УДК 517.944

И. Е. ЕГОРОВА, Е. Я. ХРУСЛОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ТОНКИМИ ЩЕЛЯМИ

§ 1. Постановка задачи и основной результат.

Пусть (Ω, F, P) — вероятностное пространство; $q(t) = q(t, \omega)$ $r(t) = r(t, \omega)$ — определенные на нем одномерные случайные процессы ($t \in \boldsymbol{R}$, $\omega \in \Omega$), удовлетворяющие следующим условиям: (i) процесс $q(t, \omega)$ стационарен и метрически транзитивен [1], т. е. с вероятностью 1 имеет место соотношение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int^{T} q(t, \omega)\, dt = \langle q(0)\rangle, \tag{1.1}$$

где $\langle\ \rangle$ — знак математического ожидания по мере P; (*ii*) с вероятностью 1 существуют производные $\frac{d^k q}{dt^k}$, $\frac{d^k r}{dt^k}$ $(k = 1, 2, 3)$; (*iii*) с вероятностью 1 имеют место неравенства

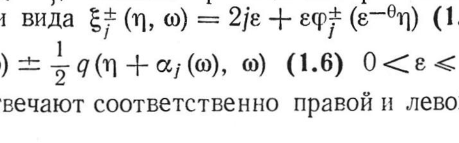
$$0 < a \leqslant q(t, \omega) \leqslant A < 1, \ |r(t, \omega)| \leqslant 1; \tag{1.2}$$

$$\left|\frac{d^k r}{dt^k}\right|, \ \left|\frac{d^k q}{dt^k}\right| \leqslant B \tag{1.3}$$

с неслучайными и не зависящими от t постоянными a, A, B.

Пусть $\{\alpha_j(\omega)\}_{j\in\boldsymbol{Z}}$, $\{\beta_j(\omega)\}_{j\in\boldsymbol{Z}}$ — последовательности случайных величин на Ω, первая из которых с вероятностью 1 равномерно по j ограничена неслучайной постоянной $|\alpha_j(\omega)| \leqslant C$ **(1.4)**.

Выберем в качестве ω произвольную реализацию из множества полной меры на Ω, для которого выполнены условия (1.1) — (1.4), и обозначим через $D^\varepsilon(\omega)$ область в $\boldsymbol{R}^2$, состоящую из двух полуплоскостей $R_+ = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in \boldsymbol{R},\ x_2 > 0\}$ и $R_- = \{x = (x_1, x_2): x_1 \in \boldsymbol{R}, x_2 < -h\}$ и системы соединяющих их тонких щелей $Q_j^\varepsilon(\omega)$ $(j = 0, \pm 1, \ldots$ $\ldots, \pm N^\varepsilon;\ N^\varepsilon < \infty\}$, боковые границы которых описываются случайными функциями вида $\xi_j^\pm(\eta, \omega) = 2j\varepsilon + \varepsilon\varphi_j^\pm(\varepsilon^{-\theta}\eta)$ **(1.5)**, где $\varphi_j^\pm(\eta) = r(\eta + \beta_j(\omega), \omega) \pm \frac{1}{2} q(\eta + \alpha_j(\omega), \omega)$ **(1.6)** $0 < \varepsilon \leqslant 1,\ 0 < \theta < \frac{2}{3}$, а знаки $+$ и $-$ отвечают соответственно правой и левой границам щели (рисунок).



Рассмотрим в области $D^\varepsilon(\omega)$ краевую задачу

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = f(x), \quad x \in D^\varepsilon(\omega); \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial D^\varepsilon(\omega); \tag{1.8}$$

$$u \to 0, \quad |x| \to \infty, \tag{1.9}$$

где $k \in \boldsymbol{C}'^{+}$, $f(x)$ — непрерывная и финитная функция с носителем, сосредоточенным в R_+; граничное условие (1.8) понимается в обобщенном смысле: на гладких участках производная по нормали равна нулю, а в окрестностях углов конечен интеграл энергии, т. е. $u \in W_2^1(D^\varepsilon(\omega))$.

Как известно, в области $D^\varepsilon(\omega)$ существует единственное решение задачи (1.7)—(1.9): $u(x) = u^\varepsilon(x, k, \omega)$. Цель данной работы — изучить асимптотическое поведение функции $u^\varepsilon(x, k, \omega)$ при $\varepsilon \to 0$ и $N^\varepsilon = \left[\frac{L}{2\varepsilon}\right] \to \infty$ $(0 < L < \infty)$.

Введем необходимые обозначения; $G_\pm(x, y, k)$ — функция Грина задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в областях $R_\pm$ соответственно, т. е. $G_\pm(x, y, k) = \frac{i}{4}(H_0^1(k|x-y|) + H_0^1(k|x-y_\pm^*|)$, где x, $y \in R_\pm$, $y_+^* = (y_1 - y_2)$; $y_-^* = (y_1, -2h - y_2)$; H_0^1 — функция Ханкеля;

$$\hat{u}(x, k) = \int\limits_{R_+} G_+(x, y, k) f(y)\, dy \quad (x \in R_+);$$

$$\Gamma_+ = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = 0, \ -L \leqslant x_1 \leqslant L\},$$

$$\Gamma_- = \{x : x_2 = -h, \ -L \leqslant x_1 \leqslant L\}.$$

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *При любых $x \in R_+ \cup R_-$ и $k \in \boldsymbol{C}^+$ с вероятностью* 1 *существует неслучайный предел $u(x, k)$ решений задачи* (1.7)—(1.9);

$$u(x, k) = \lim_{\varepsilon=0} u^\varepsilon(x, k, \omega) =$$

$$= \begin{cases} \hat{u}(x, k) + \int\limits_{\Gamma_+} G_+(x, y, k)\, \psi^+(y)\, d\Gamma_y, & x \in R_+, \\ -\int\limits_{\Gamma_-} G_-(x, y, k)\, \psi^-(y)\, d\Gamma_y, & x \in R_-, \end{cases} \tag{1.10}$$

где $d\Gamma_y = d\xi$ — одномерная лебегова мера на $\Gamma_\pm$, а функции $\psi^\pm(y) = \psi^\pm(\xi)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\langle q^{-1}\rangle \psi^+(\xi) - \frac{1}{2} i\hat{k} \operatorname{ctg} \hat{k}h \int\limits_{-L}^{L} H_0^1(k|\xi - \xi'|)\, \psi^+(\xi')\, d\xi' -$$

$$- \frac{i\hat{k}}{2 \sin kR} \int\limits_{-L}^{L} H_0^1(k|\xi - \xi'|)\, \psi^-(\xi')\, d\xi' = -\hat{k} \operatorname{ctg} \hat{k}h\, \hat{u}(\xi, k);$$

$$\langle q^{-1}\rangle \psi^-(\xi) - \frac{i\hat{k}}{2\sin kh}\int_{-L}^{L} H_0^1(k|\xi-\xi'|)\psi^+(\xi')\,d\xi' -$$

$$-\frac{1}{2}\, i\hat{k}\operatorname{ctg}\hat{k}h\int_{-L}^{L} H_0^1(k|\xi-\xi'|)\psi^-(\xi')\,d\xi' = \frac{\hat{k}}{\sin \hat{k}h}\,\hat{u}(\xi, k), \quad (1.11)$$

где $\hat{k} = k(\langle q\rangle\langle q^{-1}\rangle)^{\frac{1}{2}}$, $\xi \in [-L, L]$.

Предел в равенстве (1.10) достигается равномерно по $x \in R_+ U R_-$, находящемся на положительном расстоянии от границ $\partial R_\pm$, и по k из любого компактного в $\boldsymbol{C}^+$ множества.

Доказательство этой теоремы приводится в § 2,3 и состоит из трех частей: сначала подбирается некоторое представление для решения $u^\varepsilon(x, k, \omega)$ системы (1.7) — (1.9) при фиксированных параметрах ε и ω и мнимых $k = i\varkappa$ ($\varkappa > 0$), затем с помощью этого представления проводится предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и результат теоремы устанавливается для $k = i\varkappa$ и, наконец, полученный результат переносится на произвольные комплексные $k \in \boldsymbol{C}^+$. В § 4 изучается применение этой теоремы к задаче о прохождении H-поляризованной электромагнитной волны через идеально проводящий слой с тонкими случайными щелями.

§ 2. Аппроксимация решения в щелях

Пусть ω — фиксированное событие, для которого выполнены соотношения (1.1)—(1.4). Введем в щели $Q_j^\varepsilon(\omega)$ криволинейную ортогональную систему координат $\left(v, t : 0 < t < h, \ -\frac{\varepsilon}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$ таким образом, чтобы боковые границы щели совпадали с координатными линиями $v = \pm\frac{\varepsilon}{2}$. Легко видеть, что эти координаты можно описать равенствами

$$\Phi_\varepsilon(\xi, \eta, v, t) = \xi - \varphi_j^+(\varepsilon^{-\theta}\eta)\left(\frac{\varepsilon}{2} + v\right) - \varphi_j^-(\varepsilon^{-\theta}\eta)\left(\frac{\varepsilon}{2} - v\right) = 0;$$
$$\Psi_\varepsilon(\xi, \eta, v, t) = \eta - \varepsilon^\theta g(\varepsilon^{-1}\xi, \varepsilon^{-\theta}t, \varepsilon) = 0, \quad (2.1)$$

где $\xi = x_1 - j\varepsilon$, $\eta = -x_2$ — локальные декартовы координаты в щели. Полагая $\zeta = \varepsilon^{-1}\xi$, $\tau = \varepsilon^{-\theta}t$ и выбирая функцию $g(\zeta, \tau, \varepsilon)$ из условия ортогональности координатной системы (v, t), получаем для этой функции следующее дифференциальное уравнение по переменной ζ:

$$\frac{dg}{d\zeta} = \varepsilon^{2(1-\theta)}\left\{(\varphi_j^-(g))'\,\frac{\zeta - \varphi_j^+(g)}{\varphi_j^+(g) - \varphi_j^-(g)} - (\varphi_j^+(g))'\,\frac{\zeta - \varphi_j^-(g)}{\varphi_j^+(g) - \varphi_j^-(g)}\right\}, \quad (2.2)$$

которое дополним начальным условием $g|_{\zeta=0} = \tau$ **(2.3).**

Задача Коши (2.2), (2.3) однозначно разрешима на всей оси $\zeta \in \boldsymbol{R}$, поскольку в силу свойств функций $\varphi_j^\pm(\eta)$ правая часть уравнения (2.2) ограничена и удовлетворяет условию Липшица равномерно по $g \in \mathbf{R}$ и по ζ из любого конечного интервала $(-N, N)$.

Лемма 1.1. *Пусть N — любое положительное число. Тогда равномерно по $\zeta \in [-N, N]$ и $\tau \in \mathbf{R}$ для решения $g(\zeta, \tau, \varepsilon)$ задачи* (2.2), (2.3) *при $\varepsilon \to 0$ имеют место оценки*

$$\frac{\partial^k g}{\partial \tau^k} = \tau^{1-k} + O(\varepsilon^{2-2\theta})\ (k = 0, 1); \quad \left\{\frac{\partial g}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta\, \partial \tau}\right\} = O(\varepsilon^{2-2\theta}).$$

Доказательство этой леммы вытекает непосредственно из вида интегрального уравнения, соответствующего системе (2.2), (2.3), и свойств ограниченности (iii) процессов $q(t)$ и $r(t)$.

Лемма 2. *Система* (2.1) *однозначно разрешима относительно переменных ξ и η, т. е. всюду в щели $Q_j^\varepsilon : \xi = \bar{\xi}(v, t, \varepsilon, \omega)$, $\eta = \bar{\eta}(v, t, \varepsilon, \omega)$, причем при $\varepsilon \to 0$ для вектор-функции $R(v, t) = (\bar{\xi}, \bar{\eta})$ выполнены оценки*

$$\left|\frac{\partial R}{\partial v}\right| = q(\varepsilon^{-\theta} t) + O(\varepsilon^{2-2\theta}), \ \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial R}{\partial v}\right| = \varepsilon^{-\theta} q'(\varepsilon^{-\theta} t)\, \varepsilon^{-\theta} + O(\varepsilon^{2-3\theta});$$
$$\left|\frac{\partial R}{\partial t}\right| = 1 + O(\varepsilon^{2-\theta}), \quad \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial R}{\partial t}\right| = O(\varepsilon^{2-3\theta}). \tag{2.4}$$

Система (2.1) *однозначно разрешима также относительно переменных v и t, причем при $\varepsilon \to 0$ справедливы оценки*

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} = 1 + O(\varepsilon^{2-2\theta}), \ \frac{\partial t}{\partial \xi} = O(\varepsilon^{1-\theta}). \tag{2.5}$$

Доказательство. Вычислим определитель $\hat{\Delta}$ матрицы $\dfrac{\partial(\Phi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon)}{\partial(\xi, \eta)}$. В силу системы (2.1) имеем представление

$$\hat{\Delta} = 1 + \varepsilon^{-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta}(\zeta, \tau, \varepsilon)\left[(\varphi_j^+(\varepsilon^{-\theta}\eta))'\left(\frac{\varepsilon}{2} + v\right) + (\varphi_j^-(\varepsilon^{-\theta}\eta))'\left(\frac{\varepsilon}{2} - v\right)\right]\Big|_{\zeta = \varepsilon^{-1}\xi}$$

из которого согласно лемме 1 в щели Q_j^ε при $\varepsilon \to 0$ выполняются оценки

$$\hat{\Delta} = 1 + O(\varepsilon^{2-2\theta}), \quad \frac{\partial \hat{\Delta}}{\partial t} = O(\varepsilon^{2-3\theta}). \tag{2.6}$$

Отсюда по теореме о неявных функциях следует, что при достаточно малых ε система (2.1) однозначно разрешима относительно переменных ξ, η. Согласно (2.1) и (1.6) имеем представления

$$\left|\frac{\partial R}{\partial v}\right| = |\hat{\Delta}|^{-1} q(\varepsilon^{-\theta}\eta) \sqrt{1 + \varepsilon^{2\theta-2}\left(\frac{\partial g}{\partial \zeta}\right)^2};$$
$$\left|\frac{\partial R}{\partial t}\right| = |\hat{\Delta}|^{-1}\left|\frac{\partial g}{\partial \tau}\right| \sqrt{1 + \varepsilon^{-2\theta}[q'(\varepsilon^{-\theta}\eta)\, v + r'(\varepsilon^{-\theta}\eta)\, \varepsilon]^2},$$

с помощью которых, используя результаты леммы 1, оценки (2.6) и учитывая, что при $k = 0, 1$ в силу (2.1) — (2.3), (1.2), (1.3)

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k} q(\varepsilon^{-\theta}\eta) - \frac{\partial^k}{\partial t^k} q(\varepsilon^{-\theta} t)\right| = O(\varepsilon^{2-(2+k)\theta}),$$

получаем требуемые оценки (2.4). Неравенства (2.5) устанавливаются аналогично. Лемма доказана.

Положим $q_j(\eta) = q(\eta + \alpha_j(\omega), \omega)$ и обозначим через $c_j^\varepsilon(t)$ и $s_j^\varepsilon(t)$ решения уравнения

$$q_j^{-1}(\varepsilon^{-\theta}t)\frac{d}{dt}\left[q_j(\varepsilon^{-\theta}t)\frac{du}{dt}\right] + k^2u = 0, \tag{2.7}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$c_j^\varepsilon(0) = 1,\ c_j^{\varepsilon\prime}(0) = 0; \tag{2.8}$$
$$s_j^\varepsilon(0) = 0,\ s_j^{\varepsilon\prime}(0) = q_j^{-1}(0). \tag{2.9}$$

Лемма 3. *Пусть $k = i\varkappa$, где $0 < \varkappa < \varkappa_1 < \infty$ и $0 \leqslant t \leqslant h$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ функции $c_j^\varepsilon(t)$ и $s_j^\varepsilon(t)$ удовлетворяют неравенствам*

$$1 \leqslant c_j^\varepsilon(t) \leqslant C;\ A^{-1}t \leqslant s_j^\varepsilon(t) \leqslant C;$$
$$|c_j^{\varepsilon\mathrm{I}}(t)| + |s_j^{\varepsilon\mathrm{I}}(t)| \leqslant C;\ |c_j^{\varepsilon\mathrm{II}}(t)| + |s_j^{\varepsilon\mathrm{II}}(t)| \leqslant C\varepsilon^{-\theta}, \tag{2.10}$$

где A — постоянная из оценки (1.2), *константы C не зависят от j и ε. При $\varepsilon \to 0$ справедливы равномерные по $t \in [0, h]$ $\varkappa \in [\varkappa_0, \varkappa_1]$ и $j = 0, \pm 1, \ldots, \pm N^\varepsilon$ оценки*

$$|c_j^\varepsilon(t) - \operatorname{ch}\hat{\varkappa}t| = O(1),\ |s_j^\varepsilon(t) - \langle q^{-1}\rangle\hat{\varkappa}^{-1}\operatorname{sh}\hat{\varkappa}t| = O(1);$$
$$|s_j^{\varepsilon\mathrm{I}}(t)\, q_j(\varepsilon^{-\theta}t) - \operatorname{ch}\hat{\varkappa}t| = O(1), \tag{2.11}$$

где $\hat{\varkappa} = \varkappa\sqrt{\langle q\rangle\langle q^{-1}\rangle}$.

Доказательство. Согласно формулам (2.7) — (2.9) при $k = i\varkappa$ для функций c и s имеют место уравнения типа Вольтерра

$$s_j^\varepsilon(t) = \varkappa^2\int_0^t \left\{q_j(\varepsilon^{-\theta}\alpha)\int_\alpha^t q_j^{-1}(\varepsilon^{-\theta}\beta)\, d\beta\, s_j^\varepsilon(\alpha)\, d\alpha + \int_0^t q_j^{-1}(\varepsilon^{-\theta}\alpha)\, d\alpha;\right.$$

$$c_j^\varepsilon(t) = \varkappa^2\int_0^t \left\{q_j(\varepsilon^{-\theta}\alpha)\int_\alpha^t q_j^{-1}(\varepsilon^{-\theta}\beta)\, d\beta\, c_j^\varepsilon(\alpha)\, d\alpha + 1.\right. \tag{2.12}$$

Решая их методом последовательных приближений и учитывая неравенства (1.3), заключаем, что функции $c_j^\varepsilon(t)$ и $s_j^\varepsilon(t)$ неотрицательны и ограничены на отрезке $[0, h]$ равномерно по $\varepsilon > 0$, $\varkappa \in [0, \varkappa_1]$ и $j = 0, \pm 1, \ldots$. Неравенства (2.10) очевидным образом вытекают теперь из уравнений (2.12) и ограниченности процесса $q(t, \omega)$. Далее, из полученных неравенств (2.10) следует, что множества функций $\{c_j^\varepsilon(t)\}$ и $\{s_j^\varepsilon(t)\}$ компактны в $C\ [0, h]$ и, значит, можно выделить последовательности $\{c_j^{\varepsilon_k}\}$ и $\{s_j^{\varepsilon_k}\}$, сходящиеся при $\varepsilon_k \to 0$ и при любых фиксированных j и $\varkappa$ к некоторым функциям c_j^0 и s_j^0 равномерно по $t \in [0, h]$. Учитывая (1.3), (1.4) и используя эргодическую теорему

(1.1), заключаем, что при любых $t, \Delta t$ и $p=1, -1$ равномерно по j существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{t}^{t+\Delta t} q^p(\varepsilon^{-\theta}\alpha+\alpha_j(\omega),\omega)\,d\alpha=\Delta t\langle q^p\rangle. \qquad (2.13)$$

Поэтому, переходя в уравнениях (2.12) к пределу при $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$, получаем для функций $s_j^0(t)$ и $c_j^0(t)$ интегральные уравнения

$$c_j^0(t)=\varkappa^2\int\limits_0^t\langle q\rangle\langle q^{-1}\rangle(t-\alpha)\,c_j^0(\alpha)\,d\alpha+1;$$

$$s_j^0(t)=\varkappa^2\int\limits_0^t\langle q\rangle\langle q^{-1}\rangle(t-\alpha)\,s_j^0(\alpha)\,d\alpha+\langle q^{-1}\rangle t, \qquad (2.14)$$

решениями которых, как легко видеть, являются лишь функции

$$c_j^0(t)=\operatorname{ch}(\varkappa\sqrt{\langle q\rangle\langle q^{-1}\rangle}\,t);\quad s_j^0(t)=\varkappa^{-1}\sqrt{\langle q\rangle^{-1}\langle q^{-1}\rangle}\operatorname{sh}(\varkappa\sqrt{\langle q\rangle\langle q^{-1}\rangle}\,t)$$

соответственно. Равномерность предельных переходов $\lim\limits_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}s_j^\varepsilon(t)=s_j^0(t)$ и $\lim\limits_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}c_j^\varepsilon(t)=c_j^0(t)$ по $j=0,\pm 1,\ \ldots,\ \pm N^\varepsilon$ и $\varkappa\in[0,\varkappa_1]$ вытекает из того факта, что в силу (2.12) и (2.14) разности $c_j^\varepsilon-c_j^0$ и $s_j^\varepsilon-s_j^0$ удовлетворяют интегральному уравнению типа Вольтерра, решив которое методом последовательных приближений, устанавливаем требуемую равномерную сходимость. Последняя из оценок (2.11) следует из продифференцированного по t представления (2.12). Лемма доказана.

Перейдем к построению решения $u^\varepsilon(x,k)$ задачи (1.7)—(1.9). В полуплоскостях R_+ и R_- оно имеет вид

$$u^\varepsilon(x,k)\begin{cases}\hat u(x,k)+\sum\limits_j\int\limits_{\Gamma_+^j}G_+(x,y,k)\,\psi_j^+(y)\,d\Gamma_y; & (2.15)\\ -\sum\limits_j\int\limits_{\Gamma_-^j}G_-(x,y,k)\,\psi_j^-(y)\,d\Gamma_y,\end{cases}$$

где $\Gamma_\pm^j$ — верхнее и нижнее основания щели Q_j^ε; $\psi_j^\pm(y)=\left.\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right|_{\Gamma_\pm^j}$; $\hat u(x,k)$ $G_\pm(x,y,k)$ — решение и функции Грина задачи (1.7)—(1.9) в областях $R_\pm$ соответственно.

В каждой щели Q_j^ε рассмотрим функцию

$$u_j^\varepsilon(x)=a_jc_j(t)+b_js_j(t), \qquad (2.16)$$

где $x=(j\varepsilon+\bar\xi(v,t),\ -\bar\eta(v,t))\in Q_j^\varepsilon$; $c_j=c_j^\varepsilon(t)$, $s_j=s_j^\varepsilon(t)$ — решения задач (2.7), (2.8) и (2.7)—(2.9); a_j, b_j — произвольные постоянные. В силу свойств координатной системы (v,t) функции $u_j^\varepsilon(x)$ на боковых границах щелей Q_j^ε удовлетворяют граничному условию (1.8) (т. к. $u_j^\varepsilon(x)$ не зависит от координаты v). Потребуем, чтобы в каких либо точках верхнего и нижнего оснований щелей (скажем, в точках $x_j^+ = (\varepsilon j, 0) \in \Gamma_+^j$, $x_j^- = (\varepsilon j, -h) \in \Gamma_-^j$ значения функций $u^\varepsilon(x, k)$ и $u_j^\varepsilon(t)$ и их производных по η совпали. Тогда, учитывая, что $t'_\eta|_{\xi=0} = 1$, с помощью (2.8), (2.9), (2.15), (2.16) получаем систему

$$\hat{u}(x_j^+) + \int_{\Gamma_+^\varepsilon} G_+(x_j^+, y)\,\psi^+(y)\,d\Gamma_y = a_j;$$

$$-\int_{\Gamma_-^\varepsilon} G_-(x_j^-, y)\,\psi^-(y)\,d\Gamma_y = a_j c_j(h) + b_j s_j(h);$$

$$\psi^+(x_j^+) = q_j^{-1}(0)\, b_j;$$

$$\psi^-(x_j^-) = a_j s'_j(h) + b_j c'_j(h), \tag{2.17}$$

где $\Gamma_\pm^\varepsilon = \bigcup\limits_j \Gamma_\pm^j$, $\psi^\pm(x) = \sum\limits_j \chi_j^\pm(x)\,\psi_j^\pm(x)$, $\chi_j^\pm(x)$ — характеристические функции множеств $\Gamma_\pm^j$. Отсюда, исключая a_j и b_j и пользуясь вытекающим из уравнений (2.7)—(2.9) тождеством $c_j(t)\,s'_j(t) - c'_j(t)\,s_j(t) = q_j^{-1}(t)$, приходим к следующим равенствам:

$$\psi^\pm(x_j^\pm) + v_\pm(x_j^\pm) \int_{\Gamma_+^\varepsilon} G_+(x_j^+, y)\,\psi^+(y)\,d\Gamma_y +$$

$$+ w_\pm(x_j^\pm) \int_{\Gamma_-^\varepsilon} G_-(x_j^-, y)\,\psi^-(y)\,d\Gamma_y = -v_\pm(x_j^\pm)\,\hat{u}(x_j^+), \tag{2.18}$$

где обозначено

$$v_+(x) = \sum_j \chi_j^+(x)\,c_j(h)\,q_j^{-1}(0)\,s_j^{-1}(h); \quad v_-(x) = \sum_j \chi_j^-(x)\,s_j^{-1}(h)\,q_j^{-1}(h);$$

$$w_+(x) = \sum_j \chi_j^+(x)\,s_j^{-1}(h)\,q_j^{-1}(0); \quad w_-(x) = \sum_j \chi_j^-(x)\,s'_j(h)\,s_j^{-1}(h). \tag{2.19}$$

Рассмотрим связанную с ними систему интегральных уравнений для функций $\tilde{\psi}^\pm(x)$:

$$\tilde{\psi}^\pm(x) + v_\pm(x) \int_{\tilde{\Gamma}_+^\varepsilon} G(x, y)\,\tilde{\psi}^+(y)\,d\Gamma_y +$$

$$+ w_\pm(x) \int_{\tilde{\Gamma}_-^\varepsilon} G(x, y)\,\tilde{\psi}^-(y)\,d\Gamma_y = -v_\pm(x)\,\hat{u}(x), \quad x \in \tilde{\Gamma}_\pm^\varepsilon, \tag{2.20}$$

где

$$G(x, y, k) = -\frac{i}{2} H_0^1(k\,|x - y|); \; \tilde{\Gamma}_\pm^\varepsilon = \bigcup_j \tilde{\Gamma}_\pm^j; \; \tilde{\Gamma}_+^j = \Gamma_+^j; \; \tilde{\Gamma}_-^j = \Gamma_-^j + h l_2$$

(l_2 — орт оси x_2).

Лемма 4. *Пусть* $k = i\varkappa$, $0 < \varkappa_0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_1$. *Тогда при достаточно малых* ε *существует единственное решение* $\{\tilde{\psi}^+(x), \tilde{\psi}^-(x)\}$ *системы* *уравнений* (2.20), *причем выполняются неравенства: при любых* x', $x'' \in \tilde{\Gamma}^j_\pm$, $j = 0, \pm 1, \ldots, \pm N^\varepsilon$

$$|\tilde{\psi}^\pm(x') - \tilde{\psi}^\pm(x'')| \leqslant C|x' - x''| \cdot |\ln|x' - x''||, \tag{2.21}$$

и при любых $x', x'' \in \tilde{\Gamma}^\varepsilon_\pm$

$$\left|\int\limits_{\tilde{\Gamma}^\varepsilon_\pm} G(x', y, k)\tilde{\psi}^\pm(y)\,d\Gamma_y - \int\limits_{\tilde{\Gamma}^\varepsilon_\pm} G(x'', y, k)\tilde{\psi}^\pm(y)\,d\Gamma_y\right| \leqslant$$
$$\leqslant C|x' - x''|\,|\ln|x' - x''||, \tag{2.22}$$

где постоянные C не зависят от ε (при $\varepsilon < \hat{\varepsilon}(\varkappa_0, \varkappa_1, h, L)$).

Доказательство. Обозначим через $\tilde{H}_\varepsilon$ гильбертово пространство, элементами которого являются пары функций, заданных соответственно на $\tilde{\Gamma}^\varepsilon_+$ и $\tilde{\Gamma}^\varepsilon_-$: $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi^+(x)\\ \varphi^-(x)\end{pmatrix}$, $\varphi^+ \in L_2(\tilde{\Gamma}^\varepsilon_+)$, $\varphi^- \in L_2(\tilde{\Gamma}^\varepsilon_-)$, а скалярное произведение определяется равенством

$$(\varphi, \omega) = \int\limits_{\tilde{\Gamma}^\varepsilon_+} \varphi^+(x)\,\psi^+(x)\,d\Gamma + \int\limits_{\tilde{\Gamma}^\varepsilon_-} \varphi^-(x)\,\psi^-(x)\,d\Gamma.$$

Пусть W и V — действующие в $\tilde{H}_\varepsilon$ операторы умножения на матрицы с элементами

$$W_{ik} = \delta_{ik}[\delta_{i1}\sum_j s_j(h)\,q_j(0)\,\chi^+_j(x) + \delta_{2k}\sum_j s_j(h)\,q_j(h)\,\chi^-_j(x)];$$
$$V_{ik} = \delta_{ik}[\delta_{i1}\sum_j c_j(h)\,\chi^+_j(x) + \delta_{2k}\sum_j s'_j(h)\,q_j(h)\,\chi^-_j(x)], \tag{2.23}$$

где $i, k = 1, 2$; δ_{ik} — символ Кроннекера. Обозначим через $G_\pm$ интегральные операторы в $\tilde{H}_\varepsilon$, определенные равенствами

$$(G_\pm\varphi)(x) = \begin{pmatrix} \sum\limits_j \chi^+_j(x) \int\limits_{\tilde{\Gamma}^\varepsilon_+} G(x, y, k)\,\varphi^\pm(y)\,d\Gamma_y \\ \sum\limits_j \chi^-_j(x) \int\limits_{\tilde{\Gamma}^\varepsilon_-} G(x, y, k)\,\varphi^\mp(y)\,d\Gamma_y \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что систему уравнений (2.20) можно записать в операторном виде

$$\psi_+ W^{-1}(VG_+ + G_-)\psi = W^{-1}\nu, \tag{2.24}$$

где

$$\nu = -\begin{pmatrix} \sum\limits_j \chi^+_j(x)\,c_j(h)\,\hat{u}(x, k) \\ \sum\limits_j \chi^-_j(x)\,\hat{u}(x, k) \end{pmatrix}.$$

В силу леммы 3 и неравенства (1.3)

$$C\|\psi\|^2 \geqslant (W\psi, \psi) \geqslant \frac{a}{A}h\|\psi\|^2, \tag{2.25}$$

и, значит, уравнение (2.24) эквивалентно следующему уравнению: $(W+VG_{+}+G_{-})\psi=\nu$. Последнее запишем в виде $(V-\mathring{V})G_{+}\psi+(W+\mathring{V}G_{+}+G_{-})\psi=\nu$, где $\mathring{V}$ — оператор умножения на матрицу с элементами

$$\mathring{V}_{ik}=\delta_{ik}\left(\delta_{i1}\sum_{j}\chi_{j}^{+}(x)\operatorname{ch}\varkappa_{1}h+\delta_{2k}\sum_{j}\chi_{j}^{-}(x)\operatorname{ch}\varkappa_{1}h\right). \qquad (2.26)$$

Покажем, что G_{+} — положительный, а $\mathring{V}G_{+}+G_{-}$ — неотрицательный операторы в $\tilde{H}_{\varepsilon}$. Пусть φ — элемент пространства $\tilde{H}_{\varepsilon}$, компоненты $\varphi^{\pm}(x)$ которого удовлетворяют условию Липшица на $\tilde{\Gamma}_{\pm}^{\varepsilon}$ и равны нулю на $\partial\tilde{\Gamma}_{\pm}^{\varepsilon}$. Очевидно, что множество таких элементов плотно в $\tilde{H}_{\varepsilon}$. Положим

$$U^{\pm}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\tilde{\Gamma}_{\pm}^{\varepsilon}}K_{0}(\varkappa|x-y|)\varphi^{\pm}(y)\,dy,$$

где $K_{0}(\varkappa|x|)$ — функция Макдональда. Функции $U^{\pm}(x)$ удовлетворяют в полуплоскостях $R_{\pm}$ уравнению $\Delta U^{\pm}(x)-\varkappa^{2}U^{\pm}(x)=0$, их производные по x_{2} равны $-\varphi^{\pm}(x)$ на $\tilde{\Gamma}_{\pm}^{\varepsilon}$ и нулю на $\Gamma\setminus\tilde{\Gamma}_{\pm}^{\varepsilon}$, и, кроме того, $U^{\pm}\in W_{2}^{1}(R_{\pm})$. Поэтому, применяя формулу Грина к функциям $U^{\pm}$ и $\overline{U}^{\pm}$, имеем $|(G_{-}\varphi,\varphi)|\leqslant(G_{+}\varphi,\varphi)\leqslant\operatorname{ch}\varkappa_{1}h\,(G_{+}\varphi,\varphi)\leqslant(\mathring{V}G_{+}\varphi,\varphi)$ и, значит,

$$([\mathring{V}G_{+}+G_{-}]\varphi,\varphi)\geqslant 0. \qquad (2.27)$$

Рассмотрим оператор $(V-\mathring{V})G_{+}$. Ядро интегрального оператора G_{+} представимо в виде

$$G(x,y,i\varkappa)=(|\ln|x-y||+|\ln\varkappa|)\,g(x,y,\varkappa), \qquad (2.28)$$

где $g(x,y,\varkappa)$ — непрерывно дифференцируемая по x, y и ограниченная равномерно по $\varkappa$ функция. Поскольку $\operatorname{mes}\tilde{\Gamma}_{\pm}^{\varepsilon}\leqslant 2L$, то при $0<\varkappa_{0}\leqslant\varkappa\leqslant\varkappa_{1}$ $\|G_{\pm}\|\leqslant C$, где постоянная C не зависит от ε. Отсюда, в силу представления (2.23), (2.26) и результатов леммы 3 следует, что при $\varepsilon\to 0$ $\|V-\mathring{V}\|=0(1)$, откуда согласно (2.25) и (2.27), в свою очередь, вытекает, что при достаточно малых ε ($\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon}(\varkappa_{0},\varkappa_{1},L)$) уравнение (2.24) (а, значит, и система (2.20)) имеет единственное решение $\tilde{\psi}^{\pm}$, норма которого в пространстве $\tilde{H}_{\varepsilon}$ ограничена равномерно по ε. Поэтому, учитывая, что правые части системы (2.20) являются гладкими функциями соответственно на $\tilde{\Gamma}_{+}^{\varepsilon}$ и $\tilde{\Gamma}_{-}^{\varepsilon}$, из леммы 3 получаем равномерные оценки $\max\{|\tilde{\psi}^{\pm}(x)|:x\in\tilde{\Gamma}_{\pm}^{\varepsilon}\}\leqslant C$, из которых, с учетом (2.28), следуют неравенства (2.21), (2.22). Лемма доказана.

Пусть $\tilde{\psi}^{\pm}(x)$ — решение системы (2.20). Положим $\psi_{j}^{+}(x)=\tilde{\psi}^{+}(x)\times\chi_{j}^{+}(x)$ $(x\in\Gamma_{+}^{j})$, $\psi_{j}^{-}(x)=\tilde{\psi}^{-}(x-he_{2})\chi_{j}^{-}(x)$ $(x\in\Gamma_{-}^{j})$, а постоянные a_{j} и b_{j} найдем из равенств (2.17). Тогда будут выполнены равенства

(2.18), (2.19), причем постоянные a_j и b_j будут ограничены не зависящей от j и ε постоянной C.

Рассмотрим функцию $U^\varepsilon(x, k)$, определенную в полуплоскостях $R_\pm$ равенствами (2.15), а в щелях Q_j^ε — равенствами (2.16). Сужения этой функции на области $R_\pm$ и Q_j^ε принадлежат пространствам $W_2^1(R_\pm)$ и $W_2^1(Q_j^\varepsilon)$, но пространству $W_2^1(D^\varepsilon)$ функция U^ε не принадлежит, поскольку при переходе из R_+ в Q_j^ε и из Q_j^ε в R_- она имеет скачки $p_j^+(x) = u^\varepsilon|_{\Gamma_+^j} - u_j|_{\Gamma_+^j}$ и $p_j^-(x) = u^\varepsilon|_{\Gamma_-^j} - u_j|_{\Gamma_-^j}$. Учитывая конструкцию этой функции и используя оценки (2.10), (2.21), (2 22), получаем

$$|p_j^\pm(x') - p_j^\pm(x'')| \leqslant C|x' - x''|\,|\ln|x' - x''||, \quad x', x'' \in \Gamma_\pm^j, \tag{2.29}$$

а так как $p_j^\pm(x_j^\pm) = 0$ и $\operatorname{diam}\Gamma_\pm^j \leqslant C$, то

$$|p_j^\pm(x)| \leqslant C\varepsilon|\ln\varepsilon|. \tag{2.30}$$

Аналогично

$$\left|\left[\frac{\partial U^\varepsilon}{\partial\eta}\right]^\pm\right| = \left|\left(\frac{\partial U^\varepsilon}{\partial\eta} - \frac{\partial u_j}{\partial\eta}\right)\Big|_{\Gamma_\pm^j}\right| \leqslant \varepsilon C|\ln\varepsilon|. \tag{2.31}$$

По построению функция $U^\varepsilon(x, k)$ в каждой из полуплоскостей $R_\pm$ удовлетворяет уравнению $\Delta U^\varepsilon + k^2U^\varepsilon = f$, имеет нулевую нормальную производную на боковых границах щелей Q_j^ε и на множествах $\Gamma_\pm \setminus \bigcup_j \Gamma_\pm^j$. Покажем, что в щелях эта функция удовлетворяет уравнению $\Delta U^\varepsilon(x, k) + k^2U^2(x, k) = \varphi_j^\varepsilon(x)$, причем для функции φ_j^ε имеет место равномерная по j оценка

$$\max_{Q_j^\varepsilon}|\varphi_j^\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^{2-3\theta}). \tag{2.32}$$

В самом деле, согласно (2.16), функция $U^\varepsilon = u_j^\varepsilon$ в щели Q_i^ε не зависит от переменной v, поэтому

$$(\Delta + k^2)u_j^\varepsilon = (|R_v||R_t|)^{-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{|R_v|}{|R_t|}\frac{du_j^\varepsilon}{dt}\right) + k^2u_j^\varepsilon =$$

$$= q^{-1}(\varepsilon^{-\theta}t)\frac{d}{dt}\left[q(\varepsilon^{-\theta}t)\frac{du_j^\varepsilon}{dt}\right] + k^2u_j^\varepsilon + ((|R_v||R_t|)^{-1} -$$

$$- q^{-1}(\varepsilon^{-\theta}t))\frac{d}{dt}\left[q\frac{du_j^\varepsilon}{dt}\right] - \{|R_v|_t|R_t| - \varepsilon^{-\theta}q'|R_t|^2 -$$

$$- (|R_t|_t|R_v|)\frac{du_j^\varepsilon}{dt} - (|R_v| - q|R_t|)\frac{d^2u_j^\varepsilon}{dt^2}\}(|R_v||R_t|^3) \equiv \varphi_j^\varepsilon.$$

Отсюда, пользуясь результатами лемм 2, 3, уравнением (2.7) и учитывая, что постоянные a_j и b_j в представлении (2.16) ограничены равномерно по j и ε, приходим к требуемой оценке (2.32). Из этой оценки, а также из полученных выше оценок (2.29), (2.30), используя метод, описанный в [2, с. 256—258], получаем, что при $0 < \theta < \frac{2}{3}$ разность функций $U^\varepsilon(x, i\varkappa) - u^\varepsilon(x, i\varkappa)$ стремится к 0 равномерно по $x \in R_+ \cup R_-$, находящемся на положительном расстоянии от границ $\partial R_\pm$, и по $\varkappa \in [\varkappa_0, \varkappa]$.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 необходимо показать, что построенная выше функция $U_\varepsilon(x, k)$ при $\varepsilon \to 0$ сходится в $R_\pm$ к функции, определенной равенствами (1.10), где $\psi^\pm(y)$ — решения системы интегральных уравнений (1.11).

§ 3. Предельный переход

Пусть $k = i\varkappa$ $(\varkappa_0 < \varkappa < \varkappa_1)$. Тогда, как показано в § 2, решение $\tilde{\psi}^\pm(x)$ системы (2.20) ограничено равномерно по ε. Поэтому можно выделить последовательность $\{\varepsilon_k \to 0\}$, такую , что для любой непрерывной функции $g(\xi)$ существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon_k \to 0} \int_{-L}^{L} \tilde{\psi}_\varepsilon^\pm(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{-L}^{L} \psi^\pm(\xi)\, g(\xi)\, d\xi, \tag{3.1}$$

где $\psi^\pm(\xi)$ — ограниченные на отрезке $[-L, L]$ функции.

Покажем, что они не случайны и удовлетворяют системе уравнений (1.11). Для этого требуется выполнить предельный переход в системе уравнений (2.20). Рассмотрим, например, первое из уравнений этой системы. Умножим его на $g(\xi)$ и проинтегрируем по $\xi \in [-L, L]$. В первом слагаемом в левой части полученного равенства можно перейти к пределу при $\varepsilon_k \to 0$ согласно (3.1). Далее, пользуясь леммой 3 (при $k = i\varkappa$) и представлением (2.19), легко показать, что равномерно по $\xi' \in [-L, L]$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-L}^{L} g(\xi) \sum_j \frac{\chi_j^+(\xi)\, c_j(h)}{s_j(h)\, q_j(0)} H_0^1(k\,|\xi - \xi'|)\, d\xi = \frac{1}{\langle q^{-1}\rangle} \frac{\hat{k}\cos\hat{k}h}{\sin\hat{k}h}\, \varphi(\xi'),$$

где $\hat{k} = k\sqrt{\langle q\rangle\langle q^{-1}\rangle}$, а $\varphi(\xi') = \int_{-L}^{L} H_0^1(k\,|\xi - \xi'|)\, g(\xi)\, d\xi$ — непрерывная функция.

Во всех остальных слагаемых полученного равенства следует поменять порядок интегрирования по ξ и ξ', провести согласно (3.1) предельный переход по последовательности $\varepsilon_k \to 0$ и вернуться к прежнему порядку интегрирования. К примеру,

$$\lim_{\varepsilon_k \to 0} \int_{-L}^{L} g(\xi) \sum_j \frac{\chi_j^+(\xi)\, c_j(h)}{s_j(h)\, q_j(0)} \int_{-L}^{L} H_0^1(k\,|\xi - \xi'|)\, \tilde{\psi}_\varepsilon^+(\xi')\, d\xi\, d\xi' =$$

$$= \langle q^{-1}\rangle^{-1}\, \hat{k} \operatorname{ctg} \hat{k}h \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} H_0^1(k\,|\xi - \xi'|)\, \psi^+(\xi')\, g(\xi)\, d\xi\, d\xi'.$$

В результате приходим к первому из уравнений (1.11). Второе выводится аналогично. Таким образом, переходя к пределу в равенстве (2.15) по подпоследовательности $\varepsilon_k \to 0$, получаем, что предел $u(x, i\varkappa)$ достигается равномерно по $x \in R_+ \cup R_-$, находящемся на положительном расстоянии от $\partial R_\pm$, и определяется равенствами (1.10), где (ψ^+, ψ^-) — решения системы уравнений (1.11). Поскольку эта система при $k = i\varkappa$ ($\varkappa > 0$) имеет единственное решение, отсюда следует, что пределы по любой подпоследовательности неслучайны и совпадают, т. е. $u(x, i\varkappa) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} U^\varepsilon(x, i\varkappa)$.

Переход к произвольным комплексным $k \in \boldsymbol{C}^+$ производится в точности так же, как оказано в работе [2]. Теорема 1 доказана.

§ 4. Прохождение плоских электромагнитных H-поляризованных волн через идеально проводящий слой со случайными тонкими щелями

Рассмотрим одно применение теоремы 1 в радиофизике. Пусть на идеально проводящий слой $Q = \{x, y \in \boldsymbol{R}, 0 \geqslant z \geqslant -h\}$, прорезанный случайными тонкими щелями Q_j^ε ($j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$) ширины порядка ε, сверху падает плоская электромагнитная волна. Предположим, что локальное строение щелей такое же, как в рассмотренной выше задаче (1.7) — (1.9), но теперь они пронизывают весь слой, т. е. $L = \infty$. Предположим также, что падающая волна H-поляризована [3], т. е. x — компонента поля $u(z, y)$ удовлетворяет в области $R_+ \cup R_- \cup (\bigcup\limits_j Q_j^\varepsilon)$ уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \tag{4.1}$$

и граничному условию на идеально проводящей поверхности

$$\partial (Q \setminus \bigcup_j Q_j^\varepsilon): \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \tag{4.2}$$

На бесконечности поведение поля, соответствующего падающей волне единичной амплитуды, задается асимптотическим равенством

$$u(z, y) \sim \begin{cases} e^{-ikz} + R(k, \varepsilon)\, e^{ikz} & z \to +\infty; \\ P(k, \varepsilon)\, e^{-ikz} & z \to -\infty, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $P(k, \varepsilon)$ и $R(k, \varepsilon)$ — коэффициенты отражения и прохождения. Понятно, что эти функции случайны, т. е. $P(k, \varepsilon) = P(k, \varepsilon, \omega)$, $R(k, \varepsilon) = R(k, \varepsilon, \omega)$. Теорема 1 позволяет найти их асимптотику при малых ε и $\operatorname{Im} k > 0$. Прежде всего отметим, что теорему 1 можно распространить и на случай, когда щели пронизывают весь слой. В этом случае ее удобно сформулировать в следующем виде: решение задачи (1.7) — (1.9) для почти всех реализаций $\omega \in \Omega$ при $\varepsilon \to 0$ сходится к неслучайной функции $u(z, y)$, которая всюду в $\boldsymbol{R}^2$ удовлетворяет (в обобщенном смысле) уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(a(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 b(z)\, u = f(z, y), \tag{4.4}$$

где $a(z) = \begin{cases} 1 \\ \langle q^{-1}\rangle^{-1}; \end{cases}$ $b(z) = \begin{cases} 1 & z > 0,\ z < -h \\ \langle q\rangle & 0 \geqslant z \geqslant -h. \end{cases}$

Это вытекает из представлений (1.10), (1.11). В задач (4.1) — (4.3) $f \equiv 0$, а асимптотика (4.3) не зависит от y, поэтому уравнение (4.4) приводится к такой задаче сопряжения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \qquad z \in R_+ \cup R_-;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 \langle q \rangle \langle q^{-1} \rangle u = 0 \qquad z \in Q;$$

$$u|_{R_\pm} = u|_Q; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{R_\pm} = \frac{1}{\langle q^{-1} \rangle} \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_Q;$$

$$u \sim \begin{cases} e^{-ikz} + Re^{ikz} & z \to +\infty; \\ Pe^{-ikz} & z \to -\infty. \end{cases}$$

Решив эту задачу, приходим к следующим формулам для первых членов асимптотики коэффициентов отражения и прохождения при малых ε:

$$R(k, \varepsilon, \omega) \sim \frac{-\frac{i}{2}\left(1 - \langle q \rangle \langle q^{-1} \rangle^{-1}\right) \sin \hat{k} h}{\sqrt{\langle q \rangle \langle q^{-1} \rangle^{-1}} \cos \hat{k} h - \frac{i}{2}\left(1 + \langle q \rangle \langle q^{-1} \rangle^{-1}\right) \sin \hat{k} h};$$

$$P(k, \varepsilon, \omega) \sim \frac{\sqrt{\langle q \rangle \langle q^{-1} \rangle^{-1}}\, e^{-i\hat{k} h}}{\sqrt{\langle q \rangle \langle q^{-1} \rangle^{-1}} \cos \hat{k} h - \frac{i}{2}\left(1 + \langle q \rangle \langle q^{-1} \rangle^{-1}\right) \sin \hat{k} h},$$

где $\hat{k} = k\sqrt{\langle q \rangle \langle q^{-1} \rangle}$.

Из этих формул видно, что на частотах $k = \pi m/(h\sqrt{\langle q \rangle \langle q^{-1} \rangle})$ наблюдается резонансное проскакивание H-поляризованной волны через тонкие щели в слое, причем резонанс тем более выражен, чем меньше средняя ширина щелей.

Список литературы: 1. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М., 1975. 320 с. 2. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. К., 1974. 280 с. 3. *Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В.* Электромагнитные поля и волны. М., 1971. 666 с.

Поступила в редколлегию 25.01.88