УДК 517.948+512.13

Л. П. КУЧКО

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В настоящей работе приводится доказательство сформулированной в [1] теоремы о локальной C^∞-разрешимости системы уравнений в частных производных

$$(V\varphi)(x) = g(x,\ \varphi(x)), \tag{1}$$

где V — локальное векторное поле класса C^∞, заданное в окрестности своей особой точки $x=0$ в $\boldsymbol{R}^n$, а $g: \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ — заданное C^∞-отображение.

Необходимым условием разрешимости уравнения (1) является его формальная разрешимость, т. е. разрешимость в формальных рядах Тейлора в точке $x = 0$. Пусть уравнение (1) формально разрешимо и $\hat{\varphi}_0$ — какое-нибудь его формальное решение. Рассмотрим какое-нибудь C^∞-отображение $\varphi_0: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ с рядом Тейлора $\hat{\varphi}_0$ в начале координат. Замена $\varphi \to \varphi + \varphi_0$ неизвестного отображения приводит уравнение (1) к уравнению

$$(V\varphi)(x) = \tilde{g}(x,\ \varphi(x)), \tag{2}$$

где $\tilde{g}(x,\ y) = g(x,\ y + \varphi_0(x)) - (V\varphi_0)(x)$. При этом отображение $\tilde{g}(x,\ 0)$ имеет нулевой ряд Тейлора в начале координат. Если уравнение (2) имеет C^∞-решение φ, то исходное уравнение имеет C^∞-решение $\varphi + \varphi_0$. Если, кроме того, $\hat{\varphi} = 0$, то ряд Тейлора в нуле решения $\varphi + \varphi_0$ равен формальному решению $\hat{\varphi}_0$. В этом случае мы будем говорить, что формальное решение уравнения (1) *восстанавливается* до локального C^∞-решения этого уравнения.

Диффеоморфизм $F: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ называется *квазигиперболическим порядка* $k \geqslant 0$, если существует такое разложение $\boldsymbol{R}^n = L_+ + L_-$ пространства $\boldsymbol{R}_n$ в прямую сумму инвариантных относительно F подпространств, что в некоторой норме

1. $\rho(F(x),\ Z_-) \leqslant \rho(x,\ Z_-)(1 - c_1\|x\|^k)$,
   $\rho(F^{-1}(x),\ Z_+) \leqslant \rho(x,\ Z_+)(1 - c_2\|x\|^k)$.
2. $\|F'(x)\| \leqslant 1 + a\|x\|^k$, $\|(F^{-1}(x))'\| \leqslant 1 + b\|x\|^k$.

Здесь c_1, c_2, a, b — некоторые положительные числа, а ρ — расстояние от точки до соответствующего подпространства. При $k = 0$ диффеоморфизм называется гиперболическим. Если $L_- = 0$ (соответственно $L_+ = 0$), то F называется *квазисжатием* (соответственно *квазирастяжением*).

Поле V называется *квазигиперболическим порядка* k, если его поток F^t квазигиперболичен порядка k при каждом $t \neq 0$.

Пример 1. Поле $V(x) = \| x \|^2 x$, $x \in \boldsymbol{R}^n$, квазигиперболическое. Его поток имеет вид: $F^t(x) = x(1 + t\| x \|^2 + \ldots)$. Поэтому F^t — квазисжатие порядка 2 при $t < 0$ и квазирастяжение порядка 2 при $t > 0$.

Пример 2. Поле $V(x) = (-\| x \|^{2k}\zeta, \| x \|^{2k}\eta)$, $x = (\zeta, \eta) \in \boldsymbol{R}^2$, $k \in \boldsymbol{Z}_+$ квазигиперболическое порядка $2k$, поскольку его поток имеет вид $F^t(x) = (\zeta(1 - t\| x \|^{2k} + \ldots), \eta(1 + t\| x \|^{2k} + \ldots))$.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) поле V квазигиперболическое порядка k, а формальное решение $\hat{\varphi}_0$ таково, что матрица Якоби* $Q(x) = \left.\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right|_{y = \varphi_0(x)}$* *удовлетворяет оценке $Q(x) = O(\| x \|^k)$. Тогда формальное решение $\hat{\varphi}_0$ восстанавливается до локального C^∞-решения уравнения (1).*

Доказательство. Напомним, что отображение f называется плоским на множестве M, если $f^{(s)}(x) = 0$, $x \in M$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать существование плоского в нуле решения уравнения (1) при условии, что $g(x, 0) = 0$ и $Q(x) = \left.\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = O(\| x \|^k)$. Положим $g(x, 0) = g_+(x) + g_-(x)$, где $g_\pm$ — отображение, плоское на подпространстве $L_\mp$ соответственно. Рассмотрим уравнение $(V\varphi)(x) = g_+(x, \varphi(x))$ **(3)**, где $g_+(x, y) = g(x, y) - g_-(x)$. Здесь отображение $g_+(x, 0) = g_+(x)$ является плоским на подпространстве L_-. Пусть φ_+ — решение уравнения (3). Рассмотрим уравнение $(V\varphi)(x) = g_-(x, \varphi(x))$ **(4)**, где $g_-(x, y) = g(x, y + \varphi_+(x)) - g(x, \varphi_+(x)) + g_-(x)$. Здесь отображение $g_-(x, 0) = g_-(x)$ является плоским на L_+. Если φ_- — решение уравнения (4), то $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$ решение исходного уравнения. Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно доказать разрешимость уравнений (3), (4).

Рассмотрим сначала уравнение (3). Положим $V = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $g_+(x, y) = (g_+^1(x, y), \ldots, g_+^m(x, y))$. Рассмотрим векторное поле $W = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^{m} g_+^j(x, y)\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$ в $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$. Пусть $H^t(x, y) = (F^t(x), G^t(x, y))$ — его поток. Если φ — решение уравнения $\varphi(F^t(x)) = G^t(x, \varphi(x))$ **(5)** при всех достаточно малых t, то φ — решение уравнения (3). Пусть $V = (V_+, V_-)$ — координатная запись поля V в соответствии с разложением $\boldsymbol{R}^n = L_+ + L_-$. Рассмотрим C^∞-функции $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x, y)$, равные единице в некоторой окрестности начала координат и нулю — вне некоторой большей окрестности. Достаточно доказать разрешимость уравнения, полученного из (3) заменой

$$V(x) \to (V_+(x), \tau_1(x) V_-(x)), \quad g_+(x, y) \to \tau_2(x, y) g_+(x, y).$$

При этом поток $H^t(x, y)$ будет обладать следующими свойствами.

1. Существует окрестность $U \subset \boldsymbol{R}^n$ начала координат, инвариантная относительно F^t;

* Здесь φ_0 — продолжение по Борелю формального решения $\hat{\varphi}_0$.

2. $\rho(F^t(x),\ L_-) \leqslant (1 - c(t)\|x\|^k)\,\rho(x,\ L_-)$;

3. $G^t(x,\ y) = y,\ x \bar{\in} U$.

Положив в (5) $t = 1$, докажем C^∞-разрешимость полученного уравнения в окрестности U. С этой целью перепишем уравнение (5) при $t = 1$ в виде

$$\varphi(x) = \tilde{Q}^{-1}(x)\,\varphi(F(x)) + h(x,\ \varphi(x)) + \gamma(x), \tag{6}$$

выделив линейную и квадратичную по y части $(h(x,\ y) = O(\|y\|^2))$. Заметим, что свободный член $\gamma(x)$ в (6) является плоским на подпространстве L_- отображением. Поэтому оператор A, стоящий в правой части уравнения (6), действует в пространстве C^∞- отображений $\varphi: U \to \boldsymbol{R}^m$, плоских на пересечении $U \cap L_-$. Зафиксируем неубывающую последовательность целых неотрицательных чисел $\{\nu_s\}$ и бесконечную матрицу $\{C_{s\nu}\}$. Множество $K = K(\{C_{s\nu}\},\ \{\nu_s\})$ всех C^∞-отображений $\varphi: U \to \boldsymbol{R}^m$, для которых

$$\|\varphi\|_{s,\ \nu} = \max_{\substack{x;\ i \leqslant s \\ \mu \leqslant \nu}} \frac{\|\varphi^{(i)}(x)\|}{\rho^\mu(x,\ L_-)} \leqslant C_{s\nu} \quad \nu \geqslant \nu_s,$$

является выпуклым компактом. Согласно общему принципу неподвижной точки для доказательства разрешимости уравнения (6) достаточно установить существование таких $\{C_{s\nu}\}$ и $\{\nu_s\}$, при которых компакт K инвариантен относительно оператора A.

Зафиксируем, достаточно малые положительные числа ε и δ. Пусть $\gamma_0 \geqslant k$ таково, что

$$\|\tilde{Q}^{-1}(x)\| \frac{\rho^\nu(F(x),\ L_-)}{\rho^\nu(x,\ L_-)} \leqslant 1 - \delta\|x\|^k \quad \nu \geqslant \nu_0.$$

Можно считать, что $\|\gamma\|_{0,\ \nu_0} < \varepsilon$. Если $\|\varphi\|_{0,\ \nu_0} \leqslant \varepsilon$ и $\|\psi\|_{0,\ \nu_0} \leqslant \varepsilon$, то имеют место неравенства

$$\frac{\|(A\varphi)(x)\|}{\rho^{\nu_0}(x,\ L_-)} \leqslant (1 - \delta\|x\|^k + c\varepsilon\|x\|^{\nu_0})\|\varphi\|_{0,\ \nu_0} + \|\gamma\|_{0,\ \nu_0}\|x\|^{\nu_0};$$

$$\frac{\|(A\varphi)(x) - (A\psi)(x)\|}{\rho^{\nu_0}(x,\ L_-)} \leqslant (1 - \delta\|x\|^k + c'\varepsilon\|x\|^{\nu_0})\|\varphi - \psi\|_{0,\ \nu_0},$$

где c и c' — константы, ограничивающие первые две производные отображения h. Увеличивая, если нужно, ν_0, можно добиться выполнения неравенств

$$\|A\varphi\|_{0,\ \nu_0} \leqslant \varepsilon; \tag{7}$$

$$\frac{\|(A\varphi)(x) - (A\psi)(x)\|}{\rho^{\nu_0}(x,\ L_-)} \leqslant (1 - \delta'\|x\|^k)\|\varphi - \psi\|_{0,\ \nu_0} \tag{8}$$

при некотором $\delta' > 0$. Далее, дифференцируя уравнение (6), получаем оценки

$$\frac{\|(A\varphi)^{(s)}(x)\|}{\rho^\nu(x,\ L_-)} \leqslant \|\tilde{Q}^{-1}(x)\| \frac{\rho^\nu(F(x),\ L_-)}{\rho^\nu(x,\ L_-)}\|F'(x)\|^s\|\varphi\|_{s,\ \nu} + \\ + \varepsilon\|x\|^{\nu_0}\|\varphi\|_{s,\ \nu} + R(\|\varphi\|_{s-1,\ \nu+\nu_0})\|x\|^{\nu_0},$$

где $R(t)$ — некоторая неубывающая функция. Выберем $\nu_s \geqslant \nu_{s-1}$ таким образом, чтобы $\|\tilde{Q}^{-1}(x)\| \rho^\nu (F(x), L_-)[\rho^\nu(x, L_-)]^{-1} \|F'(x)\|^s \leqslant 1 - \delta\|x\|^k$, $\nu \geqslant \nu_s$. Тогда

$$\frac{\|(A\varphi)^{(s)}(x)\|}{\rho^\nu(x, L_-)} \leqslant (1 - \delta' \|x\|^k)\|\varphi\|_{s,\nu} + R(\|\varphi\|_{s-1,\nu+\nu_0}\|x\|^{\nu_0}, \ \nu \geqslant \nu_s.$$

Выберем теперь последовательно

$$C_{0\nu_0} = \varepsilon, \ C_{s\nu} \geqslant \frac{1}{\delta''} R(C_{s-1,\nu+\nu_0}) \ \ \nu \geqslant \nu_s.$$

Тогда, если $\|\varphi\|_{s,\nu} \leqslant C_{s\nu}$, то с учетом (7) имеют место неравенства

$$\|A\varphi\|_{s,\nu} \leqslant C_{s\nu} \ (\nu \geqslant \nu_s, \ s = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тем самым доказано, что компакт K инвариантен относительно оператора A. Следовательно, уравнение (6) имеет решение $\varphi \in K$.

Из неравенства (8) вытекает единственность решения уравнения (6). В самом деле, так как φ и ψ — плоские на L_- отображения, то максимум в левой части неравенства (8) достигается в некоторой точке $x_0 \in U$, отличной от начала координат. Поэтому если $\varphi = A\varphi$ и $\psi = A\psi$, то $\|\varphi - \psi\|_{0,\nu_0} \leqslant (1 - \delta'\|x\|^k)\|\varphi - \psi\|_{0,\nu_0}$, откуда следует, что $\varphi - \psi = 0$.

Возвращаясь к уравнению (5), положим при $t_0 \neq 0$

$$\varphi_{t_0}(x) = G^{t_0}(F^{-t_0}(x), \ \varphi(F^{-t_0}(x))) \ \ x \in U,$$

где φ — решение при $t = 1$. Тогда

$$\varphi_{t_0}(F(x)) = G^{t_0}(F^{-t_0+1}(x), \ G^1(F^{-t_0}(x), \ \varphi(F^{-t_0}(x)))).$$

Учитывая, что $H^t(x, y) = (F^t(x), G^t(x, y))$ — поток, получаем

$$G^{t_0}(F^{-t_0+1}(x), \ G^1(F^{-t_0}(x), \ y)) = G^1(x, \ G^{t_0}(F^{-t_0}(x), \ y)),$$

откуда вытекает

$$\varphi_{t_0}(F(x)) = G^1(x, \ \varphi_{t_0}(x)).$$

Следовательно, φ_{t_0} — решение уравнения (5) при $t = 1$. В силу единственности решения $\varphi_{t_0} = \varphi$. Тем самым доказано существование решения уравнения (3). Разрешимость уравнения (4) доказывается аналогично (после замены $t \to -t$). Теорема 1 доказана.

Напомним, что центральным многообразием векторного поля V называется интегральное многообразие, касательное пространство к которому в начале координат совпадает с интегральным подпространством L_c линейного приближения $\Lambda = V'(0)$, отвечающим части спектра Λ, лежащей на мнимой оси. Центральное многообразие класса C^∞ существует не всегда. Однако, если оно существует, то можно считать его совпадающим с L_c.

Теорема 2. *Пусть в уравнении (1) сужение поля V на свое центральное многообразие L_c квазигиперболично порядка k, а формальное решение $\hat{\varphi}_0$ таково, что матрица-функция* $Q(x) = \left.\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right|_{y=\varphi_0(x)}$

удовлетворяет оценке $Q(x) = O(\|x\|^k)$, $x \in L_c$. *Тогда формальное решение* $\hat{\varphi}_0$ *восстанавливается до локального* C^∞*-решения уравнения (1).*

Доказательство теоремы 2 проводится с учетом следующей леммы ([2]).

Лемма. *Пусть в уравнении* (1) *отображение* $g(x, 0)$ *является плоским на центральном многообразии* L_c *поля* V. *Тогда существует решение уравнения* (1), *плоское на* L_c.

Эта лемма сводит доказательство теоремы 2 к доказательству разрешимости уравнения, полученного сужением на L_c уравнения (1), а также уравнений, полученных из (1) последовательным дифференцированием и сужением на L_c. Разрешимость этих уравнений следует из теоремы 1. Продолжая по Уитни решения этих уравнений до некоторого C^∞-отображения $\varphi: U \to \boldsymbol{R}^m$, придем к уравнению с плоским на L_c отображением $g(x, 0)$. Его разрешимость следует из леммы.

Список литературы: 1. *Кучко Л. П.* Локальная C^∞-разрешимость уравнений в частных производных // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. 1986. № 11. С. 10—12. 2. *Белицкий Г. Р.* Сопряженность ростков векторных полей с одним нулевым или парой чисто мнимых собственных значений // Функц. анализ и его прил. 1986. **20**, вып. 4. С. 3—14.

Поступила в редколлегию 29.05.86