УДК 513.33

Б. Я. ЛЕВИН

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ НА R И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАЖОРАНТЫ. Ч. 3

3.1. **E-правильные отображения.** Изучим в этой статье некоторые специальные конформные отображения, которые назовем «отображением на гребенку». Такие отображения рассматривались ранее [1—4] и в статье Б. Я. Левина «Мажоранты в классах субгармонических функций»*.

Рассмотрим области, которые назовем областями типа A, B, C и которые получаются соответственно из полуплоскости $\boldsymbol{C}_+ = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ квадранта $\operatorname{Im} w > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$ и полуполосы $\operatorname{Im} w > 0$, $a < \operatorname{Re} w < b$ $(-\infty < a < b < \infty)$ с помощью конечного или бесконечного числа конечных прямолинейных разрезов, начина-

* Настоящая статья опубликована в сб. «Теория функций, функцион. анализ и их прил.», вып. 51 и здесь мы пользуемся определениями и теоремами из этой статьи.

ющихся на основании области, к нему перпендикулярных и могущих иметь предельные отрезки лишь на границе квадранта или полуполосы. При этом под основанием области понимаем ту часть ее границы, которая принадлежит вещественной оси. Очевидно, что области A, B и C относятся к Ω областям.

Назовем E-правильным такое отображение полуплоскости $\boldsymbol{C}_+$ на область типа A, B и C, при котором заданное замкнутое множество E на вещественной оси переходит в основание области. Очевидно, что при таком отображении $w = u(z) + iv(z)$ множество E совпадает с множеством точек роста функции $u(x)$ и при $v(x) \neq 0$ справедливо $u(x) = \mathrm{Const}$. Один из главных результатов, относящихся к E-правильным отображениям, состоит в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Любому замкнутому множеству E на $\boldsymbol{R}$ все точки которого регулярны*, отвечает E-правильное отображение.*

Доказательство. Определим функцию $\varphi(x) = 0$ при $x \in E$, $\varphi(x) = +\infty$ при $x \in \boldsymbol{R} \setminus E$. Так как E состоит из регулярных точек, то $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям 1—4 из п. 2.1 ранее опубликованной статьи**.

По теореме 2.6 из раздела 2 утверждение будет доказано, если найдем при этой функции $\varphi(x)$ класс K_φ, имеющий конечную мажоранту. Соответствующая комплексная мажоранта и даст требуемое отображение.

Рассмотрим сначала частный случай, в котором множество $\boldsymbol{R} \setminus E$ расположено все на интервале $(-R, R)$, и выберем в качестве мажорируемого класс K_φ^σ при каком-нибудь фиксированном $\sigma > 0$. Очевидно, что все функции этого класса мажорируются, как это видно из (2.46), функцией

$$v_R(z) = \sigma \operatorname{Im} \{\sqrt{z^2 - R^2}.$$

Поэтому мажоранта $v_R(z)$ класса K_φ^σ не больше, чем $\hat{v}_R(z)$, и, следовательно, конечна. Она имеет конечную степень σ, так как класс K_φ^σ содержит функцию $\sigma|y|$. Перейдем сейчас к рассмотрению общего множества E, удовлетворяющего условию теоремы. Построим множество $E_R = E \cup \{|x| \geqslant R\}$, класс $K_{\varphi, R}^\sigma$ и соответствующую ему мажоранту $v_R(z)$. Очевидно, что эта мажоранта не убывает с ростом R, так как при росте R класс $K_{\varphi, R}^\sigma$ может лишь расширяться. Если при этом множество чисел $\{v_R(i)\}$ ограничено (случай α), то по теореме Гарнака $v_R(z)$ сходится равномерно при $R \uparrow \infty$ на каждом компакте в D_E к некоторой гармонической функции $v_\infty(z)$, которая не равна тождественной постоянной, ибо каждый класс $K_{\varphi, R}^\sigma$ содержит функцию $g(z) = \sigma|y|$, и потому всюду в $\boldsymbol{C}$ верно неравенство

$$v_\infty(re^{i\theta}) \geqslant \sigma r |\sin\theta|. \tag{3.1}$$

---

* Это значит, что все точки множества E являются регулярными точками границы области $\boldsymbol{C}/E$.

** Здесь мы пользуемся определениями и теоремами из статьи «Связь мажоранты с конформными отображениями». Ч. 2 из этого сборника.

Покажем, что функция $v_\infty(z)$ есть мажоранта класса K_φ^σ. Для этого заметим, что во всех точках множества E:

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, v_\infty(z) \geqslant 0.$$

Функция $v_\infty(z)$ и произвольная функция $g(z)\in K_\varphi^\sigma$ удовлетворяют условиям замечания к теореме 2.5, поэтому $g(z)\leqslant v_\infty(z)$ **(3.2)** при $z\in \boldsymbol{C}$. По теореме 1.11 при любом $R>0$ и $x\in E$ верно равенство $v_R(x)=0$, поэтому $v_R(z)\in K_\varphi^\sigma$. Из (3.2) следует, что $v_R(z)$ не меньше, чем мажоранта класса K_φ^σ. С другой стороны, имеем

$$v_\infty(z)=\lim_{R\to\infty} v_R(z),\ (z\in D_E), \tag{3.3}$$

поэтому $v_\infty(z)$ и есть искомая мажоранта. Соответствующая комплексная мажоранта дает E-правильное отображение полуплоскости $\boldsymbol{C}_+$.

Остается рассмотреть второй случай (случай β), когда функция $v_R(i)$ от R бесконечно возрастает при $R\uparrow\infty$. В этом случае при любом $\sigma>0$ мажоранта класса K_φ^σ — бесконечна*.

Вместо функций $v_R(z)$ рассмотрим функции

$$v_R^*(z)=\frac{v_R(z)}{v_R(i)}.$$

Это неотрицательные, гармонические в D_E функции, и, следовательно, они образуют нормальное семейство, а так как они нормированы в точке i, то это семейство предкомпактно. Можно поэтому выделить такую последовательность чисел $R_k\uparrow\infty$, что соответствующая последовательность функций $\hat{v}_k(z)=v_{R_k}^*(z)$ равномерно сходится на каждом компакте в D_E к некоторой положительной гармонической функции $v_\infty(z)$, которая допускает по теореме Рисса — Герглотца (см. (1.11)) представление в $\boldsymbol{C}_+$:

$$v_\infty(z)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu(t)}{(t-x)^2+y^2}+\varkappa y,\ (\varkappa\geqslant 0)$$

и по теореме 1.3 имеет конечную степень $\varkappa\geqslant 0$. На множестве E имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{z\to x_0}}\, v_\infty(z)\geqslant 0,\ (x_0\in E).$$

Докажем, что $\varkappa=0$. Действительно, если $\varkappa>0$, то любая субгармоническая функция $g(z)\in K_\varphi^\sigma$ и функция $v=\frac{\sigma}{\varkappa}v_\infty(z)$ удовлетворяют условиям, сформулированным в замечании к теореме 2.5, поэтому

$$g(z)\leqslant\frac{\sigma}{\varkappa}v_\infty(z).$$

* Этот случай отвечает более «редкому» множеству E.

Так как каждая функция $v_R(z) \in K_\varphi^\sigma$, то

$$v_R(z) \leqslant \frac{\sigma}{\varkappa} v_\infty(z). \tag{3.4}$$

Но в случае (β) должно выполняться $v_R(i) \uparrow +\infty$, а это противоречит (3.4). Таким образом, убеждаемся в том, что $\varkappa = 0$. Продолжив функции $\hat{v}_k(z)$ из C_+ в C_- через интервалы $R \setminus E$, получим гармонические функции в $C \setminus E$, удовлетворяющие условию симметрии $\hat{v}_k(\bar{z}) = \hat{v}_k(z)$. Эти продолженные функции $\hat{v}_k(z)$ положительны в $D_E = C \setminus E$ и потому образуют в этой более широкой области предкомпактное семейство. Из равномерной сходимости последовательности $\{\hat{v}_k(z)\}_1^\infty$ на любом компакте в C_+ следует аналогичная сходимость этой последовательности в D_E.

Предельную функцию по-прежнему будем обозначать $v_\infty(z)$. Из регулярности точки $x_0 \in E$ и равенства $\lim\limits_{z \to x_0} \hat{v}_k(z) = 0$ следует, что $\lim\limits_{z \to x_0} v_\infty(z) = 0$. Таким образом, функция $v_\infty(z)$ является мажорантой класса, состоящего из функции, тождественно равной нулю и $v_\infty(z)$. По теореме 2.3 соответствующая комплексная мажоранта $w_\infty(z) = u_\infty(z) + iv_\infty(z)$ дает E-правильное отображение. Итак, доказано, что E-правильное отображение существует при любом замкнутом множестве E, состоящем из регулярных точек.

Для классификации множеств E по свойствам соответствующих отображений важно иметь теорему о единственности E-правильного отображения. Сначала докажем лемму.

Лемма 3.1. *Если гармоническая в D_E функция $\gamma(z)$ обращается в нуль всюду на E и удовлетворяет условию*

$$|\gamma(z)| = 0(|z|) \tag{3.5}$$

при $|z| \to \infty$, то из обращения $\gamma(z)$ в нуль в какой-нибудь точке $z_0 \in D_E$ следует, что $\gamma(z) \equiv 0$.

Доказательство. Из теоремы о среднем арифметическом для гармонической функции следует, что либо $\gamma(z) = 0$ в некоторой окрестности точки z_0 (и тогда она тождественно равна нулю), либо в любой окрестности этой точки функция $\gamma(z)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. В последнем случае непустое в D_E множество $R_\gamma = \{z : \gamma(z) = 0\}$ состоит из аналитических дуг, которые могут образовывать точки ветвления. Точки ветвления — это корни производной от функции $\xi(z) = \gamma(z) + i\delta(z)$, где $\delta(z)$ — локально гармоническая функция, сопряженная функции $\gamma(z)$. Поэтому точки ветвления образуют изолированное множество. Итак, нуль-множество R_γ состоит из аналитических дуг i с возможными точками ветвления и множества E на вещественной оси. Открытые в C множества $u_+ = \{z : \gamma(z) > 0\}$ и $u_- = \{z : \gamma(z) < 0\}$ распадаются на связные компоненты. Каждая из этих компонент — неограниченная область. Можем, не нарушая общности, считать, что точка z_0, о которой говорится в формулировке леммы, не является точкой ветвления, поэтому некоторая ε-окрестность этой точки делится на две области $u_+^\varepsilon(z_0)$ и $u_-^\varepsilon(z_0)$. Каждая из этих областей входит в некоторую связную компоненту G_+ и G_- множеств u_+ и u_-. В силу неограниченности этих компонент бесконечно удаленная точка является их общей граничной точкой, и любая окружность с центром в точке z_0 пересекает области G_+ и G_-. Граница каждой из этих областей состоит из аналитических дуг и, возможно, части множества E, которую мы присоединяем соответственно к областям G_+ и G_-. После этого функция $\gamma(z)$ становится субгармонической в G_+, а $-\gamma(z)$ — субгармонической в G_-.

Дальнейшие рассуждения опираются на принадлежащее А. Пфлюгеру* обобщение теоремы Фрагмена и Линделефа для функции субгармонической внутри угла. Приведем его в той форме, в какой оно сформулировано ранее [6].

Пусть G — односвязная область, имеющая точки $z = 0$ и $z = \infty$ своими граничными точками. Обозначим S_ρ-сечение области G окружностью $|z| = \rho$, а через $S(\rho, G)$ его длину.

Если u — субгармоническая в области G функция удовлетворяет условиям

$$\overline{\lim_{z \to z_1}} u(z) \leqslant 0, \quad z_1 \in \partial G \setminus \infty, \quad \lim_{\rho \to \infty} \frac{m(\rho, u)}{\sigma(\rho)} = 0,$$

где

$$m(\rho, u) = \max_{z \in S_\rho} u(z), \quad \sigma(\rho) = \exp\left\{\pi \int_1^\rho \frac{dt}{S(t, G)}\right\},$$

то $u(z) \leqslant 0$ $(z \in G)$.

Не нарушая общности, можно считать, что $z_0 = 0$. Так как $S(t, G_+) + S(t, G_-) \leqslant 2\pi t$, либо $\gamma(z)$ в области G_+, либо $-\gamma(z)$ в области G_- удовлетворяет всем условиям теоремы, поэтому $\gamma(z) \equiv 0$.

Перейдем к точной формулировке теоремы о единственности E-правильного отображения.

Теорема 3.2. *Пусть E — замкнутое множество на $\boldsymbol{R}$, все точки которого регулярны, а $w_1(z)$ и $w_2(z)$ суть E — правильные отображения $\boldsymbol{C}_+$ (на «гребенку»). Тогда $w_2(z) = \lambda w_1(z) + \mu$, где λ — положительное число, а $\mu \in \boldsymbol{R}$* ▲

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что комплексная мажоранта $w(z) = u(z) + iv(z)$ продолжается по принципу симметрии в C_- через каждый интервал открытого множества $\boldsymbol{R} \setminus E$ и при этом продолжении получается, что $v(\bar{z}) = v(z)$.

По теореме 2.5 функция $v(z)$ является мажорантой некоторого симметричного класса K_φ. В нашем случае $\varphi(x) = 0$ при $x \in E$ и $\varphi(x) = +\infty$ при $x \in \boldsymbol{R} \setminus E$, а класс K_φ есть $K_\varphi(w)$, введенный нами перед формулировкой теоремы 2.5. С другой стороны, каждой мажоранте симметричного класса K_φ отвечает E-правильное отображение, определенное с точностью до вещественной аддитивной постоянной μ.

Таким образом, задача сводится к доказательству следующего факта: если $v_1(z)$ и $v_2(z)$ — две симметричные мажоранты, отвечающие одному и тому же множеству E, то $v_2(z) = \lambda v_1(z)$.

Рассмотрим три случая.

---

* A. Pfluger. Des the oremer du type Phragmen — Lindelöf. C. R., 1949. T. 229. P. 542—543.

а) Обе мажоранты $v_1(z)$ и $v_2(z)$ имеют положительные степени σ_1 и σ_2. Воспользовавшись асимптотическим равенством (1.28), замечанием к теореме 2.5 и положив $\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, получим два неравенства

$$v_2(z) \leqslant \lambda v_1(z); \quad v_1(z) \leqslant \lambda^{-1} v_2(z),$$

из которых следует, что $v_2(z) = \lambda v_1(z)$.

б) $v_1(z)$ имеет положительную степень σ, а $v_2(z)$ — функция нулевой степени. В этом случае, по замечанию к теореме 2.5, при любом $\lambda > 0$ имеет место неравенство $\lambda v_2(z) \leqslant v_1(z)$. Ввиду произвольности $\lambda > 0$ это неравенство противоречиво, и, следовательно, случай б) невозможен.

в) $v_1(z)$ и $v_2(z)$ имеют нулевую степень. Выбрав произвольно число z_0 и $\lambda = v_2(z_0) / v_1(z_0)$, легко убедимся в том, что функция $v_2(z) - \lambda v_2(z)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2.7, поэтому $v_2(z) = \lambda v_1(z)$.

Полезно еще установить связь между E-правильными отображениями и «точками» границы Мартина для гармонических функций в области D_E. Выделим из конуса всех положительных в D_E гармонических функций конус C_∞ функций, обращающихся в нуль на множестве E. Назовем C_∞ конусом, соответствующим бесконечно удаленной точке. Очевидно, что мнимая часть E-правильного отображения входит в этот конус. Наоборот, как видно из теоремы 2.3 или замечания к ней, каждая симметричная функция этого класса отвечает E-правильному отображению. Пусть $v_1(z) \in C_\infty$. Очевидно, что функция $v_1(z) + v_2(\bar{z})$ также входит в C_∞ и симметрична. Если $v_E(z)$ — мнимая часть E-правильного отображения, нормированная условием $v_E(i) = 1$, то по теореме единственности

$$v_1(z) + v_1(z) = 2\lambda v_E(z), \quad (\lambda > 0). \tag{3.18}$$

С другой стороны, из формул (1.14) и (1.14′), дающих представление функции положительной, гармонической в $\boldsymbol{C}_+$ и $\boldsymbol{C}_-$ и непрерывной в $\boldsymbol{C}$, получим

$$v_1(z) - v_1(\bar{z}) = 2\mu y \quad \left(\mu = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2}\right). \tag{3.19}$$

Степень функции $v_1(z) + v_1(\bar{z})$ равна, очевидно, $\sigma = \max(\sigma_+, \sigma_-)$ и, в силу (3.18), равна степени функции $v_E(z)$, умноженной на 2λ В случае (β) эта степень равна нулю, значит $\sigma_+ = \sigma_- = 0$. Из равенства (3.19) и (3.18) получаем $v_1(z) = \lambda v_E(z)$, т. е. в этом случае весь конус C_∞ состоит из одного луча. В случае (α) конус C_∞ двумерный. Легко видеть, что его «крайними точками» будут функции

$$v_1(z) = v_E(z) + \sigma y, \; v_2(z) = v_E(z) - \sigma y, \tag{3.20}$$

где σ — степень функции $v_E(z)$. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 3.3. *Если мажоранта $v_E(z)$ имеет положительную степень, то множество E относится к классу (α) и бесконечно удаленной* *точке отвечают две точки границы Мартина. Если же $v_E(z)$ имеет нулевую степень, то E относится к классу* (β) *и бесконечно удаленной точке отвечает одна точка границы Мартина* [3]*.

3.2. Интегральное представление мажоранты. Здесь вернемся к изучению мажорант классов K_φ при произвольной неотрицательной функции $\varphi(x)$. Предположим только, что замкнутое множество $E(K_\varphi)$, на котором выполняется равенство $v(x) = \varphi(x)$, состоит из регулярных точек. Тогда в области D_E существует функция Грина $G_1(\zeta, z) = -\ln(\zeta - z) + \varkappa_1(\zeta, z)$. Обозначим через $h_1(\zeta, z)$ локально гармоническую (по z) сопряженную функцию. Очевидно, что $h_1(t_2 z) - h_1(t_1, z)$ — это гармоническая мера части границы D_E, расположенной на отрезке $[t_1, t_2]$. Можно утверждать, что всякая ограниченная в D_E гармоническая функция $m(z)$, непрерывная вплоть до границы, представляется в форме

$$m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_E m(t)\, dh_1(t, z), \tag{3.21}$$

где интеграл берется по множеству E два раза. Один — по верхнему борту разреза, проведенного по множеству E, а второй раз — по нижнему борту этого разреза, и эти интегралы складываются. Действительно, очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_E dh_1(t, z) = 1, \tag{3.22}$$

ибо этот интеграл равен гармонической мере всей границы области D_E. При заданных $z_0 \in D_E$ и $\varepsilon > 0$ можно так подобрать положительное число N, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{E_N} dh_1(t, z_0) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.23}$$

Отсюда следует, что

$$\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_E m(t)\, dh_1(t, z) \tag{3.24}$$

равномерно сходится на любом компакте, поэтому $\mu(t)$ — гармоническая функция. Легко видеть, что предельные значения $\mu(z)$ (сверху и снизу) на E совпадают с предельными значениями функции $m(z)$ и что функция $\mu(z)$ ограничена. Разность $m(z) - \mu(z)$ есть ограниченная гармоническая функция в D_E, обращающаяся в нуль всюду на границе. Поэтому $\mu(z) = m(z)$, т. е. верна формула (3.21). Заметим, что если $m(\bar z) = m(z)$ при $z \in D_E$, то предельные функции $m(z)$ сверху и снизу на множестве E совпадают и

$$m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_E m(t)\, dh(t, z),\ z \in D_E, \tag{3.25}$$

---

* Таким образом, принадлежность множества E классу (β) означает разреженность множества в окрестности бесконечно удаленной точки.

где $h(t, z) = h_1^+(t, z) + h_1^-(t, z)$. Этой формулой мы воспользуемся для получения интегрального представления мажоранты класса K_φ.

Теорема 3.4. *Любая положительная симметричная гармоническая функция* $v(z)$ *в* D_E *и непрерывная в* $\boldsymbol{C}$ *может быть представлена в форме**

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_E v(t)\,dh(t, z) + \lambda v_E(z), \tag{3.26}$$

где $v_E(z)$ — мнимая часть E-правильного отображения и $\lambda \geqslant 0$.

Доказательство. Обозначим

$$v_N(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{E_N} v(t)\,dh(t, z). \tag{3.27}$$

Очевидно, что $v_N(z)$ возрастает при увеличении N, принимает на E_N те же предельные значения, что и $v(t)$, и при $t \in E \setminus E_N$ верно

$$\lim_{z\to\infty} v_N(z) = 0.$$

Кроме того, всюду в D_E

$$0 < v_N(z) < M_N,$$

где $M_N = \max\limits_{|t|<N} v(t)$. Докажем, что $v_N(z) \leqslant v(z)$ всюду в D_E. Для этого введем в рассмотрение функцию

$$v^N(z) = v_N(z) - v(z), \tag{3.28}$$

которая ограничена сверху константой M_N. Кроме того, всюду на границе E области D_E она имеет неположительные предельные значения. По теореме Фрагмена — Линделефа получается, что $v^N(z) \leqslant 0$ в D_E, т. е. $v_N(z) \leqslant v(z)$. Отсюда следует существование интеграла

$$v_\infty(z) = \frac{1}{2\pi}\int_E v(t)\,dh(t, z) \tag{3.29}$$

при $z \in D_E$. По теореме Гарнака предельная функция $v_\infty(z)$ гармоническая в D_E. Перейдя к пределу в (3.28), получим

$$-v^\infty(z) = v(z) - v_\infty(z) \geqslant 0.$$

Эта функция имеет всюду на E равные нулю предельные значения и либо всюду равна нулю, либо всюду в D_E положительна. По теореме 2.3 и замечанию к ней заключаем, что $-v^\infty(z)$ — мнимая часть E-правильного отображения, и, следовательно, выполняется (3.26).

Замечание. Можно еще доказать, что при $z \to \infty$ вдоль некоторого пути в $\boldsymbol{C}_+$:

$$\int_E v(t)\,dh(t, z) = o(v_E(z)). \tag{3.30}$$

* Здесь предполагаем, как и прежде (не оговаривая этого специально), что множество E состоит из регулярных точек границы D_E.

Это доказательство приведем позже. Сейчас дадим одно из возможных приложений формулы (3.26). Введем определение.

Определение. *Два класса K_φ и K_ψ назовем эквивалентными, если их мажоранты равны.*

Теорема 3.5. *Если классы K_φ и K_ψ удовлетворяют условиям*

а) $E(K_\varphi) = E(K_\psi) \overset{\text{def}}{=} E$;

б) *на множестве E выполняется равенство $v_\varphi(x) = v_\psi(x)$;*

в) $\tau \overset{\text{def}}{=} \varlimsup\limits_{y\to\infty} \dfrac{v_\varphi(iy)}{v_E(iy)} = \varlimsup\limits_{y\to\infty} \dfrac{v_\psi(iy)}{v_E(iy)}$,

то классы K_φ и K_ψ — эквивалентны.

Доказательство. Обе мажоранты суть положительные гармонические функции в D_E, поэтому имеют представление (2.75). В силу условия б) имеем равенство

$$v_\varphi(z) = v_\psi(z) + \lambda v_E(z), \tag{3.31}$$

из которого в силу в) следует $\lambda = 0$, т. е. $v_\varphi(z) = v_\psi(z)$.

Определение. *Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будем называть σ-эквивалентными, если определенные ими классы K_φ^σ и K_ψ^σ — эквивалентны, а значит, совпадают.*

Из теоремы 3.5 непосредственно получается следующая теорема единственности

Теорема 3.6. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ таковы, что при некотором $\sigma > 0$ выполняются условия:

$$a')\ E(K_\varphi^\sigma) = E(K_\psi^\sigma) \overset{\text{def}}{=} E;\ \ б')\ v_\varphi^\sigma(x) = v_\psi^\sigma(x) \text{ при } x \in E,$$

то $v_\varphi^\sigma(z) = v_\psi^\sigma(z)$, то есть классы эквивалентны.

Доказательство. Так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, получаем

$$v_\varphi^\sigma(z) = v_\psi^\sigma(z) + \lambda v_E(z). \tag{3.32}$$

Если множество E относится к классу (α), то существует положительный предел

$$\tau = \lim_{y\to+\infty} \frac{v_E(iy)}{y}.$$

Далее, из равенств (1.25) и (3.32) следует $\lambda = 0$. Покажем, что при σ множество E не может относится к классу (β). Действительно, в этом случае функция $v_E(z)$ имеет нулевую степень, поэтому функция $v_\varphi^\sigma(z) + Nv_E(z) \in K_\varphi^\sigma$ при любом $N > 0$, и это противоречит предположению о конечности мажоранты. Теорема доказана.

3.3. Два признака конечности мажоранты класса. Докажем два признака конечности мажоранты, которые фактически содержатся в работе [1]*. Однако в этой статье они даны в других терминах и получены с других позиций. Поэтому сформулируем и докажем их здесь.

---

* См. литературу к статье «Мажоранты в классах субгармонических функций».

Теорема 3.7. *Пусть $\varphi(x) \leqslant M < \infty$ на множестве E, состоящем из отрезков, а дополнительные к E интервалы (a_k, b_k) таковы, что*

$$\ldots\ b_{-k} < a_{-k+1} < \ldots < a_k < b_k < \ldots$$

и

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{\partial_k} < \infty, \ \partial_k = \inf(|a_k|, |b_k|), \ k \in \mathbf{Z}. \tag{3.33}$$

Тогда при любом $\sigma \geqslant 0$ мажоранта класса K_φ^σ конечна ▲

Доказательство. Так как с увеличением функции $\varphi(x)$ класс K_φ^σ лишь расширяется, то достаточно доказать ограниченность мажоранты при $\varphi(x) = M$ на множестве E и $\varphi(x) = \infty$ на дополнительном множестве. Для такой функции $\varphi(x)$ мажоранта получается добавлением постоянной M к мажоранте, отвечающей функции $\varphi(x) = 0$ на множестве E и $\varphi(x) = \infty$ на CE.

Построим так же, как при доказательстве теоремы 3.1, множество E_n, добавив к множеству E лучи $(-\infty, a_{-n}]$ и $[b_n, \infty)$*. Аналогично предыдущему строим классы $K_{\varphi, n}^\sigma$ и соответствующие им мажоранты $v_n(z)$. Теорема будет доказана, если установить, что множество чисел $\{v_n(i)\}$ ограничено. Для того чтобы это показать, заметим, что $v_n(z)$ есть мнимая часть E-правильного отображения $w_n(z)$, которое может быть записано по формуле Кристоффеля—Шварца в виде

$$w_n(z) = \sigma \int_0^z \prod_{k=-n}^{n} \frac{z - c_k^{(n)}}{\sqrt{(z - a_k)(z - b_k)}}\, dz. \tag{3.34}$$

Возьмем производную

$$w_n'(z) = \sigma \prod_{k=-n}^{n} \frac{z - c_k^{(n)}}{\sqrt{(z - a_k)(z - b_k)}}$$

и дадим оценку величины $|v_n'(iy)| = \left|\frac{dv_n(iy)}{dy}\right|$. Имеем

$$2\ln\left|\frac{dv_n(iy)}{dy}\right| \leqslant 2\ln\left|\frac{dw_n(iy)}{dy}\right| = \sigma \sum_{k=-n}^{n} \ln\left|\frac{(iy - c_k^{(n)})^2}{(iy - a_k)(iy - b_k)}\right|.$$

Поэтому

$$2\ln\left|\frac{dv_n(iy)}{dy}\right| \leqslant \frac{\sigma}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{y^2 + b_k^2}{y^2 + a_k^2} + \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{y^2 + a_k^2}{y^2 + b_{-k}^2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2 - a_k^2}{a_k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{-k}^2 - b_{-k}^2}{b_{-k}^2}\right\}.$$

---

* При доказательстве теоремы 3.1 присоединяем к множеству другие лучи: $(-\infty, R]$ и $[R, \infty)$. Однако это различие несущественно. Важно лишь, что последовательность интервалов (a_{-n}, b_n) монотонно возрастает и исчерпывает всю вещественную ось.

В силу (3.33), величины $(b_k + a_k) a_k^{-1} = (b_k - a_k) a_k^{-1} + 2$ и $(b_{-k} + a_{-k}) b_{-k}^{-1} = 2 - (b_{-k} - a_{-k}) b_{-k}^{-1}$ ограничены, поэтому

$$\ln \left| \frac{dv_n(iy)}{dy} \right| < C\sigma \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{\partial_k},$$

где C — некоторая постоянная. Отсюда следует ограниченность функции $v_n'(iy)$ на мнимой оси $\left| \frac{dv_n(iy)}{dy} \right| < N$, а следовательно, и

$$v_n(i) = \int_0^1 v'(iy)\, dy < N.$$

Теорема доказана.

Второй признак является одновременно признаком ограниченности мажоранты на вещественной оси. Этот признак непосредственно получается из рассмотрений А. Шеффера [2]*. Для того чтобы его сформулировать, введем следующее понятие.

Множество E на вещественной оси назовем относительно плотным по мере, если существуют такие два положительных числа l и δ, что всякий интервал длины l на вещественной оси содержит часть множества E меры $\geqslant \delta$.

Теорема 3.8. *Если функция $\varphi(x) \leqslant m$ на множестве E, относительно плотном по мере, то мажоранта $v(z)$ класса K_φ^σ удовлетворяет на всей вещественной оси при любом $\sigma > 0$ неравенству $v(x) \leqslant \sigma C(l, \delta) + m$* **(3.35)**, *в котором $C(l, \delta)$ — постоянная**, зависящая лишь от указанных величин и, следовательно, во всей плоскости*** $v(z) \leqslant \sigma C(l, \delta) + m + \sigma |y|$.*

Доказательство. Очевидно, что теорема будет доказана, если ее докажем для функции $\varphi(x) = m$ на E и $\varphi(x) = +\infty$ на дополнении CE. Не нарушая общности, можно положить $m = 0$.

Рассмотрим сначала другую задачу, выбрав

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 0, & x \in E \\ N, & x \notin E. \end{cases}$$

Обозначим соответствующую мажоранту $v_N(x)$, которая, очевидно, не превосходит на вещественной оси числа N. Пусть $\sup\limits_{-\infty < x < \infty} v_N(x) = M_N$.

---

* Он явно сформулирован и доказан в [1]. Сходная теорема для положительных гармонических функций в n-мерном пространстве доказана M. Benedicks'om [3].

** А. Е. Фрынтов нашел точное значение $C(l, \delta) = \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi l}{4\sigma}$ и доказал, что равенство в (3.35) достигается только на функции (2.49).

*** Эта теорема была сформулирована автором для плюрисубгармонических функций C^n на конференции по теории функций в г. Харькове в 1971 г. Она тесно связана с циклом работ, относящихся к условиям эквивалентности норм $L_p(R^n)$ и $L_p(E_n)$ для целых функций экспоненциального типа (см. [4], где есть библиография).

Докажем, что при достаточно большом N величина M_N не зависит от N. Из представления (1.28) мажоранты имеем

$$v_N(z) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_N(t)}{(t-x)^2+y^2}\, dt + \sigma |y|,$$

откуда

$$v(x+il) \leqslant \frac{l}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_N}{(t-x)^2+l^2}\, dt - \frac{l}{\pi} \int_E \frac{M_N\, dt}{(t-x)^2+l^2} =$$

$$= M_N + \sigma l - M_N \int_E \frac{l\, dt}{(t-x)^2+l^2} < M_N + \sigma l - M_N \alpha(\delta, l),$$

где $\pi\alpha$ — угол, под которым видно множество E из точки $x+il$. Очевидно, что при заданных l и δ этот угол превосходит некоторое положительное число $0<\alpha(\delta, l)<1$. Поэтому $v_N(x) \leqslant [1-\alpha(\delta, l)]\, M_N + l\delta$. Такое же неравенство имеет место на прямой $y=-l$.

Применив теорему Фрагмена — Линделефа для полосы $|y| \leqslant l$ к функции $v_N(z)$, получим, что

$$v_N(x) \leqslant [1-\alpha(\delta, l)]\, M_N + l\delta,$$

откуда $M_N \alpha(l, \delta) \leqslant l\delta$ и, наконец,

$$M_N \leqslant \frac{l\delta}{\alpha(l, \delta)}$$

или

$$\sup_{-\infty<x<\infty} v_N(x) \leqslant \sigma C(l, \delta),$$

где $C(l, \delta)$ — постоянная.

При возрастании N функция $v_N(z)$ не убывает и остается постоянной при $N > \sigma C(l, \delta)$. Обозначим эту предельную функцию $v_\infty(z)$. Она мажорирует все функции любого из классов $K^\sigma_{\varphi, N} = K^\sigma_\varphi \cap K^\sigma_N$ и, по доказанному, $v_\infty(x) \leqslant \sigma C(l, \delta)$. Докажем, что она мажорирует весь класс K^σ_φ. При $N > \sigma C(l, \delta)$ имеем на всех дополнительных к E интервалах $v_\infty(x) < v_N(x) < \varphi_N(x)$, и по теореме 2.3 соответствующая комплексная мажоранта $w_N(z) = u_N(z) + iv_N(z)$ есть однолистная функция, отображающая $\boldsymbol{C}_+$ на область Ω^σ_φ — верхнюю полуплоскость с разрезами, начинающимися на вещественной оси и имеющими длину $< \sigma C(l, \sigma)$. Множество E переходит при этом отображении в вещественную ось. По теореме 2.5 эта функция является комплексной мажорантой класса K^σ_φ при $\varphi(x) = 0$ на E и $\varphi(x) = \infty$ на CE. Таким образом, при выполнении условий теоремы имеем $v(x) \leqslant \sigma C(l, \delta)$.

Следствие. *Если целая функция $f(z)$ экспоненциального типа σ удовлетворяет условию $|f(x)| \leqslant M$ на множестве E, относительно плотном по мере, то она удовлетворяет на всей вещественной оси неравенству $|f(x)| \leqslant MC_1(l, \delta)^\sigma$, где $C_1(l, \delta)$ зависит лишь от l и δ.*

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И., Левин Б. Я.* Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М., 1960. С. 111—115. 2. *Schaeffers G.* Entire Functions and Trigonometric Polynomials // Duke Math. J. 1953. **20**. P. 77—88. 3. *Benedicks M.* Positive Harmonic Functious vanishing on the boundary of certain domains in $|R^n|$ // Ark. Math. 1980. **18**, № 1. P. 53—72. 4. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Мат.сб. 1975. **97 (139)**, № 4 (8). С. 540—606. 5. *Горин Е. А.* Несколько замечаний в связи с одной задачей Б. П. Панеяха об эквивалентных нормах в пространствах аналитических функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1985. Вып. 44. С. 23—32. 6. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М., 1968. С. 471.

Поступила в редколлегию 27.01.88