УДК 513.33

Б. Я. ЛЕВИН

СВЯЗЬ МАЖОРАНТЫ С КОНФОРМНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ Ч. 2 *

Изучим связь между мажорантами различных классов субгармонических функций и некоторыми специальными конформными отображениями. В частности, убедимся в том, что если мажоранта $v(z)$ некоторого класса K_φ конечна, то она совпадает с мнимой частью функции, конформно отображающей верхнюю полуплоскость C_+ на область специального вида, принадлежащую верхней полуплоскости. Доказательству этого факта посвящены подразд. 2.1, 2.2. Названная связь дает возможность решать различные экстремальные задачи в классах субгармонических функций, сводя их к отысканию специальных конформных отображений.

В подразд. 2.3 доказана обратная теорема. Оказывается, что мнимая часть всякой функции, конформно отображающей верхнюю полуплоскость C_+ на некоторую область Ω определенного вида, продолженная по формуле $v(z) = v(\bar{z})$ на всю плоскость, является мажорантой некоторого симметричного класса K_φ, который определяется областью Ω.

В подразд. 2.4 даны приложения общих теорем к решению некоторых задач на экстремум.

2.1. Поведение комплексной мажоранты на вещественной оси. Комплексной мажорантой класса K_φ будем называть функцию

$$w(z) = u(z) + iv(z) \quad \textbf{(2.1)},$$

голоморфную в C_+, у которой $v(z)$ — мажоранта класса K_φ; $u(z)$ — сопряженная ей гармоническая функция. Комплексная мажоранта, очевидно, есть N-функция, т. е. отображает C_+ в C_+. При некоторых условиях, наложенных на функцию $\varphi(x)$, мы докажем непрерывность комплексной мажоранты в полуплоскости $\overline{C}_+$. Относительно функции $\varphi(x)$ и класса K_φ будем всюду в дальнейшем предполагать следующее:

1) множество точек E, в которых функция $\varphi(x)$ конечна, замкнуто;

2) функция $\varphi(x)$ — полунепрерывна снизу на множестве E;

3) каждая точка $x_0 \in E$ является регулярной для лебегова множества $E_\varepsilon(x_0) = \{x : \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$**.

4) Мажоранта класса K_φ конечна.

В дальнейшем будем считать, что эти условия выполнены, не оговаривая этого специально. Для доказательства непрерывности комплексной мажоранты в $\overline{C}_+$ нам понадобится несколько лемм.

* Мы пользуемся здесь определениями и теоремами из нашей статьи «Мажоранты в классах субгармонических функций» из предыдущего выпуска данного сборника.

** Заметим, что условия 2), 3) выполняются, если предположить, что $\varphi(x)$ непрерывна на множестве E и это множество состоит из регулярных точек.

Лемма 2.1. *Множество $E(K_\varphi)$ точек, в которых выполняется равенство $v(x)=\varphi(x)$, замкнуто, и функция $v(x)$ непрерывна на этом множестве* ▲

Доказательство. Очевидно, что множество $E(K_\varphi)\subseteq E$. Пусть x_0 — предельная точка множества $E\ (K_\varphi)$. В силу замкнутости множества E она принадлежит E. По следствию 2 из теоремы 1.11 имеем $v(x_0)\leqslant\varphi(x_0)$. Но функция $v(x)$ полунепрерывна сверху и поэтому

$$v(x_0)\geqslant\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}}}\,v(x)\geqslant\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E(K_\varphi)}}}\,\varphi(x)\geqslant\underline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E(K_\varphi)}}}\,\varphi(x)=\varphi(x_0).$$

Отсюда получается, что $v(x_0)=\varphi(x_0)$, и, следовательно, множество $E(K_\varphi)$ замкнутое. Функция $v(x)$, полунепрерывная сверху всюду, является, в силу 2), полунепрерывной снизу на множестве $E(K_\varphi)$. Таким образом, $v(z)$ — непрерывная функция на замкнутом множестве $E(K_\varphi)$ ■

Лемма 2.2. *На интервалах вещественной оси, образующих дополнение к $E(K_\varphi)$, функция $v(x)$ — гармоническая* ▲

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка, принадлежащая такому интервалу. В этой точке, очевидно, выполняется неравенство $v(x_0)<\varphi(x_0)$. Из полунепрерывности функции $v(z)$ сверху следует, что при $\varepsilon=\frac{1}{2}[\varphi(x_0)-v(x_0)]$ в некоторой δ-окрестности точки x_0 в $\boldsymbol{C}$ будет выполнено неравенство $v(z)<\varphi(x_0)-\varepsilon$.

Выбрав в этой окрестности круг c с центром в точке x_0 и выгладив функцию $v(z)$ в c, получим всюду внутри этого круга $v_c(z)<\varphi(x_0)-\varepsilon$. Так как, с другой стороны, функция $\varphi(x)$ полунепрерывна снизу, то при достаточно малом $\delta>0$ и $|x-x_0|<\delta$ будет выполняться $\varphi(x)>\varphi(x_0)-\varepsilon$.

Из двух последних неравенств следует, что $v_c(x)<\varphi(x)$ при $|x-x_0|<\delta$, а значит, $v_c(x)\leqslant\varphi(x)$ на всей вещественной оси. Отсюда следует, что операция выглаживания в круге c не выводит функцию, принадлежащую K_φ, из этого класса. Из замечания к теореме 1.1 следует, что мажоранта $v(z)$ — гармоническая функция в точке x_0 ■

Прежде чем перейти к формулировке следующей леммы, напомним, что каждой субгармонической функции в плоскости отвечает по Риссу некоторое распределение масс. Так как функция $v(z)$ по теореме 1.1 и предыдущей лемме является гармонической всюду в плоскости, за исключением множества $E(K_\varphi)$, расположенного на вещественной оси, то вся риссовская масса, отвечающая функции $v(z)$, сосредоточена на этом замкнутом множестве. Будем соответствующую меру обозначать $d\mu(x)$, а через $\mu(x)$ соответственно меру сегмента $[0, x]$ при $x>0$ и меру полусегмента $[x, 0)$ с обратным знаком при $x<0$. В дальнейшем при доказательстве следующей ниже леммы будем пользоваться известными теоремами из теории целых функций экспоненциального типа, однако, в обобщенной форме, заменяя функцию $\ln|f(z)|$ субгармонической функцией $v(z)$ и считающую функцию множества корней $f(z)$, расположенного на вещественной оси, функцией $\mu(x)$.

Эти обобщения легко получить, внося небольшие изменения в доказательства соответствующих теорем из теории целых функций. Будем ссылаться на соответствующие теоремы из теории целых функций, изложенные в [1].

Лемма 2.3. *Пусть $v_\varphi(z)$ — мажоранта некоторого симметричного класса K_φ. Тогда при $y > 0$ имеет место следующее представление:*

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, d\mu(t)}{(t-x)^2 + y^2}, \tag{2.2}$$

где $d\mu(t)$ — мера, сосредоточенная на $E(K_\varphi)$. При этом функция $\mu(t)$ будет удовлетворять условиям

$$\mu(t) = \frac{\sigma}{\pi} t + o(|t|), \tag{2.3}$$

где σ — степень функции $v(z)$, и существует предел

$$\delta = \lim_{R\to\infty} \left\{ \int_{1 \leqslant |t| \leqslant R} \frac{d\mu(t)}{t} \right\}. \tag{2.4}$$

Кроме того, $\mu(t)$ является непрерывной неубывающей функцией на вещественной оси ▲

Доказательство. Функция $v(z)$ — субгармоническая во всей плоскости, гармоническая всюду, кроме множества $E(K_\varphi)$ вещественной оси, и поэтому отвечающие ей массы сосредоточены на этом множестве. Кроме того, в силу замечания к теореме 1.7 функция $v(z)$ не выше, чем первого порядка роста*. По обобщенной теореме Адамара** эта функция представляется в форме

$$v(z) = \operatorname{Re}\left\{ \int_{|t|\geqslant 1} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) + \frac{z}{t} \right] d\mu(t) + \int_{-1}^{1} \ln|t-z|\, d\mu(t) \right\} + \\ + c_0 + c_1 x + c_2 y, \tag{2.5}$$

где c_0, c_1, c_2— константы, а $d\mu(t)$ — отвечающее функции $v(z)$ распространение масс. Заметим, что если неубывающая функция $\mu(t)$ имеет разрыв в точке t_0, то из (2.5) следует, что $v(t_0) = -\infty$, а это противоречит неотрицательности функции $v(z)$. Таким образом, $\mu(t)$ — непрерывная функция.

Как видно из замечания к теореме 1.7, $v(z)$ является субгармонической функцией конечной степени и вполне регулярного роста*** с индикаторной диаграммой, совпадающей с отрезком $[-i\sigma, i\sigma]$ мнимой оси. Из общей теории функций вполне регулярного роста и конечной степени**** следует асимптотическое равенство (2.3) и существование

* То есть асимптотически $v(z) < |z|^{1+\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$.

** См. [1, с. 38—39].

*** Теория функций вполне регулярного роста была развита в работах А. Пфлюгера и Б. Я. Левина [1]. Перенесение этой теории на субгармонические функции в R^n сделано В. С. Азариным [2,3].

**** См. [1, гл. V, теорема 11].

предела (2.4). Заметим, что индикаторная диаграмма функции $v(z)$ лежит на оси OY и, как легко проверяется, $c_1 + \delta = 0$. Из симметрии $v(\bar{z}) = v(z)$ следует, что $c_2 = 0$. Таким образом, представление (2.5) может быть переписано в форме

$$v(z) = c_0 + \operatorname{Re}\left\{\lim_{R\to\infty} \int\limits_{1\leqslant|t|\leqslant R} \ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) d\mu(t) + \int\limits_{-1}^{1} \ln(t - z)\, d\mu(t)\right\}. \quad (2.6)$$

Теперь для доказательства представления (2.2) достаточно продифференцировать (2.6) по y и выделить вещественную часть ■

Заметим, что условие 5 в определении класса обеспечивает невозможность тождества $v(z) \equiv c_0$ и поэтому $d\mu(t) \not\equiv 0$. Это обстоятельство дает нам возможность сформулировать следствие.

Следствие. *При $y \neq 0$ справедливо неравенство* $\frac{dv}{dy} > 0$ **(2.7)**, т. е. мажоранта $v(z)$ монотонно возрастает с ростом $|y|$ ▲

Замечание. Представление (2.6), утверждения леммы 2.3 и следствие из нее остаются в силе, если требование, чтобы $v(z)$ была мажорантой некоторого симметричного класса K_φ, заменить более слабым, на первый взгляд, требованием, чтобы $v(z)$ была субгармонической функцией во всей плоскости, положительной гармонической в C_+ и C_- и $v(z) = v(\bar{z})$* ▲

Это замечание очевидно, так как при доказательстве (2.6) и леммы 2.3 используется лишь это более слабое требование.

Лемма 2.4. *Функция $u(x, y)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости C_+ и*

$$u(x, 0) - u(x_0, 0) = \pi[\mu(x) - \mu(x_0)] \ ▲ \quad (2.9)$$

Доказательство. Условия Коши — Римана дают возможность записать равенство (2.2) при $z \in C_+$ в форме

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t - x)^2 + y^2}\, d\mu(t) \quad (2.10)$$

и после интегрирования от x_0 до x получить

$$u(x, y) - u(x_0, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y}{(t - \zeta)^2 + y^2}\, d\zeta\right) d\mu(t). \quad (2.11)$$

Переходя к пределу при $y \downarrow 0$ так, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.2, получим (2.9). Из непрерывности функции $\mu(x)$ следует непрерывность $u(x, 0)$ ■

Сделаем следующее весьма важное для дальнейшего замечание.

---

* Если не требовать симметрии, то следует в представлении (2.6) добавить член $c_2 y$, где $c_2 = \frac{1}{2}(\sigma_+ - \sigma_-)$.

Замечание. Как следует из равенства (2.9), функция $u(x, 0)$ — непрерывная, неубывающая и на каждом из интервалов дополнительного к $E(K_\varphi)$ множества $CE(K_\varphi)$ сохраняет постоянное значение ▲

Лемма 2.5. *На каждом из интервалов множества $CE(K_\varphi)$ функция $v(z)$ вогнутая* ▲

Доказательство. Так как на всех интервалах I множества $CE(K_\varphi)$ имеем $d\mu(t) = 0$, то из (2.2) получаем, что на этих интервалах $\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$. Из следствия к лемме 2.3 легко получается, что $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \geqslant 0$. Так как на всех таких интервалах I функция v — гармоническая, то $v''(x) \leqslant 0$ при $x \in I$ ■

Теорема 2.1. *Если функция $\varphi(x) \geqslant 0$ удовлетворяет на всей вещественной оси условиям 1—4, то комплексная мажоранта $w(z) = u(z) + iv(z)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\overline{C}_+$* ▲

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, нужно установить лишь непрерывность функции $v(z)$, ибо непрерывность вещественной части $u(z)$ уже доказана в лемме 2.4. Сначала докажем непрерывность функции $v(x)$ на вещественной оси. В лемме 2.1 доказано, что она непрерывна на множестве $E(K_\varphi)$. Докажем теперь, что она непрерывна на замыкании любого смежного интервала J множества $E(K_\varphi)$. Так как на J функция $v(z)$ — гармоническая, то нужно проверить ее непрерывность лишь на концах сегмента I. Пусть x_0 — левый конец сегмента I. Так как $x_0 \in E(K_\varphi)$, то $v(x_0) = \varphi(x_0)$. Из полунепрерывности сверху функции $v(z)$ в точке x_0 имеем

$$\overline{\lim_{x \downarrow x_0}} v(x) \leqslant v(x_0). \tag{2.12}$$

С другой стороны, функция $v(z)$ — гармоническая в полукруге $S_\delta = \{z : |z - x_0| < \delta, \ \mathrm{Re}\, z > x_0\}$. На диаметре $\mathrm{Re}\, z = x_0$ всюду, кроме, быть может, точки x_0, функция $v(z)$ принимает (как гармоническая функция) определенные предельные значения, причем по следствию из леммы 2.3 имеем $v(x_0 + iy) > v(x_0)$ при $y \neq 0$. Поэтому справедливо неравенство $v(x) > v(x_0)\,\omega(x, d)$, где $\omega(x, d)$ — гармоническая мера диаметра $x = x_0$, $|y| < \delta$ полукруга S_σ. Из этого неравенства следует

$$\underline{\lim_{x \downarrow x_0}} v(x) \geqslant v(x_0).$$

Сопоставляя это неравенство с (2.12), получаем

$$\lim_{x \downarrow x_0} v(x) = v(x_0).$$

Так же проверяется непрерывность функции $v(x)$ на правом конце сегмента I.

Докажем непрерывность функции $v(x)$ на всей вещественной оси. Так как функция $v(x)$ непрерывна на замыкании каждого смежного интервала, то нужно проверить ее непрерывность только в точках множества $E(K_\varphi)$.

По лемме 2.1 функция $v(x)$ непрерывна на множестве $E(K_\varphi)$. Построим теперь функцию $\psi(x)$, которая совпадает с $\varphi(x)$ на $E(K_\varphi)$ и линейно интерполирует функцию $\varphi(x)$ на смежных интервалах этого множества. Очевидно, что функция $\psi(x)$ непрерывна всюду и что, в силу вогнутости функции $v(x)$ на смежных интервалах, выполняется неравенство $v(x) \geqslant \psi(x)$, в то время как на $E(K_\varphi)$ верно равенство $v(x) = \psi(x)$. Поэтому при $x_0 \in E(K_\varphi)$ имеем $\underline{\lim}_{x \to x_0} v(x) \geqslant v(x_0)$, т. е. функция $v(x)$ полунепрерывна снизу в точке x_0. Так как, с другой стороны, $v(x)$ всюду полунепрерывна сверху, то она непрерывна в точке x_0. Итак, функция $v(x)$ непрерывна на всей вещественной оси.

Покажем теперь, что $v(z)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\bar{C}_+$.

Очевидно, что нужно лишь проверить непрерывность функции $v(z)$ в граничных точках, т. е. в точках вещественной оси. Так как $v(z)$ полунепрерывная сверху функция, то в достаточно малой верхней полуокрестности произвольной точки x_0 вещественной оси будем иметь $v(z) < v(x_0) + \varepsilon$ и потому

$$\overline{\lim_{z \to x_0}} v(z) \leqslant v(x_0). \tag{2.13}$$

Для оценки с другой стороны заметим, что, в силу непрерывности функции $v(x)$ на вещественной оси, имеем в достаточно малой вещественной окрестности $|x - x_0| < \delta$ точки x_0: $v(x) > v(x_0) - \varepsilon$.

По следствию из леммы 2.3 получаем, что во всей верхней δ-окрестности точки x_0: $v(z) > v(x_0) - \varepsilon$ и, следовательно, $\underline{\lim}_{z \to x_0} v(z) \geqslant v(x_0)$. Сопоставляя это неравенство с (2.13), убеждаемся в непрерывности функции $v(z)$ в каждой точке вещественной оси. Заметим еще, что мажоранта $v(z)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\bar{C}_-$ и, следовательно, во всей плоскости ■

В статье Н. И. Ахиезера и автора [1] построена мажоранта для класса K_φ^σ в том частном случае, когда $\varphi(x) = 0$ на некотором замкнутом множестве E, состоящем из регулярных точек, и $\varphi(x) = +\infty$ на дополнительных к E интервалах вещественной оси. В этой статье мажоранта определена как мнимая часть функции, дающей специальное отображение верхней полуплоскости. В разделе 2.2 мы покажем, что такая связь между мажорантами и специальными конформными отображениями имеет место и в общем случае при произвольном классе K_φ.

2.2. **Конформное отображение, даваемое комплексной мажорантой.** Докажем, что комплексная мажоранта есть однолистная функция в C_+, и найдем вид области, на которую она отображает верхнюю полуплоскость C_+. С этой целью исследуем сначала кривую S, на которую непрерывная функция $w = u(x) + iv(x)$ отображает вещественную ось. Уравнение этой кривой $u = u(x)$, $v = v(x)$ при $-\infty < x < +\infty$.

Функция $u(x)$ — монотонная, неубывающая на всей вещественной оси при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ и $-\infty \leqslant a < u(x) < b \leqslant +\infty$. На интервалах, смежных к множеству $E(K_\varphi)$, функция $u(x)$ сохраняет постоянное значение. Поэтому каждый интервал из дополнения к множеству $E(K_\varphi)$ переходит в вертикальный отрезок, причем, в силу вогнутости функции $v(x)$ на всех таких интервалах, точка $(u(x), v(x))$ либо монотонно проходит этот отрезок, либо ордината $v(x)$ один раз меняет возрастание на убывание.

Для того чтобы представить иначе эту кривую, введем функцию $x = x(u)$, обратную к монотонной функции $u = u(x)$. Очевидно, что эта функция определена всюду при $-\infty \leqslant a < u < b \leqslant +\infty$, за исключением тех значений u, которые отвечают интервалам, дополнительным к множеству $E(K_\varphi)$. В этих точках u_j ($\pm j = 0, 1, \ldots$) монотонная функция $x = x(u)$ имеет правый и левый пределы, которые, очевидно, совпадают с правым и левым концами соответствующего смежного интервала. После этого введем функцию

$$\theta = v[x(u)], \tag{2.14}$$

которая определена всюду на (a, b), за исключением точек u_j. В этих точках положим $\theta(u_j) = \min\{v[x(u_j+0)],\ v[x(u_j-0)]\}$. Функция $v = \theta(u)$ получается при таком определении полунепрерывной снизу, и все ее точки разрыва — первого рода.

Вся кривая S, очевидно, состоит из графика функции $v = \theta(u)$ и не более чем счетного множества вертикальных отрезков. При этом замыкание графика совпадает с образом множества $E(K_\varphi)$, а проекция множества вертикальных отрезков на ось OU содержит множество точек разрыва функции $\theta(u)$. Нижний конец каждого отрезка H_j имеет ординату $\underline{v}_j = \min\{\theta(u_j+0),\ \theta(u_j-0)\}$, а ордината верхнего конца отрезка $\bar{v}_j \geqslant \max\{\theta(u_j+0),\ \theta(u_j-0)\}$.

Заметим еще, что эти вертикальные отрезки не имеют предельных отрезков, за исключением, возможно, отрезков на прямых $u = a$ и $u = b$. Действительно, если $u = u_\alpha$ есть проекция на ось OU предельного вертикального отрезка и $a_\alpha = \theta(u_\alpha - 0)$, $b_\alpha = \theta(u_\alpha + 0)$, то либо при $x \uparrow a_\alpha$, либо при $x \downarrow b_\alpha$ функция $v(x)$ не имеет предельного значения, а это противоречит непрерывности функции $v = v(x)$.

Из неотрицательности функции $v = v(x)$ следует еще, что вся кривая S расположена в полуплоскости $\bar{C}_+$. В дальнейшем будем называть S-кривой непрерывную кривую, удовлетворяющую всем перечисленным условиям.

О п р е д е л е н и е. Непрерывная кривая $u = u(x)$, $v = v(x)$, $-\infty < x < \infty$, называется S-кривой, если она состоит из

а) графика θ функции $v = \theta(u) \geqslant 0$, $-\infty \leqslant a < u < b \leqslant +\infty$, не имеющей точек разрыва 2-го рода и полунепрерывной снизу; б) отрезков $H_j = \{w : u = u_j = \text{const},\ a_j \leqslant v \leqslant b_j < \infty\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, где $a_j = \min\{\theta(u_j+0),\ \theta(u_j-0)\}$; $b_j \geqslant \max\{\theta(u_j+0),\ \theta(u_j-0)\}$;

в) и если все точки разрыва функции $\theta = \theta(u)$ входят в множество $\{u_j\}$, и отрезки H_j не имеют предельных отрезков, за исключением, возможно, отрезков на прямых $u = a$ и $u = b$.

Определение. Обозначим Ω_s область, ограниченную некоторой S-кривой, в каждой точке $w = u + iv$ которой выполняется неравенство $v > \theta(u)$.

Если точка на вертикальном отрезке S-кривой достигается из области Ω_s двумя неэквивалентными способами, то будем различать «правую» и «левую» точки разреза. После этого можно, очевидно, так параметризовать S-кривую, чтобы она стала простой кривой Жордана. Вещественная ось плоскости отображается при этом функцией $w = w(x)$ на S-кривую взаимнооднозначно и при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ точка $w(x)$ проходит всю S-кривую, оставляя область Ω_s слева. Для доказательства однолистности комплексной мажоранты понадобится лемма, которая легко следует из принципа Фрагмена — Линделефа.

Лемма 2.6. *Если голоморфная в* $\boldsymbol{C}_+$ *и непрерывная в* $\overline{\boldsymbol{C}}_+$ функция $F(z)$ ограничена в $\boldsymbol{C}_+$, а на вещественной *оси стремится к нулю при* $|x| \to \infty$, *то* $F(z) \rightrightarrows 0$ *при* $|z| \to \infty$ ▲

Доказательство. Функция

$$F_\delta(z) = \frac{\delta z}{i + \delta z} F(z)$$

удовлетворяет всем условиям леммы, и при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно малом $\delta > 0$ будем иметь на вещественной оси $|F_\delta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. По теореме Фрагмена — Линделефа отсюда следует, что всюду в C_+

$$|F(z)| < \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{\delta z + i}{\delta z}\right|,$$

и при $|z| > \delta^{-1}$ будем иметь $|F(z)| < \varepsilon$ ■

Определение. N-функцией называется функция, голоморфная в $\boldsymbol{C}_+$, значения которой также принадлежат $\boldsymbol{C}_+$, т. е. $\operatorname{Im} F(z) > 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$.

Сформулируем сейчас теорему об N-функциях.

Теорема 2.2. *Пусть* N — функция $w(z)$ *непрерывна в* $\overline{\boldsymbol{C}}_+$ и $w(z) = u(z) + iv(z)$, *где* $u(z)$ *и* $v(z)$ — *вещественные функции. Если* $u(x)$ — *неубывающая функция от* x $(-\infty < x < +\infty)$ *и* $w(z) \not\equiv \mathrm{const}$, *то* $w(z)$ — *однолистная функция и отображает* $\boldsymbol{C}_+$ *на некоторую область типа* Ω_s▲

Доказательство. Естественно воспользоваться для доказательства принципом аргумента. Однако для этого необходимо исследовать поведение функции $w(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Удобнее это сделать сначала для функции $w_\varepsilon(z) = w(z) + \varepsilon z = u_\varepsilon(z) + iV_\varepsilon(z)$, где ε — положительная постоянная. Эта функция также удовлетворяет всем условиям теоремы, причем $u_\varepsilon(x)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{w}_\varepsilon(z) = -\frac{1}{w_\varepsilon(z) + i}.$$

Это, очевидно, N-функция, ограниченная в $\boldsymbol{C}_+$, так как $|\tilde{w}_\varepsilon(z)| \leqslant 1$. Кроме того, $\tilde{w}_\varepsilon(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Применяя лемму 2.6, убеждаемся в том, что $\tilde{w}_\varepsilon(z) \rightrightarrows 0$ при $|z| \to \infty$, а следовательно, $w_\varepsilon(z) \rightrightarrows \infty$. Выберем теперь произвольную точку w_0, расположенную над кривой S_ε, которая задана уравнениями $u = u_\varepsilon(x)$, $v = v_\varepsilon(x)$ в плоскости w, и полуокружность $C_R = \{z : |z| = R, \ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ в плоскости z настолько большого радиуса R, чтобы на C_R выполнялось неравенство $|w_\varepsilon(z)| > |w_0|$.

Теперь, если точка z один раз обходит контур Γ_R, составленный из сегмента $[-R, R]$ и полуокружности C_R, то любая непрерывная ветвь функции $\arg [w_\varepsilon(z) - w_0]$ получает приращение 2π. Если же точка w_0 лежит под кривой S_ε, то приращение этой функции равно нулю.

Итак, функция $w_\varepsilon(z)$ принимает в $\boldsymbol{C}_+$ точно один раз каждое значение w_0, которому отвечает точка над кривой S_ε, и не принимает других значений.

Таким образом, функция $w_\varepsilon(z)$ отображает конформно полуплоскость $\boldsymbol{C}_+$ на область $\Omega_{s,\,\varepsilon}$, расположенную над кривой S_ε.

Функция $w = w(z)$ — предельная при $\varepsilon \downarrow 0$ для однолистных функций $\omega_\varepsilon(z)$ и потому либо однолистна, либо тождественно равна постоянной.

Из этой теоремы непосредственно следует основная теорема этого раздела.

Теорема 2.3. *Комплексная мажоранта $w(z)$ симметричного класса K_φ конформно отображает полуплоскость $\boldsymbol{C}_+$ плоскости z на некоторую область Ω_s. При этом отображении замкнутое множество $E(K_\varphi)$, на котором $v(x) = \varphi(x)$, переходит в замыкание графика $v = \theta(u)$, а смежные интервалы — в вертикальные разрезы* ▲

Действительно, комплексная мажоранта $w(z)$ удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы и потому конформно отображает $\boldsymbol{C}_+$ на область Ω_s. Кроме того, как было нами установлено при изучении S-кривой, на которую $w = w(x)$ отображает вещественную ось, множество $E(K_\varphi)$ переходит в замыкание графика $v = \theta(u)$, а смежные интервалы — вертикальные отрезки ■

Вид области Ω_s существенно зависит от того, конечны или бесконечны концы a и b интервала изменения функции $u(x)$. Равенства (2.3), (2.4) и (2.9) дают возможность непосредственно получить некоторые утверждения, относящиеся к этому вопросу.

Замечание 1. Если степень функции $v(z)$ положительна, то, в силу равенств (2.3) и (2.9), $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Замечание 2. Для того чтобы выполнялось условие $a > -\infty$ ($b < \infty$), необходимо и достаточно, чтобы соответствующая масса была конечна, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{0} d\mu(t) < \infty \left(\int\limits_{0}^{\infty} d\mu(t) < \infty\right)$. При этом, в силу (2.4), будет выполняться условие

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t} < \infty \quad \left(\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{d\mu(t)}{t} > -\infty\right).$$

Это, как известно, означает, что $v(z)$ есть субгармоническая функция нулевого рода.

Замечание 3. Если $-\infty < a < b < \infty$, то в силу формулы (2.6) имеем

$$v(z) = \operatorname{Re}\int_a^b \ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) d\mu(t) + c_0.$$

Отсюда, очевидно, следует, что $v(z) = \mu \ln |z| + o(\ln |z|)$. Наоборот, если имеет место такое асимптотическое равенство, то в силу теоремы Иенсена для субгармонических функций получим $\mu(t) - \mu(-t) = O(1)$, т. е. $a > -\infty$, $b < +\infty$.

2.3. Конформное отображение полуплоскости C_+ на область Ω_s. Установим теорему, обратную к основной теореме раздела 2, а именно, докажем, что функция $w = w(z)$, дающая конформное отображение полуплоскости C_+ на произвольную область Ω_s, является комплексной мажорантой некоторого симметричного класса K_φ. Для этого сначала докажем теорему.

Теорема 2.4. *Пусть $w = u(z) + iv(z)$ есть N-функция, непрерывная в $\overline{C}_+$, и $u(x)$ — неубывающая функция на вещественной оси. Тогда функция $v(z)$, продолженная на всю плоскость C по формуле $v(z) = v(\overline{z})$, есть непрерывная субгармоническая функция в C.*

Доказательство. Функция $v(z)$, продолженная так, как указано в формулировке теоремы, является непрерывной во всей плоскости C и гармонической всюду, кроме некоторого множества точек на вещественной оси.

Для того чтобы изучить поведение функции $v(z)$ на вещественной оси, рассмотрим область $D_{R,\varepsilon}$, ограниченную окружностью $C_R = \{z : |z| = R\}$, прямой $y = \varepsilon$ и расположенную в полуплоскости C_+. Затем применим формулу Грина к функциям $v(\zeta)$ и $G(\zeta, z) = \ln\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \zeta z}\right|$ в области $D_{R,\varepsilon}$, предварительно удалив из нее кружок радиусом ρ с центром в точке z. Перейдя к пределу при $\rho \to 0$, получим

$$0 = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_{R,\varepsilon} \setminus c_\rho(z)} (v\Delta G - G\Delta u)\, d\omega \to \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D_{R,\varepsilon}} \left(v\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds - v(z),$$

или

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{c_{R,\varepsilon}} v\frac{\partial G}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} G(t + i\varepsilon, z)\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=\varepsilon} dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} v(t + i\varepsilon)\frac{\partial G}{\partial y}\Big|_{y=\varepsilon} dt.$$

Далее, используя условия Коши — Римана и вид функции $G(\xi, z)$, заключаем

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta_\varepsilon}^{\pi-\delta_\varepsilon} v(Re^{i\psi})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\psi-\theta)}\,d\psi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} G(t+i\varepsilon,\ z)\,du(t+i\varepsilon) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} v(t+i\varepsilon)\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=\varepsilon} dt.$$

В этом равенстве можно перейти к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$. (Второй интеграл полезно перед предельным переходом преобразовать интегрированием по частям). Тогда

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi v(Re^{i\psi})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\psi-\theta)}\,d\psi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} G(t+i\varepsilon,\ z)\,du(t) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} v(t)\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0} dt.$$

Приняв за область D нижний полукруг и повторив те же рассуждения, получим

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} v(Re^{i\psi})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\psi-\theta)}\,d\psi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} G(t,\ z)\,du(t) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} v(t)\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0} dt.$$

Сложение двух последних формул дает

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R} G(t,\ z)\,du(t) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} v(Re^{i\psi})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\psi-\theta)}\,d\psi.$$

Итак, в круге $|z| < R$ функция $v(z)$ представляется в форме

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R} \ln|t-z|\,du(t) + h(z), \tag{2.29}$$

где $h(z)$ — гармоническая функция в этом кгуге. Первое слагаемое есть логарифмический потенциал и, следовательно, в силу произвольности $R > 0$, функция $v(z)$ — субгармоническая всюду в $\boldsymbol{C}$.

Докажем теорему, которую можно рассматривать как обратную к теореме 2.2.

Для этого заметим, что по теореме Римана существует функция $z = z(w)$, отображающая произвольно заданную область Ω_s на $\boldsymbol{C}_+$ так, что бесконечно удаленная точка этой области переходит в бесконечно удаленную точку $\boldsymbol{C}_+$. Обратная функция $w = u(z) + iv(z)$ отображает C_+ на Ω_s, а так как S-кривую, являющуюся границей области Ω_s, можно рассматривать как кривую Жордана, «со складками», то $w = w(z)$ — непрерывная функция в C_+, отображающая вещественную ось на кривую S.

При этом, очевидно, $u(x)$ является монотонной функцией, точки роста* которой образуют замкнутое множество E.

Определим функцию $\varphi(x) = v(x)$ на множестве E и $\varphi(x) > v(x)$ на дополнении $R \setminus E$. Определим далее и класс $K_\varphi(w)$ субгармонических функций в C условиями:

а) $g(x) \leqslant \varphi(x)$, $x \in E$;

б) $\overline{\lim\limits_{y\to\infty}}\,[g(\pm iy) - (1+\varepsilon)\,v(iy)] \leqslant 0$; $(\forall\varepsilon > 0)$;

в) $g(z)$ — субгармоническая функция конечной степени, не большей, чем степень $v(z)$ (случай $\sigma_v = 0$ не исключается). Этот класс назовем классом $K_\varphi(w)$, отвечающим мажоранте $v(x)$ (или области Ω_s).

Теорема 2.5. *Пусть функция*

$$w = u(z) + iv(z) \quad (2.30)$$

конформно отображает полуплоскость C_+ на заданную область Ω_s, переводя бесконечно удаленную точку полуплоскости C_+ в бесконечно удаленную точку области Ω_s. Тогда функция $v(z)$ непрерывно продолжается как субгармоническая в C по формуле $v(z) = v(\bar z)$, и эта продолженная функция является мажорантой соответствующего отображению (2.30) класса $K_\varphi(w)$.

Доказательство. Так как $w = w(z)$ есть N-функция, а $u(x)$ по теореме о соответствии границ есть неубывающая функция, то первое утверждение теоремы прямо следует из теоремы 2.4. При этом функция $v(z)$ является гармонической всюду в C, за исключением, возможно, замкнутого множества E — точек роста функции $u(x)$ на вещественной оси (см. (2.29)). Докажем теперь, что продолженная функция $v(z)$ является мажорантой некоторого класса $K_\varphi(w)$, очевидно, входящей в класс.

Неотрицательная гармоническая в C_+ (C_-) функция $v(z)$, непрерывная в $\overline{C_+}$ ($\overline{C_-}$), представляется в форме (1.25), причем степень этой функции равна $\varkappa \geqslant 0$ и, в силу (1.28), вытекающего, как было показано в теореме 1.8, из (1.25), верно равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{v(re^{i\theta})}{r} = \varkappa\,|\sin\theta|. \quad (2.31)$$

Рассмотрим сначала частный случай $\mu = 0$. Из условия в) в определении класса $K_\varphi(w)$ следует, что в этом случае степень функции $g(z) \in K_\varphi(w)$ также нулевая. Так как $v(z) \geqslant 0$, то степень функции

$$\gamma_\varepsilon(z) = g(z) - (1+\varepsilon)\,v(z) \quad (2.32)$$

также нулевая. Эта функция — субгармоническая всюду, кроме, возможно, множества E точек роста функции $u(x)$ на вещественной оси.

---

* Точка x_0 не является точкой роста монотонной функции $u(x)$, если в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство $u(x) = u(x_0)$. Очевидно, что множество таких точек открытое, а следовательно, множество точек роста замкнутое.

Кроме того, из условия б) следует, что всюду на мнимой оси

$$\gamma_\varepsilon(iy) \leqslant M_\varepsilon \quad (-\infty < y < \infty), \tag{2.33}$$

где M_ε — некоторая постоянная, и, наконец, из условия а) следует, что на множестве E вещественной оси $\gamma_\varepsilon(x) \leqslant 0$ **(2.34)**.

Обозначим $M_{1,\varepsilon} = \max(M_\varepsilon, 0)$ и рассмотрим функцию $\gamma_\varepsilon(z)$ в области $D = \{z: |z| < R, \ \operatorname{Re} z \geqslant 0, \ z \bar{\in} E\}$. На дуге полуокружности $C_R = \{z: |z| = R, \ \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$ верно $\gamma_\varepsilon(z) = o(R)$, а на остальной части границы области D_R имеем $\gamma_\varepsilon(z) \leqslant M_{1,\varepsilon}$. По теореме о двух константах получаем всюду в области D_R оценку

$$\gamma_\varepsilon(z) \leqslant M_{1,\varepsilon}\omega(z, \Gamma_R, D_R) + o(R)\,\omega(z, C_R, D_R), \tag{2.35}$$

где Γ_R — вся граница области D_R, кроме C_R, а $\omega(z, \Gamma_R, D_R)$ — гармоническая мера этой части границы. Согласно принципу расширения области

$$\omega(z, C_R, D_R) \leqslant \omega(z, C_R, D'_R), \tag{2.36}$$

где $D'_R = \{z: |z| < R, \ \operatorname{Re} z > 0\}$. Но

$$\omega(z, C_R, D'_R) = \frac{\pi - \alpha}{\pi},$$

где α — угол, под которым виден из точки z диаметр полукруга D'_R. Отсюда следует, что

$$\omega(z, C_R, D_R) \leqslant \operatorname{arctg} \frac{2xR}{R^2 - |z|^2} = O\left(\frac{1}{R}\right), \tag{2.37}$$

и при $R \to \infty$ второе слагаемое в правой части (2.36) стремится к нулю, а следовательно, во всей полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ имеет место оценка $\gamma_\varepsilon(z) \leqslant M_{1,\varepsilon}$.

Эта же оценка, очевидно, справедлива и в левой полуплоскости, т. е. всюду в $\boldsymbol{C}$. Но на множестве E имеет место неравенство

$$\varlimsup_{z \to x \in E} \gamma_\varepsilon(z) \leqslant 0, \tag{2.38}$$

и, применяя в области $\boldsymbol{C} \setminus E$ теорему Фрагмена — Линделефа, получим, что это неравенство выполняется всюду. Итак,

$$g(z) \leqslant (1 + \varepsilon)\, v(z) \quad (z \in \boldsymbol{C}),$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$, имеем неравенство $g(z) \leqslant v(z)$ **(2.39)**. Так как $v(z) \in K_\varphi(w)$, то $v(z)$ — мажоранта класса.

Пусть теперь $\mu > 0$. Снова рассмотрим разность $\gamma_\varepsilon(z) = g(z) - (1 + \varepsilon)\, v(z)$. Она, очевидно, субгармоническая в области $\boldsymbol{C} \setminus E$, а на множестве E имеем $\varlimsup\limits_{z \to x \in E} \gamma_\varepsilon(z) \leqslant 0$. Так как степень функции $g(z)$ не превосходит числа μ, то равномерно внутри углов $\left|\theta \pm \frac{\pi}{2}\right| < \delta$ при достаточно малом $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\gamma_\varepsilon(re^{i\theta})}{r} \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\mu - (1 + \varepsilon)\,\mu\,|\sin\theta|.$$

Отсюда следует, что внутри углов $\left|\theta \pm \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \delta$ функция $\gamma_\varepsilon(z)$ равномерно стремится к $-\infty$ и потому ограничена некоторой постоянной, т. е.

$$\gamma_\varepsilon(z) \leqslant M_\varepsilon \qquad \left(\left|\theta \pm \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \delta\right).$$

Положим $M'_\varepsilon = \max(M_\varepsilon, 0)$, выберем число ρ так, чтобы оно удовлетворяло неравенствам $1 < \rho < \left(1 - \frac{2\delta}{\pi}\right)^{-1}$, и определим в секторе $S_{R,\rho} = \left\{|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho},\ |z| \leqslant R\right\}$ функцию

$$\gamma_{\varepsilon,\rho,\eta}(z) = \gamma_\varepsilon(z) - \eta r^\rho \cos\rho\theta \quad (z = re^{i\theta}),$$

при $\eta > 0$. На сторонах угла $\theta \pm \frac{\pi}{2\rho}$, очевидно, выполняется неравенство

$$\gamma_{\varepsilon,\rho,\eta}\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\right) \leqslant M'_\varepsilon.$$

Кроме того, при достаточно большом $R_{\varepsilon,\rho,\eta}$, $R > R_{\varepsilon,\rho,\eta}$ и $|\theta| < \frac{\pi}{2\rho}$ верно неравенство $\gamma_{\varepsilon,\rho,\eta}(Re^{i\theta}) < 0$.

Таким образом, на границе сектора $S_{R,\rho}$

$$\gamma_{\varepsilon,\rho,\eta}(z) \leqslant M'_\varepsilon. \tag{2.40}$$

Так как всюду на множестве E (при $x > 0$) также выполняется (2.40), то оно справедливо на всей границе области $S_{R,\rho} \setminus E$. Применив принцип максимума к субгармонической функции $\gamma_{\varepsilon,\rho,\eta}(z)$, заключаем, что (2.40) выполняется всюду в этой области. Фиксируя точку z и переходя к пределу при $R \to \infty$, убеждаемся в том, что неравенство (2.40) выполняется всюду внутри угла $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$. Так как оценка (2.40) верна при любом $\eta > 0$, то, перейдя к пределу при $\eta \downarrow 0$, получим $\gamma_\varepsilon(z) \leqslant M'_\varepsilon$ всюду внутри угла $|\arg z| \leqslant \pi/2\rho$. Аналогично получается такая же оценка внутри угла $|\arg z - \pi| \leqslant \pi/2\rho$. Кроме того, из выбора ρ и оценки для $\gamma_\varepsilon(z)$ следует, что это же неравенство выполняется внутри угла $\pi - \pi/2\rho \geqslant \theta \geqslant \frac{\pi}{2\rho}$ и симметричного ему угла относительно вещественной оси. Итак, неравенство $\gamma_\varepsilon(z) \leqslant M'_\varepsilon$ выполняется всюду в области $\boldsymbol{C} \setminus E$. Так как функция $\gamma_\varepsilon(z)$ — субгармоническая в этой области, а на ее границе E выполняется неравенство $\gamma_\varepsilon(z) \leqslant 0$, то, в силу принципа Фрагмена — Линделефа, получаем $\gamma_\varepsilon(z) \leqslant 0$ всюду в $\boldsymbol{C}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, приходим к (2.39).

Проведенные при доказательстве теоремы 2.5 рассуждения позволяют установить факт, который используется в дальнейшем. Выделим его в виде замечания к теореме.

Замечание. Пусть $v(z)$ — положительная, гармоническая в D_E функция, $\varkappa > 0$ — степень этой функции и $g(z)$ — субгармоническая в C функция, степень которой не превышает $\varkappa$. Тогда из условий

$$\overline{\lim_{y\to\infty}}\,[g(iy)-(1+\varepsilon)v(iy)]\leqslant 0\quad(\forall\varepsilon>0). \tag{2.41}$$

и

$$\overline{\lim_{z\to x_0}}\,[g(z)-(1+\varepsilon)v(z)]\leqslant 0\quad(\forall\varepsilon>0,\ x_0\in E) \tag{2.42}$$

следует, что $g(z)\leqslant v(z)$ всюду в D_E.

Действительно, по теореме 1.6 функция $v(z)$ представляется формулой (1.25), и поэтому $v(re^{i\theta})\geqslant\varkappa\,|\sin\theta|$ **(2.43)**, а при доказательстве теоремы 2.5 использовано лишь это неравенство и свойства (2.41), (2.42) функций $v(z)$ и $g(z)$.

Объединяя теоремы 2.3 и 2.5, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2.6. *Для того чтобы голоморфная в* C_+ *функция была комплексной мажорантой какого-нибудь класса* K_φ, *необходимо и достаточно, чтобы она конформно отображала* C_+ *на область класса* Ω_s.

2.4. Приложения субгармонических мажорант к некоторым задачам на экстремум. Установленная в предыдущих разделах связь между мажорантами и конформными отображениями дает возможность решать задачи на разыскание экстремальных функций в классах субгармонических функций. Рассмотрим несколько таких задач.

Задача 1. Найти мажоранту класса K_φ^σ функций $g(z)$, субгармонических во всей плоскости C, имеющих степень $\leqslant\sigma$ и удовлетворяющих на вещественной оси неравенству $g(x)\leqslant\varphi(x)$, где

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Отобразим конформно полуплоскость C_+ на область верхней полуплоскости, ограниченную двумя лучами $x<0$, $y=0$; $x>0$, $y=1$ и отрезком $x=0$, $0\leqslant y\leqslant 1$. По формуле Кристоффеля — Шварца имеем

$$w=\sigma\int_0^z\sqrt{\frac{\zeta-2a}{\zeta}}\,d\zeta,$$

где $2a$ — прообраз точки i в плоскости w. Для определения числа a имеем уравнение

$$\sigma\int_0^{2a}\sqrt{\frac{2a-t}{t}}\,dt=1,$$

откуда $a=(\pi\sigma)^{-1}$. Таким образом, получаем

$$v(z)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\left\{\ln\left(z_1+\sqrt{z_1^2-a^2}\right)+\sigma\pi\sqrt{z_1^2-a^2}\right\}, \tag{2.44}$$

где $z_1=z-a$. Функция $v(z)$, продолженная в нижнюю полуплоскость равенствами $v(\overline{z})=v(z)$, является по теореме 2.5 субгармонической функцией, входящей в класс K_φ^σ. Кроме того, на множестве

$E(w) = \{z : x \leqslant 0;\ \ x \geqslant 2a,\ \ y = 0\}$ эта функция мажорирует всякую функцию $g(z) \in K_\varphi^\sigma$. По второму утверждению той же теоремы имеем $g(z) \leqslant v(z)$ при $\forall g(z) \in K_\varphi^{\sigma *}$. Этот результат содержится в [4].

Задача 2. Найти мажоранту класса K_φ^σ при

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant 1, \\ A > 0, & |x| < 1. \end{cases}$$

Отобразим C_+ на область $\Omega \subset C_+$, ограниченную лучами $|x| \geqslant 1$, $y = 0$ и отрезками прямых $|x| = 1$, $0 \leqslant y \leqslant A$; $|x| < 1$, $y = A$.

По формуле Кристоффеля — Шварца имеем

$$w = \sigma \int\limits_0^z \sqrt{\frac{a^2 - \zeta^2}{1 - \zeta^2}}\, d\zeta + iA,$$

где a — прообраз точки $1 + iA$. Число a определяется из равенства

$$\sigma \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{1 - t^2}}\, dt = -iA. \tag{2.45}$$

Заметим, что при возрастании A величина a убывает до нуля. Подставляя $a = 0$, получим соответствующее значение $A = \sigma$. При $A > \sigma$ и, в частности, при $A = +\infty$ на интервале $-1 < x < 1$, $y = 0$ плоскости z имеем $v(x) < \varphi(x)$ и множество E состоит из двух лучей $|x| \geqslant 1$, $y = 0$. Мажоранта $v(z)$ имеет вид**

$$v(z) = \sigma \operatorname{Im}\left(\sqrt{z^2 - 1}\right). \tag{2.46}$$

Переходя к пределу при $A \downarrow \sigma$, получим, что и при $A = \sigma$ мажоранта имеет тот же вид. При $A < \sigma$ имеем

$$v(z) = \sigma \operatorname{Im}\left\{\int\limits_0^z \sqrt{\frac{a^2 - \zeta^2}{1 - \zeta^2}}\, d\zeta\right\} + A.$$

Аналогично можно решить задачу 3.

---

* Известно, что для целой функции $f(z)$ конечной степени δ и ограниченной на вещественной оси $|f(x)| \leqslant M$ $(-\infty < x < \infty)$ верна во всей плоскости C оценка $\ln|f(x + iy)| \leqslant \sigma|y| + \ln M$. Эта оценка точна в указанном классе функций. У. Хейман предложил в 1961 г. задачу [5]: дать оценку такого же рода для целых функций конечной степени σ и удовлетворяющих на вещественной оси неравенствам $f(x) \leqslant 1$ при $x < 0$ и $|f(x)| \leqslant M$ при $x \geqslant 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $M = e$. Тогда имеем, очевидно, $\ln|f(z)| \leqslant v(z)$, где $v(z)$ определена равенством (2.44). Эта оценка, точная в классе субгармонических функций, не является точной в классе логарифмов модулей целых функций конечной степени. Однако можно показать, что асимптотическое поведение при $|z| \to \infty$ мажорант этих двух классов одно и то же [4]. А. Э. Еременко нашел точную оценку $|f(x)|$ при $x \in R$.

** Функция $w(z) = \sigma\sqrt{z^2 - 1}$ отображает C_+ на C_+ с вертикальным разрезом, начинающимся в нуле. При этом множество $|x| \geqslant 1$ переходит во всю вещественную ось.

Задача 3. Найти мажоранту класса K_φ^σ при

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ A, & |x|>1\end{cases}$$

при $A>0$. Очевидно, что комплексная мажоранта дается формулой

$$w(z)=\frac{\sigma}{k}\int_0^z\sqrt{\frac{1-k^2\zeta^2}{1-\zeta^2}}\,d\zeta \quad (0<k<1).$$

Множество E на вещественной оси $|x|\geqslant\frac{1}{k}$, $|x|\leqslant 1$, а параметр k определяется из уравнения $\sigma k^{-1}E(k)=1$. Мажоранта имеет вид

$$v(z)=\frac{\sigma}{k}\operatorname{Im}\left\{\int_0^z\sqrt{\frac{1-k^2\zeta^2}{1-\zeta^2}}\,d\zeta\right\}.$$

Задача 4. Найти мажоранту в классе K_φ^σ, если $\varphi(x)=\infty$ при $1<|x|<\frac{1}{k}$ и $\varphi(x)=0$ при остальных значениях x.

Отображение осуществляется с помощью эллиптического интеграла

$$w(z)=\sigma\int_0^z\frac{\zeta^2-c^2}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}\,d\zeta+h.$$

Постоянную c можно вычислить, воспользовавшись равенством

$$\int_1^{1/k}\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}-c^2\int_1^{1/k}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=0.$$

После замены $1-k^2x^2=k^2t^2\,(k^2+k'^2=1)$ имеем

$$i\frac{k'}{k}\int_0^1\sqrt{\frac{1-k'^2t^2}{1-t^2}}\,dt=c^2\int_1^{1/k}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

и окончательно

$$c^2=\frac{k'}{k}\frac{E(k')}{K'(k)},$$

где E и K' — полные эллиптические интегралы.

Задача 5. Найти мажоранту класса K_φ^σ при $\varphi(x)=\infty$ на системе интервалов $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n)$ при $-\infty<a_1<b_1<a_2<\ldots<<\infty$ и $\varphi(x)=0$ на дополнительном множестве.

Соответствующая решению комплексная мажоранта может быть получена с помощью формулы Кристоффеля — Шварца

$$w(z) = \sigma \int\limits_0^z \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (\zeta - c_k)}{\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{n} (\zeta - a_k)(\zeta - b_k)}} d\zeta,$$

где числа c_k $(a_k < c_k < b_k)$ должны, очевидно, удовлетворять уравнениям

$$\int\limits_{a_j}^{b_j} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (\zeta - c_k)}{\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{n} (\zeta - a_k)(\zeta - b_k)}} d\zeta = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Разрешимость этой системы уравнений следует из теоремы о существовании и единственности отображающей функции.

Задача 6. Найти мажоранту класса $K^{\lambda}_{\varphi, l}$, если $\varphi(x) = 0$ при $|x| \leqslant \leqslant 1$ и $\varphi(x) = \infty$ на дополнительном множестве вещественной оси.

Очевидно, что в этом случае область Ω_s является полуполосой $|\mathrm{Re}\, w| < a$, $\mathrm{Im}\, w > 0$, и комплексная мажоранта дается формулой $w = i\lambda \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$, а мажоранта $v(z) = \lambda \ln|z + \sqrt{z^2 - 1}|$.

Следующий результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.8. *Если субгармоническая функция* $g(z)$ *конечной степени* $\sigma > 0$ *ограничена сверху нулем на множестве сегментов вещественной оси*:

$$\left| x - n + \frac{1}{2} \right| \leqslant d < \frac{1}{2}; \; \pm n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то

$$\sup_{-\infty < x < \infty} g(x) \leqslant \frac{\sigma}{\pi} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi d}{2} \tag{2.48}$$

Это неравенство точное.

Доказательство. Положим $\varphi(x) = 0$ при $x \in E$ и $\varphi(x) = = +\infty$ при других значениях x. Комплексную мажоранту $w(z)$ класса K^{σ}_{φ} можно получить, отобразив C_+ на область, получающуюся из C проведением из точек $x_n = nb$ $(b > 0, \pm n = 0, 1, 2, \ldots)$ вертикальных отрезков, имеющих одну и ту же длину h, причем так, чтобы множество E перешло во всю вещественную ось.

Легко убедиться в том, что отображающая функция определяется равенством

$$\sin^2 \pi d \cdot \sin^2 \frac{\pi}{b} w = \sin^2 \pi z - \cos^2 \pi d. \tag{2.49}$$

Так как мажоранта $v(z) = \operatorname{Im} w(z)$ имеет степень σ при $z = iy$, то $b = \sigma$. Всюду на вещественной оси $v(x) \leqslant h$. При $z = 0$ имеем $w = ih$. Подставляя эти значения в (2.49), получаем

$$h = \frac{\sigma}{\pi} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi d}{2}.$$

Таким образом, неравенство (2.48) имеет место для всех функций класса K_φ^σ и достигается на мажоранте $v(z)$.

Стоит заметить, что независимо от величины d масса Рисса, сосредоточенная на сегменте $|x - n - 1/2| \leqslant d$, равна $m = u(n + 1/2 + d) - u(n + 1/2 - d) = \frac{\sigma}{\pi}$. Применяя неравенство (2.48) к функции $g(z) = \ln |f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция конечной степени $\sigma > 0$, цолучим следующую теорему.

Теорема 2.9. *Если целая функция конечной степени σ удовлетворяет при $|x - n + 1/2| \leqslant d < 1/2$, $\pm n = 0, 1, 2, \ldots$ неравенству $|f(x)| \leqslant N$, то на всей вещественной оси $|f(x)| \leqslant \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi d}{2}\right)^{\sigma/\pi} N$* ▲

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 2. *Азарин В. С.* О субгармонических во всем пространстве функциях вполне регулярного роста // Записки Харьк. ун-та и Харьк. мат. об-ва. 1961. 28. Сер. 4. С. 128—148. 3. *Азарин В. С.* О субгармонических функциях вполне регулярного роста в многомерных пространствах //Докл. АН СССР. 1962. **146**, № 4. С. 743—746. 4. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я.* О целых функциях, ограниченных на вещественной оси // Докл. АН СССР. 1964. **157**, № 1. С. 19—21. 5. *Research* Problem in Function Theory // Bull of Amer. Math. Soc. 1969. **68**, № 1. P. 21—24.

Поступила в редколлегию 20.12.87