e^-(\lambda, 0)\, \{m^-(\lambda^2) - m^+(\lambda^2)\},$$

то равенство $r^{\pm}(\lambda) = 0$ при $|\lambda| \geqslant C$ эквивалентно условию $m^+(\lambda^2) = m^-(\lambda^2)$ при $\lambda^2 \geqslant C^2$.

Поскольку уравнение (1) можно переписать в виде $-y'' + [q(x) - C^2]\, y = (\lambda^2 - C^2)\, y$, то $m^{\pm}_{q-C^2}(\lambda^2 - C^2) = m^{\pm}_q(\lambda^2)$.

Отсюда следует, что если $m^+_q(\lambda^2) = m^-_q(\lambda^2)$ при $\lambda^2 \geqslant C^2$, то $m^+_{q-C^2} \times (\lambda^2 - C^2) = m^-_{q-C^2}(\lambda^2 - C^2)$ при $\lambda^2 - C^2 \geqslant 0$.

Полагая $\lambda_1^2 = \lambda^2 - C^2$, замечаем, что функция

$$n(\lambda_1) = \begin{cases} m^+_{q-C^2}(\lambda_1^2) \ \operatorname{Im}\lambda_1 > 0; \\ m^-_{q-C^2}(\lambda_1^2) \ \operatorname{Im}\lambda_1 < 0 \end{cases}$$

аналитична по λ_1 всюду вне некоторого промежутка мнимой оси. Следовательно, по теореме 2 $q(x) - C^2 = q_0(x) \in \overline{B(\mu)}$.

Итак, мы доказали следующий факт: если коэффициенты отражения финитны: $r^+(\lambda) = r^-(\lambda) = 0$ при $|\lambda| \geqslant C$, то $q(x) = C^2 + q_0(x)$, где $q_0(x) \in \overline{B(\mu)}$.

Список литературы: 1. *Лундина Д. Ш.* Компактность множества безотражательных потенциалов // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1985. Вып. 44. С. 57—67. 2. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966. С. 110—135.

Поступила в редколлегию 27.01.88