УДК 517.53

А. Э. ЕРЕМЕНКО

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ДРЕЙСИНА О МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА С МАКСИМАЛЬНОЙ СУММОЙ ДЕФЕКТОВ. 2

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Начнем с нескольких замечаний.

Прежде всего, достаточно доказать Основную лемму в предположении, что D_j — области. В самом деле, пусть $D_j = \bigcup_k D_{jk}$ — разложение на связные компоненты. Положим

$$u_j = \sum_k u_{jk}, \ \operatorname{supp} u_{jk} \subset D_{jk},$$

$\mu_j = \sum_k \mu_{jk}$, μ_{jk} — риссовская мера функции u_{jk}. Тогда (6.5) дает $\sum_{j,k} \mu_{jk} \geqslant 2 \sum_k \mu_{ik} \geqslant 2\mu_{in}$ для всех i и n. Остальные условия леммы сохраняются.

Таким образом, далее считаем, что D_j связные и нумеруем D_j, u_j, μ_j одним индексом $1 \leqslant j \leqslant n$.

Из принципа максимума для субгармонических функций следует, что области D_j неограничены.

Множество всех борелевских мер в $\boldsymbol{C}$ частично упорядочено отношением $\leqslant$. Для конечного семейства мер $\nu_1, \ldots, \nu_k$ существует точная верхняя грань $\nu_1 \vee \nu_2 \vee \cdots \vee \nu_k$. Условие (6.5) можно переписать в виде

$$\sum_j \mu_j \geqslant 2 (\mu_1 \vee \cdots \vee \mu_n). \tag{8.1}$$

Пусть ν — борелевская мера в $\boldsymbol{C}$ и A — борелевское множество. Сужение меры ν на A определяется так: $\nu|_A (E) = \nu (A \cap E)$ для любого борелевского множества $A \subset \boldsymbol{C}$.

Замыкание и граница всюду далее рассматриваются в $\overline{\boldsymbol{C}}$.

8. Доказательство Основной леммы в частном случае. Для того чтобы сделать ясной идею доказательства, предположим сначала, что области $D_j \subset \bar{C}$ жордановы. Пусть μ_{jj} — сужение меры μ_j на множество $\bar{D}_j \setminus \bigcup_{i \neq j} \partial D_i$, $1 \leqslant j \leqslant n$, а

$$\mu_{jk} = \mu_j|_{\partial D_j \cap \partial D_k \setminus \{\infty\}}, \; k \neq j, \; 1 \leqslant j, \; k \leqslant n.$$

Заметим, что множество точек, принадлежащих сразу трем различным $\bar{D}_j$, конечно (см. ниже лемму 6). (Прежде всего, для этого сделано упрощающее предположение о жордановости). Кроме того, $\mu_j(E) = 0$ для любого конечного множества $E \subset C$, так как $u_j \geqslant 0$. Следовательно,

$$\mu_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk}, \; 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{8.2}$$

Если неупорядоченные пары $\{i, k\}$ и $\{j, p\}$ не совпадают, то борелевские носители мер μ_{ik} и μ_{jp} могут быть выбраны непересекающимися. Принимая во внимание это обстоятельство, а также (8.1) и (8.2), получаем

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mu_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \geqslant 2\Big(\sum_{j=1}^{n} \mu_{jj} + \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} (\mu_{ji} \vee \mu_{ij})\Big)$$

или

$$\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} (\mu_{ij} + \mu_{ji}) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \mu_{jj} + 2 \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} (\mu_{ij} \vee \mu_{ji}). \tag{8.3}$$

Всегда справедливо $\mu_{ij} + \mu_{ji} \leqslant 2(\mu_{ij} \vee \mu_{ji})$, причем равенство возможно, только если $\mu_{ij} = \mu_{ji}$. Поэтому из (8.3) следует

$$\mu_{jj} = 0, \; 1 \leqslant j \leqslant n \quad \textbf{(8.4)}, \qquad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \; 1 \leqslant j < i \leqslant n \quad \textbf{(8.5)}.$$

Из (8.4) вытекает, что функции u_j гармонические в D_j. Далее, легко видеть, что замкнутый носитель меры μ_j совпадает с $\partial D_j \setminus \setminus \{\infty\}$. Поэтому из (8.4) вытекает, что вся граница области D_j покрывается границами других областей D_i. Здесь также используется предположение о том, что области D_j жордановы. Таким образом, $\bigcup_j \bar{D}_j = \bar{C}$. Сфера разбита кривыми, гомеоморфными отрезку, на n односвязных областей D_j. Кривые назовем ребрами, а их концы — вершинами. Вершина называется нечетной, если в ней сходится нечетное число ребер. Множество нечетных вершин обозначим через Q. Количество нечетных вершин четно. В самом деле, если просуммировать количество ребер, сходящихся в каждой вершине, то получим удвоенное общее количество ребер, т. е. четное число. Следовательно, в этой сумме четное количество нечетных слагаемых.

Кривой на римановой поверхности F назовем непрерывное отображение $[0, 1] \to F$. Пусть $\Gamma \subset C$ — кривая, не проходящая через вершины и трансверсально пересекающая ребра. Количество пересечений с ребрами обозначим через $n(\Gamma)$. Число вращения замкнутой кривой Γ относительно точки $z \in C$ обозначаем через $\mathrm{ind}_z \, \Gamma$.

Лемма 2. *Для замкнутых кривых* Γ *выполняется*

$$n(\Gamma) \equiv \sum_{z \in Q} \operatorname{ind}_z \Gamma \pmod 2.$$

Доказательство. Малой деформацией добьемся того, чтобы кривая Γ имела конечное число самопересечений. Будем непрерывно деформировать кривую Γ, стягивая ее в точку $z_0 \in D_1$. Деформацию проводим так, чтобы промежуточные кривые имели конечное число самопересечений, конечное число трансверсальных пересечений с внутренними точками ребер и чтобы точки самопересечения кривых не попадали в вершины. Когда в процессе деформации кривая проходит через вершину z так, что число $\operatorname{ind}_z \Gamma$ меняется на 1, число $n(\Gamma)$ получает четное приращение, если вершина z четная, и нечетное приращение, если z — нечетная вершина. Это доказывает лемму.

Рассмотрим двулистное накрытие сферы $\overline{\boldsymbol{C}}$ некоторой римановой поверхностью F, разветвленное в точности над Q. Такое накрытие π: $F \to \overline{\boldsymbol{C}}$ существует, так как Q содержит четное количество точек. Накрытие π неразветвлено над односвязными областями D_j, поэтому каждая из них имеет ровно два прообраза; $\tilde{D}_j$ и $\tilde{D}_{j+n}$. Далее предполагается, что все рассматриваемые кривые трансверсально пересекают ребра и не проходят через вершины. Подняв ребра на поверхность F, определим $n(\Gamma)$ для кривых Γ на F так же, как выше. Ясно, что $n(\Gamma) = n(\pi(\Gamma))$ **(8.6)**. Замкнутая кривая $\Gamma \subset \boldsymbol{C}$ поднимается до замкнутой кривой на F тогда и только тогда, когда она четное число раз обходит точки ветвления, т. е. если

$$\sum_{z \in Q} \operatorname{ind}_z \Gamma \equiv 0 \pmod 2.$$

Отсюда с учетом (8.6) и леммы 2 вытекает, что $n(\Gamma) \equiv 0 \pmod 2$ для всех замкнутых кривых Γ на F.

Теперь области $\tilde{D}_j$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, можно разбить на два класса следующим образом: $\tilde{D}_j$ принадлежит к k-му классу ($k = 0, 1$), если $n(\Gamma) \equiv k \pmod 2$ для любой кривой Γ с началом в $\tilde{D}_1$ и концом в $\tilde{D}_j$. Это определение корректно, поскольку для замкнутых кривых на F справедливо $n(\Gamma) \equiv 0 \pmod 2$. Поднимем теперь функции u_j на F, полагая

$$\tilde{u}_j(z) = u_j \circ \pi(z),\ z \in \tilde{D}_j;\ \tilde{u}_j(z) = 0,\ z \in F \setminus \tilde{D}_j;$$
$$\tilde{u}_{j+n}(z) = u_j \circ \pi(z),\ z \in \tilde{D}_{j+n};\ \tilde{u}_{j+n}(z) = 0,\ z \in F \setminus \tilde{D}_{j+n},$$
$$1 \leqslant j \leqslant n.$$

Рассмотрим на F функцию

$$v = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{k(j)} \tilde{u}_j,$$

где $k(j)$ — класс области $\tilde{D}_j$. Риссовский заряд этой δ-субгармонической функции равен

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^{k(j)} \tilde{\mu}_j = \sum_{j,i} (-1)^{k(j)} \tilde{\mu}_{ji}. \tag{8.7}$$

Здесь $\tilde{\mu}_j$ — риссовская мера функции $\tilde{u}_j$ на F, а $\tilde{\mu}_{ji}$ — сужение $\tilde{\mu}_j$ на $\partial \tilde{D}_j \cap \partial \tilde{D}_i \setminus \{\infty\}$. Если $\tilde{\mu}_{ji} \neq 0$, то области $\tilde{D}_j$ и $\tilde{D}_i$ имеют на границах общее ребро, следовательно, принадлежат к различным классам. Из (8.5) следует, что $\tilde{\mu}_{ij} = \mu_{ji}$, поэтому выражение (8.7) равно 0 и функция v гармоническая в $F \setminus \pi^{-1}(\{\infty\})$.

Воспользуемся теперь условием (6.7), из которого следует, что

$$v(z) = O(|\pi(z)|)^{\lambda+\varepsilon}, \ \pi(z) \to \infty, \tag{8.8}$$
$$v(z) = O(|\pi(z)|)^{\lambda-\varepsilon}, \ \pi(z) \to 0. \tag{8.9}$$

Пусть h — многозначная аналитическая функция на F, такая, что $v = \operatorname{Re} h$ (различные ветви h отличаются на постоянные чисто мнимые слагаемые). Производная $y = dh/d\pi$ — однозначная функция на $F \setminus \pi^{-1}(\infty)$. Из (8.8) следует, что эта функция мероморфна на F. В каждой вершине на F сходится четное число > 2 областей $\tilde{D}_j$. Следовательно, при обходе точки $z \in F$ вокруг вершины функция v меняет знак не менее четырех раз. Отсюда следует, что вершины, лежащие над конечной частью плоскости, суть нули дифференциала dh, причем точки ветвления F над $\boldsymbol{C}$ — обязательно кратные нули. Дифференциал $d\pi$ имеет простые нули в точках ветвления. Таким образом, мероморфная функция y имеет нули во всех вершинах и может иметь полюсы только над точкой ∞. Из (8.8) следует, что суммарный порядок полюсов не превосходит $2(\lambda - 1 + \varepsilon)$. Далее, из (8.9) вытекает, что суммарный порядок нулей, проектирующихся в 0, не менее чем $2(\lambda - 1 - \varepsilon)$. Имеется единственное целое число $k \geqslant 0$, удовлетворяющее неравенствам $2(\lambda - 1 - \varepsilon) \leqslant k \leqslant 2(\lambda - 1 + \varepsilon)$. Следовательно, функция y не имеет других нулей, кроме проектирующихся в 0. В частности, нет никаких вершин, кроме 0 и ∞. Функция v имеет вид $v(z) = \operatorname{Re}(az^{n/2})$, где $n = k + 2$, $a \in \boldsymbol{C}$, $z \in \boldsymbol{C}$. Ясно, что n в этой формуле есть не что иное, как количество областей D_j. Основная лемма доказана с априорным предположением о том, что области D_j жордановы.

9. Недостижимые граничные точки. Трудность доказательства Основной леммы в общем случае связана с существованием недостижимых граничных точек на границах областей D_j, чего нельзя исключить a priori. Доказательство в общем случае будет таким же, как в п. 9, но некоторые его шаги потребуют дополнительного обоснования.

Пусть $D \subset \overline{\boldsymbol{C}}$ — область. Точка $z_0 \in \partial D$ называется достижимой (из D), если существует кривая $\Gamma \subset D$, оканчивающаяся в точке z_0. Множество достижимых граничных точек (д. г. т.) является борелевским [2].

Пусть область D обладает функцией Грина. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ и рассмотрим функцию Грина с полюсом в z_0. Продолжим ее нулем вне D и обозначим продолженную функцию через g. Функция g субгармонична в $\bar{C}\setminus\{z_0\}$ и непрерывна, если область D регулярна для задачи Дирихле. Риссовская мера функции g сосредоточена на ∂D и представляет собой не что иное, как гармоническую меру в точке z_0 относительно D [3, гл. IX, § 4]. При различных выборах z_0 соответствующие гармонические меры взаимно абсолютно непрерывны.

Лемма 3. *Пусть граница области D регулярна*. Тогда гармоническая мера множества недостижимых точек на ∂D равна* 0.

Доказательство. Пусть лемма неверна. Тогда существует замкнутое подмножество K множества недостижимых граничных точек, гармоническая мера которого > 0.

Пусть $v(z)$ — точная нижняя грань функций $w(z)$, гармонических в D, непрерывных в $\bar{D}$ и удовлетворяющих условиям $w(z) \geqslant 0$ в $\bar{D}$ и $w(z) \geqslant 1$ на K. Функция v гармоническая и ограниченная в D. По предположению $v(z) > 0$ в D. С другой стороны, из регулярности границы ∂D следует, что $v(z)$ непрерывна и равна 0 в точках $z \in \partial D\setminus K$.

Пусть теперь U — единичный круг, и $\varphi : U \to D$ — униформизация области D. Из регулярности ∂D и одной теоремы Р. Неванлинны [5, с. 214] следует, что φ — функция ограниченного вида. Следовательно, φ имеет радиальные пределы п. в. на ∂U. Эти радиальные пределы суть д. г. т. области D. Рассмотрим гармоническую функцию $v(\varphi(z))$, $z \in U$. Она ограничена в U и имеет радиальные пределы, равные 0 п. в. на ∂U. Следовательно, $v \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4 [6]. *Пусть $v \geqslant 0$ — δ-субгармоническая функция в произвольной области G. Положим $E = \{z \in G : v(z) = 0\}$. Тогда сужение риссовского заряда функции v на E есть неотрицательная мера.*

Из субгармонической теоремы Иверсена следует, что точка ∞ достижима из всех областей D_j [7, п. 4.6.5]. Обозначим через $\partial_0 D_j$ множество д. г. т. области D_j.

Лемма 5. $\mu_j(\partial D_j \setminus \partial_0 D_j) = 0$.

Доказательство. Пусть $R > 0$ — сколь угодно большое число. Рассмотрим область $G = D_j \cup \{z \in \bar{C} : |z| > 2R\}$. Область G регулярна, так как каждая точка $z \in \partial G$ содержится в некотором континууме $K \subset \partial G$ [8, гл. IX, п. 3]. Пусть g — функция Грина области G с полюсом в ∞, продолженная нулем в $C \setminus G$. Выберем постоянную $C > > 0$ так, чтобы выполнялось $u_j(z) < c\,g(z)$, $|z| = 3R$, и применим лемму 4 к функции $v = c\,g - u_j$ в области $D(0, 2R)$. Получим, что мера $\mu_j|_{D(0,R)}$ абсолютно непрерывна относительно гармонической меры ν области G. Поскольку точка $z \in G$, $|z| < R$ недостижима из G тогда и только тогда, когда она недостижима из D_j, утверждение леммы 5 следует из леммы 3.

Лемма 6. *Пусть E — множество точек, достижимых одновременно из трех или более областей D_j. Тогда E конечно и $\mu_j(E) = 0$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$.*

---

* Условие регулярности на самом деле излишне (см. [4]).

Доказательство. Пусть D_1, D_2, D_3 имеют две общие конечные д. г. т. z' и z''. Пусть $\Gamma_i \subset D_i$ — простые кривые, соединяющие z' и z'', $1 \leqslant i \leqslant 3$. Тогда одна из трех кривых Γ_i (скажем, Γ_1) лежит во внутренней области замкнутой жордановой кривой, образованной двумя другими кривыми (скажем, Γ_2 и Γ_3) и точками z' и z''. Отсюда по теореме Жордана, учитывая, что $D_1 \cap (\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \{z', z''\}) = \varnothing$, получаем, что область D_1 лежит во внутренней области замкнутой жордановой кривой $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \{z', z''\}$, что невозможно, так как D_1 неограничена. Таким образом, $\operatorname{card}(\partial_0 D_1 \cap \partial_0 D_2 \cap \partial_0 D_3) \leqslant 2$ (при этом учтена точка ∞, достижимая из всех областей D_j). Конечность множества E доказана. Второе утверждение леммы следует из того, что $u_j \geqslant 0$. В этом случае $\mu_j(E) = 0$ для любого конечного множества $E \subset \boldsymbol{C}$.

Рассмотрим теперь сужения мер

$$\mu_{jj} = \mu_j|_{D_j \cup (\partial_0 D_j \setminus \bigcup_{i \neq j} \partial_0 D_i)},$$

$$\mu_{ij} = \mu_j|_{\partial_0 D_i \cap \partial_0 D_j \setminus \{\infty\}}, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n.$$

Из лемм 5 и 6 следует, что

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{n} \mu_{kj}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{9.1}$$

Можно считать, что меры μ_{ik} и μ_{mp} имеют непересекающиеся борелевские носители, если неупорядоченные пары $\{i, k\}$ и $\{m, p\}$ не совпадают. Поэтому из (8.1) и (9.1) следуют соотношения (8.3) — (8.5). В частности, функции u_j гармонические в D_j (8.4). Легко видеть, что u_j непрерывны в $\boldsymbol{C}$.

Лемма 7. *Гармоническая мера на ∂D_j абсолютно непрерывна относительно меры μ_j.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in D_j$. Выберем $r > 0$ так, чтобы $D(z_0, r) \subset D_j$, и положим $K = \partial D(z_0, r)$. Пусть g — функция Грина области D_j с полюсом в z_0, продолженная нулем в $\overline{\boldsymbol{C}} \setminus D_j$. Выберем постоянную $C > 0$ так, чтобы выполнялось $g(z) \leqslant C u_j(z)$, $z \in K$. Применение леммы 4 с $v = Cu_j - g$ и $G = \boldsymbol{C} \setminus D(z_0, r)$ завершает доказательство.

10. Взаимное расположение областей D_j. Возьмем n экземпляров единичного круга U_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, и зафиксируем конформные гомеоморфизмы $\varphi_j : U \to D_j$ так, чтобы отрезки $(-1, 0] \subset U_j$ переходили в кривые, уходящие на ∞ (см. замечание перед леммой 5). Радиальные пределы функции φ_j суть д. г. т. области D_j.

Покажем, что конечные радиальные пределы функции φ_j в точках $x, y \in T_j = \partial U_j$, $x \neq y$ не могут совпадать. В противном случае рассмотрим кривую γ, состоящую из двух радиусов, проведенных в точки x, y. Кривая $\Gamma = \overline{\varphi_j(\gamma)}$ жорданова. Область D, ограниченная кривой Γ, не пересекается с $\overline{D}_k$ при $k \neq j$, так как все D_k неограничены. С другой стороны, внутри D лежит часть ∂D_j положительной гармонической меры. Из леммы 7 следует, что $\mu_{jj}(D) > 0$, что противоречит (8.4).

Скажем, что области D_i и D_j примыкают, если существуют хотя бы две общие конечные граничные точки, достижимые из обеих областей. Очевидно, что если $\mu_{ij} \neq 0$, то D_i и D_j примыкают. Зафиксируем число j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Пусть область D_i примыкает к D_j. Рассмотрим множество $X_{ji} \subset T_j$, соответствующее конечным д. г. т. области D_j, являющимся одновременно д. г. т. области D_i. Положим

$$b_{ji} = \inf \{\theta \in (-\pi,\ \pi) : e^{i\theta} \in X_{ji}\};$$
$$a_{ji} = \sup \{\theta \in (-\pi,\ \pi) : e^{i\theta} \in X_{ji}\};$$
$$T_{ji} = (b_{ji},\ a_{ji}) \subset T_j.$$

Дугу T_{ji} назовем дугой примыкания.

Покажем, что ни одна из дуг примыкания T_{ji} не содержит точки, в которой радиальный предел функции φ_j бесконечен. Иначе нашлись бы точки x, y, t, $-\pi < x < y < t < \pi$, с радиальными пределами $\varphi_j(e^{ix}) = a$, $\varphi_j(e^{iy}) = \infty$, $\varphi_j(e^{it}) = b$, причем a и b — конечные д. г. т. области D_i. Соединим a и b простыми дугами $\gamma_1 \subset D_j$, $\gamma_2 \subset D_i$. Замкнутая жорданова кривая $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{a,\ b\}$ делит плоскость. Кривая $\varphi_j^{-1}(\gamma_1)$ делит U_j на две части, одна из которых имеет на границе точку -1, а другая — точку e^{iy}. Образы обеих этих областей неограничены, что невозможно, так как один из этих образов лежит в области, ограниченной кривой Γ.

Покажем, что дуги примыкания T_{ji}, T_{jk} не пересекаются при $i \neq k$. Если эти две дуги пересекаются, то найдутся три точки $-\pi < x < y < t < \pi$, такие, что существуют конечные попарно различные радиальные пределы $\varphi_j(e^{ix}) = a$, $\varphi_j(e^{iy}) = b$, $\varphi_j(e^{it}) = c$, причем точки a и c достижими из одной области (скажем, D_i), а точка b — из другой (скажем, D_k). Соединим точки a и c простыми дугами в D_j и в D_i. Получим замкнутую жорданову кривую, ограничивающую область D, причем $b \in D$, так как $b \neq a$, $b \neq c$. Но область D_k, будучи неограниченной, не пересекает D. Приходим к противоречию.

Покажем, что дуги примыкания T_{ji} вместе со своими концами заполняют всю окружность T_j. В самом деле, если дуга $\Delta \subset T_j$ не пересекается ни с одной из дуг примыкания, то конечные радиальные пределы, которые функция φ_j имеет на Δ, не являются достижимыми граничными точками ни одной из областей D_k, $k \neq j$. Учитывая лемму 7, получаем противоречие с (8.4).

Аналогичное рассуждение показывает, что точки на T_{ji}, в которых существуют радиальные пределы функции φ_j, являющиеся д. г. т. области D_i, плотны на дуге T_{ji}.

Снабдим окружности T_j положительным направлением обхода. Имеется естественное монотонное (меняющее направление обхода на противоположное) отображение ψ_{ji} плотного подмножества дуги T_{ji} на плотное подмножество дуги T_{ij}. Это отображение переводит точку $e^{ix} \in T_{ji}$ в точку $e^{iy} \in T_{ij}$, если соответствующие радиальные пределы равны: $\varphi_j(e^{ix}) = \varphi_i(e^{iy})$. Продолжим указанное отображение до гомеоморфизма дуг. Это можно сделать потому, что функции ψ_{ji} и $\psi_{ij} = \psi_{ji}^{-1}$ строго монотонны. Склеим круги U_j и U_i по дугам T_{ji} и T_{ij}, отождествляя эти дуги при помощи отображения ψ_{ji}. Эту склейку проведем для всех пар i, j, для которых определены дуги T_{ij} и T_{ji}. После заклеивания конечного числа проколов получится компактная ориентируемая поверхность S. Определены топологические вложения $\varphi_j^{-1}: D_j \to U_j \subset S$. На поверхности S имеется сеть, состоящая из ребер $T_{ij} = T_{ji}$ и вершин — заклеенных проколов.

Замкнутую кривую $\Gamma \subset S$ назовем допустимой, если она не проходит через вершины, конечное число раз трансверсально пересекает ребра, в каждой такой точке пересечения $x \in \Gamma \cap T_{ij}$ существуют радиальные пределы $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(x)$ и Γ образует ненулевые углы с T_{ij}. Допустимая кривая $\Gamma \subset S$ имеет образ в $\bar{C}$ — замкнутую кривую $\bigcup\limits_j \overline{\varphi_j(\Gamma \cap U_j)}$, которую будем обозначать через $\varphi(\Gamma)$. Очевидно, что допустимые кривые плотны в множестве всех замкнутых кривых на S.

Покажем, что поверхность S гомеоморфна сфере. Если это не так, то найдутся две допустимые кривые Γ_1, Γ_2, трансверсально пересекающиеся в единственной точке, не лежащей на ребре. Тогда замкнутые кривые $\varphi(\Gamma_1)$ и $\varphi(\Gamma_2)$ на сфере трансверсально пересекаются в единственной точке, что невозможно. Таким образом, S — сфера.

Пусть Q — множество всех нечетных вершин сети. Количество таких вершин четно (см. п. 8). Рассмотрим любую вершину p. Пусть Γ_m — последовательность допустимых замкнутых жордановых кривых, сходящаяся к p, причем $\Gamma_{m+1} \cap \Gamma_m = \varnothing$, Γ_{m+1} отделяет Γ_m от p. Обозначим через K_m ту из компонент множества $\bar{C} \setminus \varphi(\Gamma_m)$, которая содержит Γ_{m+1}. Имеем $K_{m+1} \subset K_m$, поэтому $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} K_m$ — непустое множество, которое обозначим через $K(p)$. Кривые $\varphi(\Gamma)$, где $\Gamma \subset S$ — допустимая кривая, не пересекаются с множествами $K(p)$. Для разных вершин p, $q \in S$ справедливо $K(p) \cap K(q) = \varnothing$. Для любой нечетной вершины q выберем произвольную точку $\varphi(q) \subset K(q)$. Для любой допустимой кривой Γ выполняется

$$\operatorname{ind}_q \Gamma = \operatorname{ind}_{\varphi(q)} \varphi(\Gamma). \tag{10.1}$$

Рассмотрим двулистное накрытие $\pi: F \to \bar{C}$ сферы $\bar{C}$ некоторой римановой поверхностью F, разветвленное в точности над точками $\varphi(q)$, $q \in Q$. Пусть $\tilde{D}_1, \ldots, \tilde{D}_{2n}$ — прообразы областей $D_1, \ldots, D_n$, причем $\pi^{-1}(D_j) = \tilde{D}_j \cup \tilde{D}_{n+j}$. Определение примыкания областей на римановой поверхности F точно такое же, как в $\bar{C}$. Если области $\tilde{D}_i$ и $\tilde{D}_j$ примыкают, то $\pi(D_i)$ и $\pi(D_j)$ тоже примыкают, но обратное неверно.

Лемма 8. *Пусть $\tilde{D}_{j_1}, \ldots, \tilde{D}_{j_m}$ — конечная последовательность, причем D_{j_k} примыкает к $D_{j_{k+1}}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $j_{m+1} = j_m$. Тогда m четно.*

Доказательство. Пусть $\pi(\tilde{D}_{j_k}) = D_{i_k}$. Области D_{i_k} и $D_{i_{k+1}}$ примыкают. Поэтому в U_{i_k} существует дуга Γ_k, соединяющая точки $x \in T_{i_k i_{k-1}}$ и $y \in T_{i_k i_{k+1}}$, причем функции φ_{i_k} и $\varphi_{i_{k-1}}$ имеют радиальные пределы в точке x, а функции φ_{i_k} и $\varphi_{i_{k+1}}$ — в точке y. Дугу Γ_k выберем так, чтобы функция φ_{i_k} имела предельные значения вдоль

Γ_k в точках x и y. Последовательно проходимые дуги Γ_k образуют допустимую кривую Γ, причем $m = n(\Gamma)$. Кривая $\varphi(\Gamma)$, очевидно, поднимается на риманову поверхность F. Поэтому

$$\sum_{q \in Q} \operatorname{ind}_{\varphi(q)} \varphi(\Gamma) \equiv 0 \pmod 2. \tag{10.2}$$

Из (10.1), (10.2) следует, что

$$\sum_{q \in Q} \operatorname{ind}_q \Gamma \equiv 0 \pmod 2.$$

Поэтому число $m = n(\Gamma)$ четно в силу леммы 2.

11. Окончание доказательства. Остается повторить рассуждения из п. 8. Поднимем функции u_j на F и получим субгармонические функции $\tilde{u}_j$ с носителями в $\tilde{D}_j$. Разобьем области $\tilde{D}_j$ на два класса (0-й и 1-й) так, чтобы примыкающие области принадлежали к различным классам. Это можно сделать в силу леммы 8. Обозначим через $k(j)$ класс области $\tilde{D}_j$ и положим

$$v = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{k(j)} \tilde{u}_j.$$

Риссовский заряд этой функции равен $\sum_{j,i} (-1)^{k(j)} \tilde{\mu}_{ji}$. Эта сумма равна 0, так как примыкающие области принадлежат к разным классам, а $\tilde{\mu}_{ji} = \tilde{\mu}_{ij}$ в силу (8.4). Таким образом, v — гармоническая функция, а области D_j ограничены кусочно-аналитическими кривыми. Рассуждение из п. 8 с использованием (8.8), (8.9) показывает, что

$$v(z) = \operatorname{Re} az^{n/2},\ a \in \boldsymbol{C},\ z \subset \boldsymbol{C},\ n \geqslant 2 —$$

натуральное число. Основная лемма доказана.

Список литературы: 1. *Еременко А. Э.* Новое доказательство теоремы Дрейсина о мероморфных функциях конечного порядка с максимальной суммой дефектов // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1989. Вып. 51. С. 107—116. 2. *Mazurkiewicz S.* Über erreichbare Punkte // Fund. Math. 1936. **26**. P. 150—155. 3. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. М., 1964. 212 с. 4. *Саакян Р. Ш.* Об одном обобщении принципа максимума // Изв. АН Арм. ССР. 1987. **22**, № 1. С. 94—101. 5. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М.; Л., 1941. 388 с. 6. *Гришин А. Ф.* О множествах регулярного роста целых функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1983. Вып. 40. С. 28—38. 7. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М., 1980. 304 с. 8. *Брело М.* О топологиях и границах в теории потенциала. М., 1974. 224 с.

Поступила в редколлегию 11.09.87